

# Reconstruction accélérée par compression de calcul utilisant une approche fréquentielle

Thomas RODET<sup>1,2</sup>, Pierre GRANGEAT<sup>1</sup>, Laurent DESBAT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CEA - LETI, DSIS, CEA/G 17 rue des Martyrs 38054 GRENOBLE Cedex, France

<sup>2</sup>TIMC - IMAG, IAB, Faculté de médecine, UJF 38706 La Tronche Cedex 9

Thomas.Rodet@cea.fr, Pierre.Grangeat@cea.fr

Laurent.Desbat@imag.fr

**Résumé** – Certaines applications médicales comme l'imagerie fonctionnelle (PET et SPECT) ou l'imagerie d'aide au geste chirurgical (tomofluoroscopie), ont besoin d'une imagerie dynamique. Les temps de reconstruction doivent donc être réduits. C'est pour cela que nous avons développé une nouvelle technique pour la reconstruction d'image dynamique basée sur la décomposition fréquentielle de l'image. Notre algorithme calcule la décomposition indirecte en sous bandes fréquentielles de l'image ( $f = \sum f_j$ ) en appliquant un filtre sur les données  $Rf$ . Les composantes fréquentielles de l'image peuvent être reconstruites sur une grille sous-échantillonnée sans perte d'information comme la compression en sous bande de la norme MPEG audio. La réduction du temps de calcul est principalement dû au sous-échantillonnage des projections. Mais nous pouvons aussi compresser l'image et du même coup les temps de reconstruction par l'élimination de certaines composantes fréquentielles contenant peu d'informations pertinentes.

**Abstract** – Some recent medical imaging applications, such as functional imaging (PET and SPECT) or interventional imaging (CT fluoroscopy) involves dynamic data. The image reconstruction time must be reduced. For that purpose, we developed a new fast algorithm for dynamic reconstruction based on a frequential hierarchical reconstruction. Our algorithm performs an indirect subband decomposition of the image  $f$  to be reconstructed ( $f = \sum f_j$ ) through the filtering of the projection  $Rf$ . The subband images  $f_j$  can be reconstructed on an undersampled grid without information suppression. In order to reduce the computation time, we undersample the number of projections and we choose them in accordance with the undersampled grid. But image compression can also be made directly in our algorithm by elimination of some frequential components with low information content.

## 1 Introduction

À l'heure actuelle, les avancées technologiques des tomographes médicaux entraînent un accroissement considérable du volume des données à traiter. De plus, de nouvelles applications médicales telles que la tomofluoroscopie [2] nécessitent des calculs d'image en temps réel. C'est le cas en particulier sur le projet européen DynCT (IST-1999-10515) portant sur la tomographie dynamique avec compensation du mouvement, pour lequel le CEA-LETI a en charge les algorithmes de reconstruction d'image. La reconstruction tomographique rapide est un domaine de recherche très actif [1, 5, 3]. Dans cet article, nous présentons un nouvel algorithme de reconstruction rapide de données dynamiques. L'idée principale de notre approche est de s'inspirer des principes de la compression de données pour développer des approches originales de compression des calculs de reconstruction tomographique.

## 2 Notations

Par un souci de simplification, nous supposons que  $f$  est suffisamment régulière (par exemple  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ). On pourra donc appliquer à  $f$  la transformée de Fourier notée

$\hat{f}$  définie par :

$$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(t) e^{-i\nu \cdot t} dt \quad (1)$$

Soit  $s \in \mathbb{R}$ , et  $\theta \in S^1$ , où  $S^1$  est le cercle unité. Nous définissons l'opérateur de transformée de Radon  $R$  par :

$$Rf(\theta, s) = \int_{y \in \theta^\perp} f(s\theta + y) dy. \quad (2)$$

Pour une fonction suffisamment régulière, nous pouvons utiliser la formule d'inversion de la transformation de Radon (voir [4]) :

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} R^\# I^{-1} Rf(x) \quad (3)$$

avec  $(I^{-1}g)(\theta, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\nu| \hat{g}(\theta, \nu) e^{is \cdot \nu} d\nu$ , et  $R^\#$  est l'opérateur de rétroprojection.

## 3 Le principe général de la compression de calcul

Nous avons repris les étapes principales de la compression de données : -décomposition fréquentielle, quantification et décompression- et nous les avons adaptées aux calculs de reconstruction tomographique. Comme on peut le voir sur la figure 1, nous avons rajouté une étape de filtrage

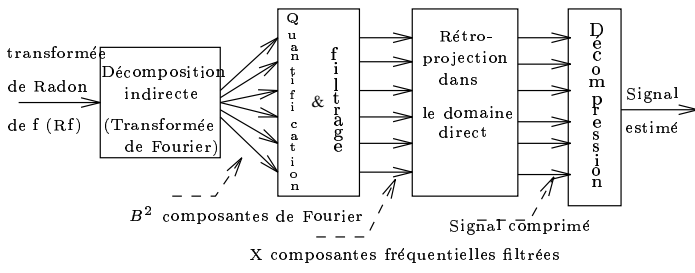


FIG. 1: schéma de principe de la compression de calcul

par le filtre rampe et une étape de rétroprojection qui sont indispensables à la reconstruction tomographique. De plus, nous procédons à une décomposition indirecte via les projections de l'objet. Le principe repose sur le théorème de convolution ([4] page 13),  $R(f * g) = Rf * Rg$ . Si nous voulons décomposer indirectement  $f$  en  $B^2$  composantes fréquentielles  $f_1 \dots f_n$  avec  $f_i = f * g_i$ , il faut convoluer  $Rf$  par  $Rg_i$ , selon la relation suivante déduite de la formule (3):

$$f * g_j = \frac{1}{4\pi} R^\# I^{-1} (Rf * Rg_j). \quad (4)$$

Après cette étape de décomposition indirecte, nous filtrons, puis nous quantifions et enfin nous rétroprojectons chaque composante fréquentielle de manière indépendante. Nous obtenons alors  $X$  imagerie correspondant chacune à une composante fréquentielle. Toutes ces imagerie sont fusionnées dans l'étape de décompression pour obtenir une estimation de l'objet (voir figure 1).

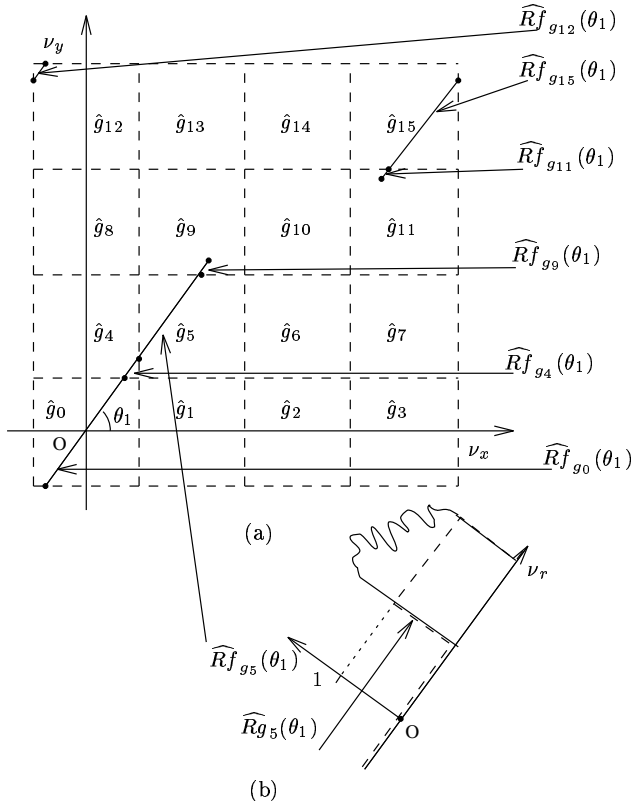


FIG. 2: Schéma de la décomposition indirecte

## 4 Implémentation l'approche

### 4.1 l'étape de décomposition indirecte

L'étape de décomposition indirecte consiste à calculer  $Rf_{g_j}$  avec  $j \in [0, B^2]$  en appliquant un filtre sur les données  $Rf$ . Nous avons choisi d'effectuer ce filtrage dans le domaine de Fourier pour réduire le temps de calcul de cette étape. Nous avons représenté sur la figure 2(a) l'espace de Fourier pavé par les fonctions  $\hat{g}_j$ . On remarque que la transformée de Fourier d'une projection  $\widehat{Rf}(\theta_1)$  est localisée sur une ligne dans cet espace. La décomposition de cette projection par l'indicatrice de support  $\hat{g}_j$  correspond à l'intersection entre la droite associée à la projection et le carré associé à l'indicatrice de support (voir figure 2(a)). Le résultat dans le domaine de Fourier de ce filtrage est représenté sur la figure 2(b). On remarque sur la figure 3 que la plupart des composantes fréquentielles  $f_{g_j}$ , ont des projections  $Rf_{g_j}$  nulles en dehors d'un secteur angulaire délimité par  $\theta_{min}$  et  $\theta_{max}$  ( $\forall \theta \notin [\theta_{min}, \theta_{max}]$ ). En effet, pour ces directions, la droite associée à la projection n'intersecte pas l'indicatrice du support associée à  $g_j$ . Nous allons nous servir de cette particularité pour diminuer le nombre de calcul de rétroprojection. Lors de l'étape de rétroprojection que l'on exposera dans la partie suivante, nous allons calculer les pixels uniquement à partir des projections ayant une composante non nulle.

Estimons maintenant le facteur d'accélération que nous pouvons obtenir grâce à cette méthode. Si  $f$  est décomposée en  $B^2$  composantes et si la fonction est projetée suivant  $M$  angles de vue répartis uniformément sur  $[0, \pi[$  alors une projection  $Rf(\theta)$  est décomposée au maximum en  $2B$  composantes  $Rf_{g_j}(\theta)$  (voir figure 2(a)). En effet,  $\widehat{Rf}(\theta)$  intersecte au moins  $B$  indicatrices de domaines  $\hat{g}_j$  et au plus  $2B$ . Le nombre de projections  $Rf_{g_j}(\theta)$  est donc compris entre  $M \times B$  et  $M \times 2B$ . Or il y a  $B^2$  composantes  $f_{g_j}$ . Pour reconstruire une composante  $f_{g_j}$  il faut donc en moyenne au maximum  $\frac{2M}{B}$  projections. Cette élimination permet de rétroprojecter avec en moyenne  $\frac{B}{2}$  fois moins d'opérations que pour une rétroprojection classique.

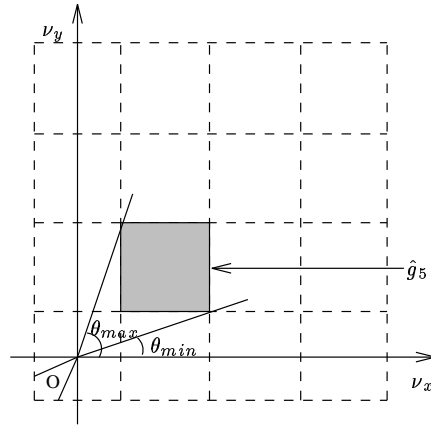


FIG. 3: interval angulaire

## 4.2 L'étape de rétroprojection

Cette étape permet d'obtenir les  $B^2$  composantes fréquentielles  $f_{g_j}$  à partir des projections  $Rf_{g_j}$ . On rétroprojette en réalité les  $B^2$  composantes fréquentielles de manière indépendantes. Pour réduire le temps de calcul chaque composante fréquentielle est rétroprojetée sur  $B^2$  fois moins de pixels que l'image finale. Ce sous-échantillonnage de  $f_{g_j}$  dans l'espace direct correspond à une périodisation de  $\hat{f}_{g_j}$  dans l'espace de de Fourier. Comme le support de  $\hat{f}_{g_j}$  est un petit carré (voir figure 2(a)), et qu'il est dupliqué  $B$  fois dans chaque direction par périodisation. On peut voir sur la figure 2(a) que la périodisation n'implique pas de recouvrement du support de  $\hat{f}_{g_j}$ . Le sous-échantillonnage est donc valide. On peut conclure que les  $B^2$  rétroprojections des  $f_{g_j}$  sont calculées en autant de points que la rétroprojection classique de  $f$ . De plus, nous avons vu dans la partie précédente que la décomposition fréquentielle permettait de faire moins de calcul pour rétroprojeter un point. On en déduit que notre algorithme permet d'accélérer les calculs tomographiques.

## 5 Résultats

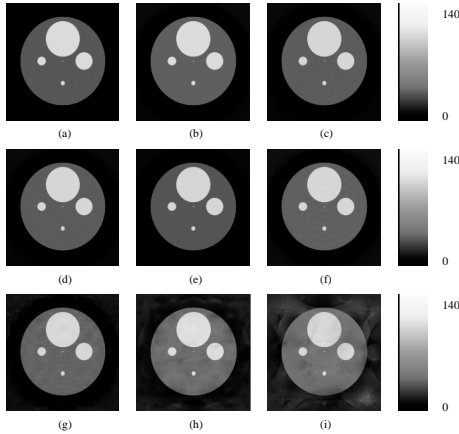


FIG. 4: (a) Reconstruction FBP classique, (b)-(i) reconstruction utilisant notre algorithme en décomposant l'image en 1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 composantes fréquentielles.

Ces résultats ont été obtenus à partir d'un fantôme numérique. A l'aide d'un simulateur, nous avons généré un jeu de 804 projections parallèles d'un fantôme dynamique collecté sur  $[0, \pi]$ . Il est composé de six sphères imbriquées, et il est animé d'un mouvement de translation uniforme selon l'axe  $y$  de 6 pixels par image. Nous avons reconstruit des séquences de 32 images  $512 \times 512$ . Deux expérimentations sont présentées dans cette communication.

### 5.1 Première expérimentation

Elle a pour objectif d'estimer la qualité des reconstructions en fonction du nombre de composantes fréquentielles dans l'étape de décomposition. Pour cette expérience, nous n'avons pas éliminé de composantes. Ces reconstructions

sont regroupées sur la figure 4. On remarque que plus le nombre de composantes fréquentielles augmente, plus la qualité des images se détériore. Cette observation est confirmée par le tableau 1 où nous avons estimé l'erreur relative de nos reconstructions par rapport à un algorithme de reconstruction FBP classique (voir figure 4(a)). On peut conclure de ces résultats que les artefacts sont liés à la taille de l'imagette intermédiaire que l'on reconstruit. Ces artefacts sont dus pour une grande part à l'erreur commise lors du découpage des données polaires par des frontières qui sont définies dans un espace cartésien (voir figure 2(a)). Les temps de reconstruction

TAB. 1: La qualité de la reconstruction d'images ( $512 \times 512$ ) en fonction du nombre d'imagettes

Nombre d'imagettes	Taille de l'imagette	Erreur relative en norme 1	Erreur relative en norme $\infty$
4	$128 \times 128$	0.364	1.1646
16	$64 \times 64$	0.604	1.8733
64	$32 \times 32$	1.116	2.2537
256	$16 \times 16$	2.06	4.00
1024	$8 \times 8$	4.271	5.605
4096	$4 \times 4$	9.686	9.760
16384	$2 \times 2$	19.191	14.382

de ces images représentées sur la figure 5 ont été obtenus sur une SUN Enterprise 3500 sur un processeur, cadencée à 400 Mhz et 1 Gigaoctet de mémoire vive. On remarque que cette courbe possède un minimum pour 64 composantes fréquentielles. On note qu'il y a deux processus antagonistes. Le premier est la non rétroprojection des projections ayant une décomposition nulle qui fait diminuer le temps de calcul. Le second est la multiplication des transformées de Fourier inverse qui fait augmenter le temps de calcul.

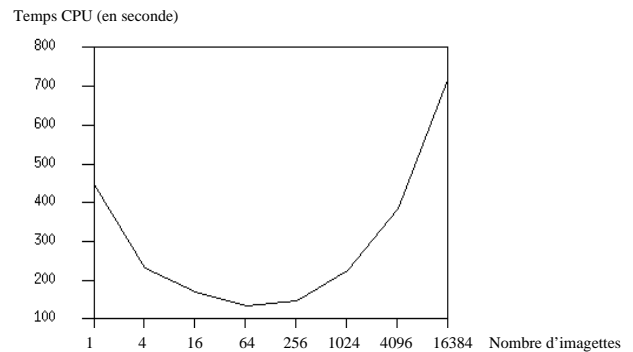


FIG. 5: Temps CPU de reconstruction d'un volume  $512 \times 512 \times 16$  en fonction du nombre d'imagettes intermédiaires

### 5.2 Deuxième expérimentation

On reconstruit le même fantôme en éliminant des composantes fréquentielles. Nous faisons deux reconstructions, l'une en éliminant 62% des composantes fréquentielles 6(b) et l'autre en éliminant 78% des composantes fréquentielles 6(d). Nous avons comparé ces résultats avec une recons-

truction par un algorithme classique (voir figure 6(a)). Nous avons aussi représenté les erreurs absolues (voir figure 6(c) et 6(e)). Dans la première configuration, on remarque que l'image d'erreur ne contient pas d'élément informatif, c'est à dire que l'on ne retrouve pas la forme du fantôme dans l'image des différences. On peut dire que la compression n'a pas détruit d'information pertinente. Dans la deuxième configuration, par contre, une partie de l'information de l'image se retrouve dans l'image des différences : il y a dégradation de l'image. Mais dans beaucoup d'application on doit faire un compromis entre le temps de reconstruction et la qualité de l'image reconstruite.

TAB. 2: *Qualité et temps de calcul des reconstructions dynamiques*

Types algorithmes	% d'images	temps CPU	accélération	Erreur relative 1
FBP	100	754	1	0%
Our algorithm	100	290	2.6	1.09%
	38	200	3.8	1.17%
algorithm	22	169	4.5	1.54%

Analysons maintenant le temps CPU nécessaire pour effectuer ces différentes reconstructions (voir tableau 2). Les accélérations obtenues par notre algorithme sont significatives. On remarque que l'accélération des calculs n'est pas directement liée au nombre de composantes fréquentielles éliminées. Les temps de reconstructions des différentes composantes fréquentielles varient en fonction des fréquences reconstruites. Le temps de reconstruction dépend donc du nombre de composantes éliminées et de leurs fréquences.

## 6 Discussions

Il faut noter que nous avons pu éliminer beaucoup de composantes fréquentielles sans perdre en qualité d'image car notre fantôme dynamique correspond à un cas simple. En effet, un objet en translation dans l'espace direct a sa transformée de Fourier spatio-temporelle localisée sur un plan. Si on a un mouvement plus compliqué, l'information ne serait plus localisée dans le domaine de Fourier. On constate donc que l'espace de Fourier n'est pas le meilleur espace pour représenter de manière compacte les données dynamiques. L'espace des ondelettes est peut-être mieux approprié car il permet de traiter le cas des mouvements locaux.

L'accélération des calculs tomographiques est due à deux phénomènes : une compression sans perte (le sous-échantillonnage angulaire) et une compression avec perte (la quantification). On constate que l'accélération des calculs est principalement due à la compression sans perte. Néanmoins, l'étape de quantification n'est pas inutile. Elle donne à l'algorithme une certaine souplesse d'utilisation. Comme dans la compression MPEG, on peut introduire un facteur de compression qui permettra de choisir le compromis entre temps de calcul et qualité des images, tout en préservant au mieux le contenu des images reconstruites.

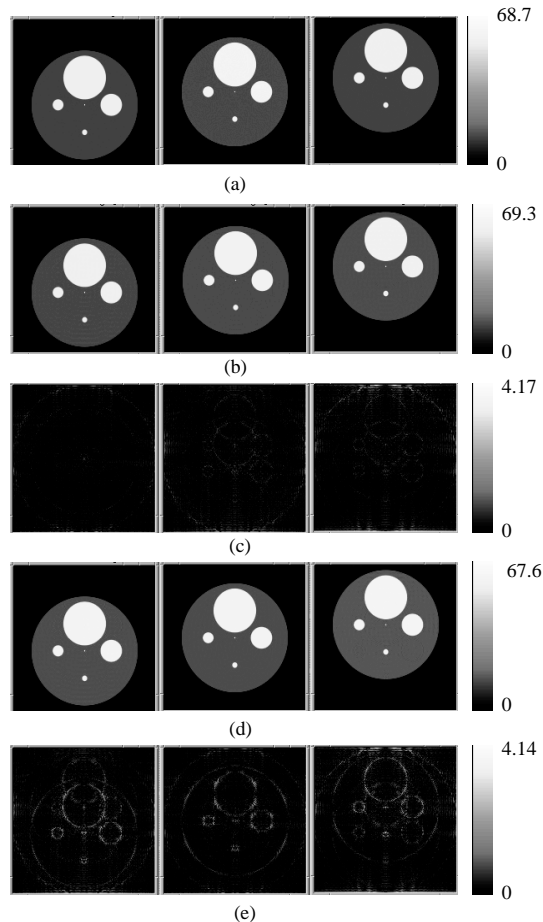


FIG. 6: (a) images 0,15,31 de la séquence reconstruite avec un algorithme FBP classique, (b) reconstruction utilisant notre algorithme avec 38 % des composantes fréquentielles, (c) valeur absolue de (a)-(b), (d) reconstruction utilisant notre algorithme avec 22 % des composantes fréquentielles, (e) valeur absolue de (c)-(d)

## 7 Conclusion et perspectives

Les premiers résultats montrent que la faisabilité de notre approche est avérée et qu'elle permet de réellement accélérer les calculs tomographiques. Il nous faut maintenant valider cette méthode sur des données réalistes. Nous devons aussi explorer d'autres types de décomposition plus efficaces comme la décomposition en ondelettes. Enfin, pour appliquer notre méthode à la tomofluoroscopie, il faudra l'implémenter sur des machines multiprocesseurs, pour obtenir un fonctionnement temps réel.

## Références

- [1] M. L. Brady. A fast discrete approximation algorithm for the radon transform. *SIAM*, 27(1):107–119, 1998.
- [2] B. Daly and P. Templeton. Real-time ct fluoroscopy: evolution of an interventional tool. *Radiology*, 211:309–315, 1999.
- [3] P. E. Danielsson and M. Ingerhed. Implementation of backprojection in  $o(n^2 \log n)$  time. Technical Report LiTH-ISY-R-2003, Linköping University, 1998.
- [4] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986.
- [5] H. Turbell. *3D image reconstruction in circular and helical CT*. PhD thesis, Linköping University, April 1999.