La classe des distributions temps-fréquence locales: définition et propriétés

David Brie

Centre de Recherche en Automatique de Nancy, CNRS ESA 7039
Université Henri Poincaré, B.P. 239, 54506 Vandœuvre Cedex, France
david.brie@cran.u-nancy.fr

Résumé – Le lissage local de la distribution de Wigner-Ville fournit une approche efficace pour le problème de la réduction des interférences. Cependant, les propriétés de ce type de distributions sont encore mal connues ; l'objectif de cet article est d'explorer ce point. Dans un premier temps, on définit la classe des Distributions Temps-Fréquence Locales (DTFL), puis établit l'expression de la fonction caractéristique en fonction du noyau de lissage. Des exemples de DTFL sont données. Dans un second temps, on étudie certaines propriétés et on donne les condition sur le noyau local pour qu'elles soient satisfaites.

Abstract – The local smoothing of the Wigner distribution provides an efficient approach to the interference reduction problem. But the properties of this class of time frequency distributions are far to be well understood ; this paper aims at investigating this point. First, we give the definition of the class of local time-frequency distribution as well as the expression of the characteristic function in terms of the local kernel. Then, some properties are studied, and the kernel conditions are given.

1 Introduction

Dans le cadre du problème de la réduction d'interférences de la distribution de Wigner-Ville, il est maintenant admis qu'il est nécessaire de quitter la classe de Cohen. En effet, l'utilisation d'un filtre de lissage passe-bas global (au sens où la fonction de lissage est la même quelque soit le point TF considéré) ne fournit une solution efficace à ce problème que pour une classe limitée de signaux. De façon générale, l'utilisation d'un filtre global ne permet pas de gérer efficacement le compromis entre réduction des interférences et résolution TF. Ce constat a motivé le développement d'un ensemble de méthodes que l'on peut schématiquement décomposer en deux grandes familles.

La première consiste à effectuer des post-traitements sur les distributions de la classe de Cohen pour améliorer leur lisibilité. C'est typiquement l'idée sous-jacente de la réallocation des distributions TF développée dans [3].

La seconde consiste à remplacer les noyaux de lissage globaux par des noyaux de lissage locaux adaptés au contenu local du signal. Dit de façon très schématique, un filtre de lissage local doit lisser fortement l'image TF dans les zones d'interférences et très peu dans les zones des composants du signal. Ainsi l'approche [7] propose un noyau de lissage qui évolue avec le temps. Les distributions présentées dans [6] et [2] définissent pour leur part des noyaux de lissage qui évoluent avec le temps et la fréquence. C'est également dans ce cadre que se situent les travaux que nous avons développés [9, 4].

L'objectif de cet article est d'étudier ce type de distributions TF obtenues par lissage local de la distribution de Wigner-Ville. En particulier, en partant du formalisme du lissage local proposé dans [4], on établit l'expression de la fonction caractéristique d'une Distribution TF Locale (DTFL). Quelques DTFL, résultant de l'utilisation de filtres locaux particuliers sont également présentées. On donne ensuite les conditions sur le noyau de lissage local pour que certaines propriétés (covariance en translation, en dilatation, réalité, conservation de l'énergie, distributions marginales) soient satisfaites. En guise de conclusion, les poursuites envisagées à ce travail sont évoquées.

2 La classe des DTFL

2.1 Lissage local de la distribution de Wigner-Ville

Une DTFL résulte du lissage local de la distribution de Wigner-Ville, c'est à dire un filtrage de l'image TF variant en fonction du point temps fréquence. Un noyau de lissage local est donc une fonction quadridimensionnelle $\Phi_s(t', \omega', t, \omega)$, où la notation Φ_s fait apparaître explicitement la possible dépendance du noyau de lissage par rapport au signal analysé $s(t)$. Dans cette notation, l'ordre des variables a également une importance, puisque le premier jeu de variables est relatif à la localisation TF du lissage, tandis que le second est relatif au lissage à proprement dit. L'opération de lissage local s'exprime alors selon :

$$\mathsf{DTFL}(t,\omega) = \iint \Phi_s(t,\omega,t-T,\omega-\Omega)\mathsf{WV}(T,\Omega)dTd\Omega. \quad (1)$$

Malgré une certaine similitude de forme entre la définition des distributions TF locales et celle de la classe de Cohen, la dépendance temporelle et fréquentielle du filtre de lissage interdit d'inclure les distributions TF locales dans la classe de Cohen. Cependant, par analogie, la classe des DTFL peut s'interpréter comme l'extension de la classe de Cohen aux noyaux de lissage dépendant du temps et de la fréquence.

2.2 Fonction caractéristique

La fonction caractéristique des distributions TF locales correspond à la transformée de Fourier inverse de la distribution :

$$M(\theta,\tau) = \underset{\substack{t\to\theta \\ \omega\to\tau}}{\left(\mathcal{F}^{\,2\mathrm{D}}\right)^{-1}} \{\mathsf{DTFL}(t,\omega)\}.$$

En notant $A(\theta,\tau)$, la fonction d'ambiguïté du signal et en définissant :

$$\phi_s(t',\omega',\theta,\tau) = \underset{\substack{t\to\theta \\ \omega\to\tau}}{\left(\mathcal{F}^{\,2\mathrm{D}}\right)^{-1}} \{\Phi_s(t',\omega',t,\omega)\} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} F_s(\theta',\tau',\theta,\tau) &= \left(\mathcal{F}^{\,4\mathrm{D}}\right)^{-1} \{\Phi_s(t',\omega',t,\omega)\} \\ &= \underset{\substack{t'\to\theta' \\ \omega'\to'\tau}}{\left(\mathcal{F}^{\,2\mathrm{D}}\right)^{-1}} \{\phi_s(t',\omega',\theta,\tau)\}, \end{aligned} \tag{3}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} &\mathsf{DTFL}(t,\omega) \\ &= \iint \underset{\substack{\tau\to\omega \\ \theta\to t}}{\mathcal{F}^{\,2\mathrm{D}}}\Big\{\phi_s(t',\omega',\theta,\tau)\cdot A(\theta,\tau)\Big\}\,\delta(t'-t)\,\delta(\omega'-\omega)dt'd\omega' \\ &= \iint \underset{\substack{\tau\to\omega \\ \theta\to t}}{\mathcal{F}^{\,2\mathrm{D}}}\Big\{\phi_s(t',\omega',\theta,\tau)\cdot A(\theta,\tau)\Big\}.\ \underset{\substack{\tau\to\omega \\ \theta\to t}}{\mathcal{F}^{\,2\mathrm{D}}}\Big\{\mathrm{e}^{j(\theta t'+\omega'\tau)}\Big\}dt'd\omega' \\ &= \underset{\substack{\tau\to\omega \\ \theta\to t}}{\mathcal{F}^{\,2\mathrm{D}}}\Big\{\iint \left(\phi_s(t',\omega',\theta,\tau)\cdot A(\theta,\tau)\right) \underset{(\theta,\tau)}{\star} \mathrm{e}^{j(\theta t'+\omega'\tau)}dt'd\omega'\Big\}. \end{aligned}$$

La fonction caractéristique de $\mathsf{LWV}(t,\omega)$ est donc l'argument de la transformée de Fourier bidimensionnelle qui après simplification s'écrit :

$$M(\theta,\tau) = \iint F_s(\theta'+\theta,\tau'+\tau,\theta',\tau')A(\theta',\tau')d\theta'd\tau'. \tag{4}$$

Pour l'étude des propriétés, la forme la plus simple à manipuler est (1) plutôt que (4) car dans l'expression de la fonction caractéristique (4) les variables d'intégration agissent simultanément sur toutes les variables du noyau local. Certaines propriétés ont également été établies sur la forme du noyau de lissage (2).

2.3 Quelques DTFL particulières

La classe de Cohen Le cas d'un lissage global (classe de Cohen) correspond à un filtre du type :

$$\begin{aligned} \Phi_s(t',\omega',t,\omega) &= \Phi(t,\omega) \\ F_s(\theta',\tau',\theta,\tau) &= \delta(\theta')\delta(\tau')F(\theta,\tau). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} M(\theta,\tau) &= \iint \delta(\theta'+\theta)\delta(\tau'+\tau)F(\theta,\tau)A(\theta',\tau')d\theta'd\tau' \\ &= F(\theta,\tau)A(-\theta,-\tau) = F(\theta,\tau)A(\theta,\tau), \end{aligned}$$

qui correspond effectivement à l'expression de la fonction caractéristique d'une distribution TF de la classe de Cohen.

Lissage fréquentiel local en temps Dans le cas où l'on considère un filtre de lissage fréquentiel local en temps[1] $\Phi_s(t',\omega',t,\omega) = \delta(t)\Phi_s(t',\omega)$, on a :

$$F_s(\theta',\tau',\theta,\tau) = \delta(\tau')F_s(\theta',\tau)$$

et par suite :

$$\begin{aligned} M(\theta,\tau) &= \iint \delta(\tau')F_s(\theta',\tau'-\tau)A(\theta'-\theta,\tau'-\tau)d\theta'd\tau' \\ &= \int F_s(\theta,\tau)A(\theta'-\theta,\tau)d\theta' \\ &= F_s(\theta,\tau) \underset{(\theta)}{\star} A(\theta,\tau). \end{aligned}$$

Ce résultat correspond bien au résultat obtenu précédemment par une autre voie [10].

Lissage local en temps Un filtre de lissage local en temps est de la forme $\Phi_s(t',\omega',t,\omega) = \Phi_s(t',t,\omega)$ et dans le domaine transformé

$$F_s(\theta',\tau',\theta,\tau) = \delta(\tau')F_s(\theta',\theta,\tau)$$

et la fonction caractéristique vaut :

$$\begin{aligned} M(\theta,\tau) &= \iint \delta(\tau')F_s(\theta',\theta'-\theta,\tau'-\tau)A(\theta'-\theta,\tau'-\tau)d\theta'd\tau' \\ &= \int F_s(\theta',\theta'-\theta,\tau)A(\theta'-\theta,\tau)d\theta'. \end{aligned}$$

Lissages locaux séparables Dans le cas de filtres locaux séparables de la forme :

$$\Phi_s(t',\omega',t,\omega) = \Phi^T(t',\omega',\omega)\cdot\Phi^F(t',\omega',t),$$

la DTF locale s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathsf{DTFL}(t,\omega) &= \int \Phi^F(t,\omega,t-T)\mathsf{DTFL}^T(T,\omega)dT \\ &= \int \Phi^T(t,\omega,\omega-\Omega)\mathsf{DTFL}^F(t,\Omega)d\Omega \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathsf{DTFL}^T(t,\omega) &= \int \Phi^T(t,\omega,\omega-\Omega)\mathsf{WV}(t,\Omega)d\Omega, \\ \mathsf{DTFL}^F(t,\omega) &= \int \Phi^F(t,\omega,t-T)\mathsf{WV}(T,\omega)dT. \end{aligned}$$

Dans le domaine transfomé, le filtre local s'exprime selon :

$$F_s(\theta',\tau',\theta,\tau) = F^T(\theta',\tau',\theta) \underset{(\theta',\tau')}{\star} F^F(\theta',\tau',\tau) \tag{5}$$

La fonction caractéristique de cette distribution n'a pas de formes simples. Cela révèle en fait l'abus de langage fait en qualifiant un tel filtre de séparable puisque la séparabilité n'est assurée que sur les variables t et ω.

[1] Le problème dual de lissage temporel local en fréquence se traite de la même façon.

3 Propriétés

Chaque membre de la classe des DTFL est caractérisé par son noyau de lissage $\Phi(t', \omega', t, \omega)$. Dans cette partie, on s'intéresse aux conditions à imposer sur les filtres locaux pour que la distribution TF résultante satisfasse certaines propriétés.

3.1 Covariance en translation

Soit le signal défini par : $\tilde{s}(t) = s(t - t_0)e^{j\omega_0 t}$. La condition de covariance en translation s'écrit :

$$\mathsf{DTFL}_{\tilde{s}}(t, \omega) = \mathsf{DTFL}_s(t - t_0, \omega - \omega_0).$$

Compte tenu de l'équation (1), $\mathsf{DTFL}_s(t - t_0, \omega - \omega_0)$ est donnée par :

$$\mathsf{DTFL}_s(t - t_0, \omega - \omega_0) =$$
$$\iint \Phi_s(t - t_0, \omega - \omega_0, t - t_0 - T, \omega - \omega_0 - \Omega)\mathsf{WV}_s(T, \Omega) dT d\Omega$$

qui, en raison de la covariance en translation de la distribution de Wigner-Ville, donne la condition sur le noyau local :

$$\Phi_{\tilde{s}}(t', \omega', t, \omega) = \Phi_s(t' - t_0, \omega' - \omega_0, t, \omega) \quad \forall t_0, \omega_0 \qquad (6)$$

ou de façon équivalente :

$$\phi_{\tilde{s}}(t', \omega', \theta, \tau) = \phi_s(t' - t_0, \omega' - \omega_0, \theta, \tau) \quad \forall t_0, \omega_0. \qquad (7)$$

Ce résultat traduit simplement que le noyau de lissage $\Phi_{\tilde{s}}(t', \omega', t, \omega)$ associé à $\tilde{s}(t)$ correspond à la version translatée du noyau associé à $s(t)$. Pour voir cette condition satisfaite, on peut choisir un noyau qui ne dépende ni de t', ni de ω', ni du signal analysé, auquel cas on revient dans la classe de Cohen. La seule autre possibilité est d'utiliser un noyau local dépendant du signal analysé.

3.2 Covariance en dilatation

La condition de covariance en dilatation est donnée par :

$$\tilde{s}(t) = \sqrt{a}s(at) \quad \longrightarrow \quad \mathsf{DTFL}_{\tilde{s}}(t, \omega) = \mathsf{DTFL}_s\left(at, \frac{\omega}{a}\right).$$

En procédant de façon similaire au cas de la covariance en translation , on obtient la condition sur le noyau :

$$\Phi_{\tilde{s}}(t', \omega', t, \omega) = \Phi_s\left(at', \frac{\omega'}{a}, at, \frac{\omega}{a}\right) \quad \forall a.$$

Les fonctions satisfaisant $f\left(at, \frac{\omega}{a}\right) = f(t, \omega)$ sont de la forme : $f(t, \omega) = f(t \cdot \omega)$ [5], ce qui dans notre cas correspond à :

$$\Phi_s(t', \omega', t, \omega) = \Phi_s(t' \cdot \omega', t \cdot \omega, t' \cdot \omega, t \cdot \omega', \frac{t}{t'}, \frac{\omega}{\omega'}). \qquad (8)$$

qui est la condition de covariance en dilatation. Ce résultat mérite un commentaire. Considérons en effet un filtre séparable de la classe de Cohen, $\Phi(t, \omega) = \Phi^F(t) \cdot \Phi^T(\omega)$, ce type de filtre ne permet pas d'assurer (sauf cas limite $\Phi(t, \omega) = \delta(t) \cdot \delta(\omega)$) la covariance en dilatation. Or, un filtre local séparable de la forme $\Phi_s(t', \omega', t, \omega) = \Phi_s^F(\omega' t) \cdot \Phi_s^T(t' \omega)$ permet lui de conserver cette propriété. Il apparaît donc que les degrés de liberté apportés par les deux dimensions supplémentaires sont à même de lever certains résultats d'exclusion (impossibilité de voir des propriétés satisfaites simultanément) établis dans le cadre de la classe de Cohen. Ce point, que nous n'avons pas étudié plus avant, mériterait d'être approfondi, parce qu'il met en évidence que l'intérêt de la notion de filtre local dépasse le seul cadre de la réduction d'interférence.

3.3 Réalité

Une DTFL est réelle si le noyau local vérifie la condition de symétrie :

$$\phi_s(t', \omega', \theta, \tau) = \phi(t', \omega', -\theta, -\tau). \qquad (9)$$

Cette condition sur le noyau de lissage local peut être imposée facilement par construction.

3.4 Conservation de l'énergie

Compte tenu de la conservation de l'énergie de la distribution de Wigner-Ville et de l'équation (1), la condition pour qu'une DTFL conserve l'énergie du signal peut s'exprimer selon :

$$\iint \mathsf{WV}(t, \omega) dt\, d\omega = \iint \mathsf{DTFL}(t, \omega) dt\, d\omega$$
$$= \iiiint \Phi_s(t, \omega, t - T, \omega - \Omega) dt\, d\omega\, \mathsf{WV}(T, \Omega) dT d\Omega.$$

Une condition suffisante sur le noyau pour avoir la conservation de l'énergie est donnée par :

$$1 = \iint \Phi_s(t, \omega, t - T, \omega - \Omega) dt\, d\omega \qquad \forall T, \Omega. \qquad (10)$$

Cette condition peut toujours être imposée *a posteriori* en effectuant une renormalisation du filtre local.

3.5 Distributions marginales

Compte tenu de la conservation des distributions marginales de la distribution de Wigner-Ville, la condition de conservation de la distribution marginale temporelle est donnée par :

$$\begin{aligned} |s(t)|^2 &= \int \mathsf{WV}(t, \omega) d\omega \\ &= \int \mathsf{DTFL}(t, \omega) d\omega \\ &= \iiint \Phi_s(t, \omega, t - T, \omega - \Omega) d\omega \mathsf{WV}(T, \Omega) dT d\Omega. \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour avoir cette propriété est que le noyau local satisfasse :

$$\int \Phi_s(t, \omega, t - T, \omega - \Omega) d\omega = \delta(t - T) f(t, T, \Omega), \qquad (11)$$

$$\text{avec } f(t, T, \Omega) = 1 \qquad \forall t = T. \qquad (12)$$

De façon duale, une condition suffisante pour avoir la conservation de la distribution marginale fréquentielle est :

$$\int \Phi_s(t, \omega, t-T, \omega-\Omega) dt = \delta(\omega-\Omega) f(\omega, T, \Omega), \quad (13)$$

$$\text{avec } f(\omega, T, \Omega) = 1 \qquad \forall \omega = \Omega. \quad (14)$$

Si on considère le cas de filtres locaux séparables de la forme :

$$\Phi_s(t', \omega', t, \omega) = \Phi^T(t', \omega', \omega) \cdot \Phi^F(t', \omega', t),$$

et si de plus, on impose à $\Phi^T(t', \omega', \omega)$ de satisfaire la condition de distribution marginale temporelle et donc la conservation de l'énergie, alors la condition à imposer à Φ^F est :

$$\int \Phi^F(t, \omega, t-T) dt = 1 \quad \forall T, \omega, \quad (15)$$

ce qui définit une condition de normalisation à appliquer au filtre Φ^F pour que la distribution résultante conserve l'énergie. On peut également obtenir une condition similaire sur Φ^T si on impose que le filtre Φ^F conserve la distribution marginale fréquentielle.

La notion de conservation des distributions marginales temporelle et fréquentielle peut être étendue à la conservation des distributions marginales d'angle α. En effet, considérons la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre α [8, 1] du signal $s(t)$, notée $S_\alpha(u)$. La distribution de Wigner-Ville du signal peut alors s'exprimer selon [1] :

$$\mathsf{WV}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int S_\alpha^* \left(u - \frac{\epsilon}{2}\right) S_\alpha \left(u + \frac{\epsilon}{2}\right) e^{-jv\epsilon} d\epsilon \quad (16)$$

où les axes (u, v) se déduisent de (t, ω) par une rotation d'angle α :

$$\begin{cases} u = t\cos\alpha + \omega\sin\alpha \\ v = -t\sin\alpha + \omega\cos\alpha. \end{cases}$$

La distribution de Wigner-Ville conserve la distribution marginale d'angle α, c'est-à-dire :

$$\int \mathsf{WV}(u, v) dv = |S_\alpha(u)|^2. \quad (17)$$

Dans ce contexte, un filtre local est donc défini comme une fonction quadridimensionnelle $\Phi(u', v', u, v)$ et une condition suffisante pour avoir la conservation de la distribution marginale d'angle α est alors donnée par :

$$\int \Phi(u, v, u-U, v-V) dv = \delta(u-U) f(u, U, V), \quad (18)$$

$$\text{avec } f(u, U, V) = 1 \qquad \forall u = U. \quad (19)$$

On retrouve les conditions de conservation des marginales temporelle et fréquentielle pour des valeurs de α respectivement égales à 0 et $\pi/2$. Un exemple de filtre local assurant la conservation des marginales d'angle α (et par conséquent, la conservation de l'énergie) est donné par :

$$\Phi(u', v', u, v) = \delta(u) \Phi^\alpha(u', v) \quad (20)$$

$$\int \Phi^\alpha(u', v) dv = 1. \quad (21)$$

4 Conclusions

Les poursuites envisagées à ce travail visent en premier lieu à compléter l'étude des propriétés de la classe des distributions TF locales et en particulier la conservation de la fréquence instantanée. Une autre perspective ouverte par ce travail réside dans l'étude des autres intérêts de la notion de lissage local. Cet aspect n'a, pour l'instant, été qu'effleuré dans l'étude de la covariance en dilatation où il a été mis en évidence qu'il existait des filtres locaux séparables permettant d'assurer cette propriété. Cependant, c'est un point qui nous semble tout particulièrement intéressant parce qu'il montre clairement que les intérêts de cette notion de lissage local sorte du seul cadre de la réduction d'interférences.

Références

[1] Almeida, L. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, pp. 3084–3091, 1994.

[2] Arce, G. R. et Hasan, S. R. Elimination of interference terms of the discrete Wigner distribution using nonlinear filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, pp. 2321–2331, 2000.

[3] Auger, F. et Flandrin, P. Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, pp. 1068–1089, 1995.

[4] Brie, D., Oehlmann, H., Vogt, M., et Richard, A. Application of the local smoothed pseudo Wigner-Ville distribution to gear tooth vibration signature analysis. *Applied Signal Processing*, vol. 4, pp. 168–178, 1998.

[5] Cohen, L. *Time-frequency analysis*, Prentice Hall, 1995

[6] Gonçalvès, P. et Payot, E. Adaptive diffusion equation for time-frequency representations. Dans *IEEE Digital Signal Processing Workshop*, Bryce Canyon, USA, 1998.

[7] Jones, D. L. et Baraniuk, R. G. An adaptive optimal-kernel time-frequency representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, pp. 2361–2371, 1995.

[8] Namias, V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. *J. Inst. Math. Appl.*, vol. 25, pp. 241–265, 1980.

[9] Oehlmann, H. et Brie, D. Distribution de Wigner-Ville locale pour la réduction des interférences. Dans *Seizième colloque Gretsi*, Grenoble, 1997.

[10] Oehlmann, H. *Analyse temps-fréquence de signaux vibratoires de boîtes de vitesses* Thèse de doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, 15 juillet 1996.