

Recuit simulé pour le *shape from shading*

Xavier DESCOMBES¹, Jean-Denis DUROU², David PETIT²

¹Ariana - Projet Commun CNRS/INRIA/UNSA
INRIA, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex

²IRIT - CNRS/INPT/UPS
118 route de Narbonne, 131062 Toulouse Cedex 4

Xavier.Descombes@inria.fr
durou@irit.fr
petit@irit.fr

Résumé – Nous formalisons le problème du *shape from shading* dans un cadre bayésien. La fonctionnelle utilisée s’interprète alors comme l’énergie associée à un champ markovien et est minimisée par un recuit simulé. Des premiers résultats sur un relief synthétique montrent les avantages de cette approche par rapport aux approches déterministes classiques.

Abstract – We embed the shape from shading problem into a Bayesian framework. The used functional is thus interpreted as an energy function associated with a Markov Random Field and is minimized by a simulated annealing algorithm. First results on synthetic data show the supremacy of this approach w.r.t. classical deterministic approaches.

1 Introduction

Le *shape from shading* consiste à retrouver le relief à partir de la radiométrie d’une seule image bidimensionnelle. Sous certaines hypothèses sur la source lumineuse et sur les propriétés photométriques de la surface, on aboutit à “l’équation de l’eikonale”, qui relie la norme du gradient d’altitude à la radiométrie en chaque point. Résoudre le problème du *shape from shading* consiste donc à résoudre une équation aux dérivées partielles, non linéaire, du premier ordre. La première méthode de résolution proposée par Horn [7] fut la “méthode des lignes caractéristiques”. Cette méthode pose des problèmes majeurs lors de sa mise en œuvre, comme en particulier la non robustesse au bruit [3], et s’avère plutôt utile pour l’étude théorique du nombre de solutions [12], au même titre que les méthodes de résolution par développement en séries entières [4]. La “méthode des courbes de niveau” (*level set method*), qui présente certaines analogies avec la méthode des lignes caractéristiques dans le domaine continu, comporte elle aussi des faiblesses importantes lors de sa mise en œuvre discrète [10]. Quant aux méthodes d’estimation locale du gradient d’altitude, elles sont toutes basées sur des hypothèses plus ou moins arbitraires concernant le relief recherché et manquent fondamentalement de crédibilité, même si elles sont généralement faciles à programmer et peuvent donner des résultats assez satisfaisants dans des cas simples [14].

À l’heure actuelle, les méthodes de résolution donnant les résultats les plus satisfaisants sont toutes des méthodes itératives qui nécessitent la connaissance de l’altitude, voire du gradient d’altitude, sur un contour fermé. On peut les classer en deux catégories : les méthodes d’approximation des solutions de viscosité [11, 5] et les méthodes de minimisation d’une fonctionnelle. Parmi ces dernières, une grande

majorité des auteurs ne se sont pas attachés à une minimisation directe de la fonctionnelle, mais à la résolution itérative des équations d’Euler associées, ce qui pose des gros problèmes de convergence [9, 8].

D’autres auteurs ont opté pour une minimisation déterministe de la fonctionnelle, à l’aide de méthodes relevant de la descente de gradient et de ses différentes variantes [13, 3]. Ces approches se révèlent efficaces dans le cadre de problèmes à énergie convexe. Dans un cadre général, elles convergent vers un minimum local de la fonctionnelle. Dès lors, le résultat est fortement dépendant de l’initialisation. Un exemple test classique consiste à simuler une calotte sphérique. En utilisant un cône comme surface initiale, de bons résultats sont obtenus. En revanche, en partant d’une surface aléatoire, les algorithmes déterministes sont caduques. En outre, si les zones de concavité et de convexité ne sont pas connues *a priori* et ne sont pas définies dans l’initialisation, les performances des approches déterministes sont très moyennes.

Nous proposons d’interpréter la fonctionnelle à minimiser comme l’énergie d’un champ aléatoire markovien. Nous nous plaçons alors dans un cadre bayésien pour lequel la “contrainte de lissage” et la “contrainte d’intégrabilité” représentent l’*a priori* et l’équation de l’eikonale le logarithme de la vraisemblance. La surface recherchée est alors obtenue par le maximum *a posteriori* (MAP) du modèle.

Après avoir rappelé les fondements de l’approche markovienne, nous décrivons une fonction d’énergie modélisant le problème du *shape from shading* et les contraintes *a priori* sur la solution. Nous montrons ensuite l’intérêt de la modélisation stochastique sur un relief synthétique relativement complexe, comportant des zones de concavité et de convexité.

2 Définitions et notations

2.1 Les champs de Markov et le cadre bayésien

Les champs de Markov (CM) sont des processus stochastiques discrets dont les propriétés locales sont définies à partir d'interactions locales. Ils sont définis par leurs probabilités conditionnelles locales [1, 2, 6]. Nous rappelons ici les définitions principales et introduisons les notations utilisées.

Soit K un compact de \mathcal{R}^2 et $z(x, y)$ une fonction d'altitude définie de K dans \mathcal{R} . On désigne conventionnellement par $p(x, y)$ et $q(x, y)$ les deux dérivées partielles de cette fonction. On note S la projection de K sur \mathcal{Z}^2 , qui représente la trame de l'image (ensemble des sites) et $\Lambda \subset \mathcal{R}$ l'ensemble des états. Une configuration dans Λ^S est notée Σ et l'état du site $s = (i, j)$, $\sigma_s = (p_s, q_s)$, où $p_s = p(s)$ et $q_s = q(s)$.

Un champ aléatoire (Σ, P) est dit markovien si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall \Sigma \in \Lambda^S, P(\Sigma) > 0 \\ \forall s \in S, \forall \lambda \in \Lambda, \\ P(\sigma_s = \lambda | \sigma_t, \forall t \in S) = P(\sigma_s = \lambda | \sigma_t, \forall t \in \mathcal{V}_s) \end{cases} \quad (1)$$

où \mathcal{V}_s est le voisinage de s .

Soit c un sous-ensemble fini de S que nous appellerons une clique. Le théorème d'Hammersley-Clifford [1] nous permet d'écrire un CM comme un champ de Gibbs :

$$P(\Sigma) = \frac{\exp[-U(\Sigma)]}{Z} = \frac{1}{Z} \exp \left[- \sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(\sigma_s, s \in c) \right] \quad (2)$$

où V_c est une fonction de $\Lambda^{Card(c)}$ ($Card(c)$ représente le nombre d'éléments de c) dans \mathcal{R} , qui fait référence au potentiel associé à la clique c . L'ensemble des cliques induit le système de voisinage du CM associé et est donné par :

$$\mathcal{V}_s = \{t \in S : \exists c \in \mathcal{C}, \{s, t\} \subset c\} \quad (3)$$

En conclusion, un CM est caractérisé par un ensemble de cliques et une collection de potentiels associée à cet ensemble.

En désignant par I les données, nous recherchons la configuration qui maximise la probabilité *a posteriori* $P(\Sigma|I)$. En vertu de la règle de Bayes, nous avons :

$$P(\Sigma|I) = \frac{P(I|\Sigma)P(\Sigma)}{P(I)} \propto P(I|\Sigma)P(\Sigma) \quad (4)$$

En faisant appel à une hypothèse d'indépendance conditionnelle, la vraisemblance $P(I|\Sigma)$ peut s'écrire comme suit :

$$P(I|\Sigma) = \prod_{s \in S} P(I_s | \sigma_s) = \exp \left[- \sum_{s \in S} -\log(P(I_s | \sigma_s)) \right] \quad (5)$$

Le MAP est alors obtenu en minimisant l'énergie globale :

$$U = \sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(\sigma_s, s \in c) + \sum_{s \in S} -\log(P(I_s | \sigma_s)) \quad (6)$$

2.2 Le recuit simulé

Pour obtenir le critère du MAP, nous considérons un recuit simulé utilisant une dynamique de Metropolis [6]. C'est un algorithme permettant de sortir des minima locaux de l'énergie pour lequel une preuve de convergence presque sûre vers le MAP a été établie. Il peut être décrit comme suit :

Algorithme 1

- 1 Initialiser une configuration $\Sigma = (\sigma_s)$ aléatoirement et poser $T = T_0$.
- 2 Pour chaque site s :
 - 2.a Choisir aléatoirement une valeur nouv dans Λ différente de la valeur courante cour.
 - 2.b Calculer les énergies locales $U(\sigma_s = \text{cour} | \mathcal{V}_s)$ et $U(\sigma_s = \text{nouv} | \mathcal{V}_s)$.
 - 2.c Si $U(\sigma_s = \text{nouv} | \mathcal{V}_s) < U(\sigma_s = \text{cour} | \mathcal{V}_s)$, alors assigner nouv à σ_s , sinon assigner nouv à σ_s avec la probabilité $\exp[-\frac{\Delta U}{T}]$, où : $\Delta U = U(\sigma_s = \text{nouv} | \mathcal{V}_s) - U(\sigma_s = \text{cour} | \mathcal{V}_s)$
- 3 Si le critère d'arrêt n'est pas atteint, alors faire décroître T et retourner en 2.

3 Fonction d'énergie proposée

Dans ce paragraphe, nous décrivons une fonction d'énergie, adaptée au problème du *shape from shading*, contenant trois termes. Le premier terme fait référence aux données, alors que les deux termes suivants définissent des contraintes *a priori* sur la solution. Cette fonction a déjà fait ses preuves, en complément à une méthode de minimisation déterministe [3].

L'équation de l'eikonale

L'équation de l'eikonale reliant la radiométrie aux dérivées partielles de l'altitude s'écrit comme suit :

$$I_s = \frac{I_{MAX}}{\sqrt{(1 + p_s^2 + q_s^2)}} \quad (7)$$

Si nous supposons que les données sont bruitées par un bruit blanc gaussien additif, nous avons alors :

$$P(I|\Sigma) = \prod_{s \in S} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[- \frac{\left(I_s - \frac{I_{MAX}}{\sqrt{(1 + p_s^2 + q_s^2)}} \right)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (8)$$

Contrainte de lissage

Pour définir le modèle *a priori*, nous considérons en premier lieu une contrainte de lissage classique appliquée aux dérivées partielles de la fonction d'altitude. Des potentiels gaussiens sur le voisinage de premier ordre sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \forall c = \{s = (i, j), s' = (i - 1, j)\} \in S^2, \\ \forall c = \{s = (i, j), s' = (i, j - 1)\} \in S^2, \\ V_c^{lis}(\sigma_s, \sigma_{s'}) = ((p_s - p_{s'})^2 + (q_s - q_{s'})^2) \end{aligned} \quad (9)$$

Contrainte d'intégrabilité

La surface est obtenue par intégration sur K des dérivées partielles $p(x, y)$ et $q(x, y)$, qui doivent satisfaire l'égalité de Schwartz :

$$\forall (x, y) \in K, \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} \quad (10)$$

Sur la trame S , cette contrainte est traduite sous forme de potentiel, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall c = \{s = (i, j), s' = (i-1, j), s'' = (i, j-1)\} \in S^3, \\ V_c^{int}(\sigma_s, \sigma_{s'}, \sigma_{s''}) = (p_s - p_{s'} - q_s + q_{s''})^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Énergie totale

L'énergie globale, que nous devons minimiser, s'écrit donc, à une constante additive près, comme suit :

$$\begin{aligned} U = \sum_s \frac{\left(I_s - \frac{I_{MAX}}{\sqrt{(1+p_s^2+q_s^2)}} \right)^2}{2\sigma^2} \\ + \lambda_{lis} \sum_{\substack{\{s=(i,j), s'=(i-1,j)\}, \\ \{s=(i,j), s'=(i,j-1)\}}} V_c^{lis}(\sigma_s, \sigma_{s'}) \\ + \lambda_{int} \sum_{\{s=(i,j), s'=(i-1,j), s''=(i,j-1)\}} V_c^{int}(\sigma_s, \sigma_{s'}, \sigma_{s''}) \end{aligned} \quad (12)$$

4 Résultats

Nous considérons ici une surface synthétique contenant des zones concaves et convexes (*cf.* fig. 1).

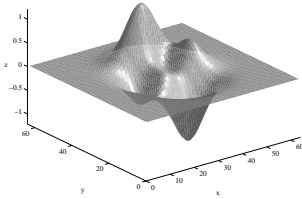


FIG. 1 - Relief réel.

Nous traitons la reconstruction de l'image originale puis de la même image bruitée (*cf.* fig. 2).

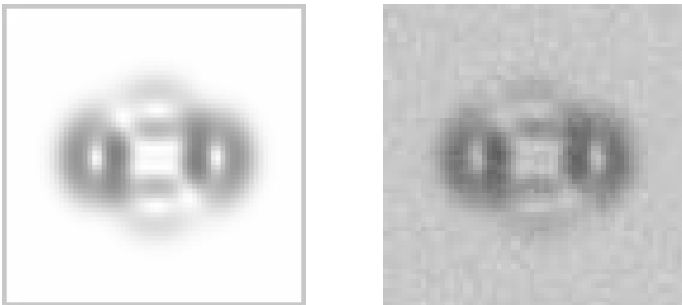


FIG. 2 - Images non bruitée et bruitée ($\sigma = 5$).

Nous supposons que $z = p = q = 0$ sur le bord de ces images. Pour initialiser le recuit simulé, nous sommes partis d'un relief aléatoire (*cf.* fig. 3).

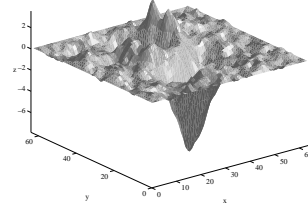


FIG. 3 - Relief de départ aléatoire.

Les coefficients λ_{lis} et λ_{int} de la fonction d'énergie valent respectivement 1000 et 10000 dans le cas de l'image non bruitée, et 1000 et 8000 dans le cas de l'image bruitée. Nous pouvons constater que le relief est correctement reconstruit, que ce soit à partir de l'image non bruitée (*cf.* fig. 4) ou à partir de l'image bruitée (*cf.* fig. 5).

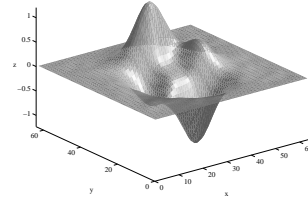


FIG. 4 - Relief calculé par recuit simulé à partir du relief de la figure 3, pour l'image non bruitée.

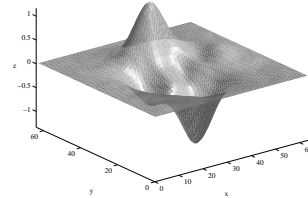


FIG. 5 - Relief calculé par recuit simulé à partir du relief de la figure 3, pour l'image bruitée.

Le recuit simulé, convergeant vers le minimum global de la fonctionnelle minimisée, permet de s'affranchir de l'initialisation et de la connaissance *a priori* des zones de concavité et de convexité.

Il n'en va bien sûr pas de même pour une méthode de minimisation déterministe. En utilisant la "méthode de descente de gradient optimale" [3] et la même fonction d'énergie que ci-dessus, on obtient un résultat aberrant (*cf.* fig. 6) lorsque le relief de départ est le relief aléatoire de la figure 3. En revanche, si l'on utilise un relief de départ qui présente des sommets et des bosses aux mêmes endroits que le relief réel (*cf.* fig. 7), alors le résultat est le même qu'avec le recuit simulé (*cf.* fig. 8), avec en outre un temps de calcul nettement plus faible. Néanmoins, il est bel et bien impossible de trouver un tel relief de départ sans connaissance *a priori* sur le relief réel...

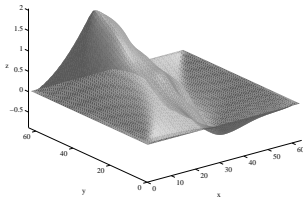


FIG. 6 - Relief calculé par descente de gradient, à partir du relief de la figure 3, pour l'image non bruitée.

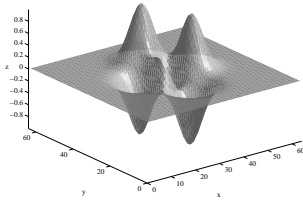


FIG. 7 - Relief de départ similaire au relief réel.

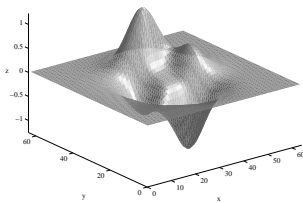


FIG. 8 - Relief calculé par descente de gradient, à partir du relief de la figure 7, pour l'image non bruitée.

5 Conclusion et perspectives

Nous avons montré dans cet article qu'il est possible de résoudre le problème du *shape from shading* par recuit simulé. L'intérêt d'un tel schéma d'optimisation réside dans sa convergence vers l'optimum global, indépendamment des conditions initiales. Des premiers résultats sur des données synthétiques montrent la faisabilité de notre approche.

À plus long terme, le but de cette étude est, entre autres, de traiter des problèmes de reconstruction 3D par radar-clinométrie.

Remerciements

Cette étude est partiellement financée par le GDR ISIS, dans le cadre du programme "Projets jeunes chercheurs".

Références

- [1] J. BESAG. « Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems ». *J. Royal Statist. Soc. (series B)*, 36:192–326, 1974.
- [2] G. R. CROSS et A. K. JAIN. « Markov Random Field texture models ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 5(1):25–39, 1983.
- [3] P. DANIEL. « Peut-on extraire le relief d'une seule image ? ». Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, janvier 2000.
- [4] J.-D. DUROU et D. PIAU. « Ambiguous Shape from Shading with Critical Points ». *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 12(2):99–108, avril 2000.
- [5] M. FALCONE et M. SAGONA. « An Algorithm for the Global Solution of the Shape-from-Shading Model ». Dans *ICIAP'97 (IEEE International Conference on Image Analysis and Processing, Florence, Sept 1997)*, pages 596–603, 1997.
- [6] S. GEMAN et D. GEMAN. « Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6):721–741, 1984.
- [7] B. K. P. HORN. « Obtaining shape from shading information ». *The Psychology of Computer Vision*, 1975.
- [8] B. K. P. HORN. « Height and Gradient from Shading ». *International Journal of Computer Vision*, 5(1):37–75, août 1990.
- [9] K. IKEUCHI et B. K. P. HORN. « Numerical shape from shading and occluding boundaries ». *Artificial Intelligence*, 17:141–194, 1981.
- [10] R. KIMMEL et A. M. BRUCKSTEIN. « Tracking Level Sets by Level Sets: A Method for Solving the Shape from Shading Problem ». *Computer Vision and Image Understanding: CVIU*, 62(1):47–58, juillet 1995.
- [11] P.-L. LIONS, E. ROUY et A. TOURIN. « Shape-from-Shading, viscosity solutions and edges ». *Numerische Mathematik*, 64:323–353, 1993.
- [12] J. OLIENSIS. « Uniqueness in Shape from Shading ». *International Journal of Computer Vision*, 6(2):75–104, 1991.
- [13] R. SZELISKI. « Fast shape from shading ». *Computer Vision, Graphics, and Image Processing. Image Understanding*, 53(2):129–153, mars 1991.
- [14] P. S. TSAI et M. SHAH. « Shape from shading using linear approximation ». *Image and Vision Computing*, 12(8):487–498, 1994.