

Étude statistique de la détection d'exo-planètes en imagerie courte pose

André FERRARI, Claude AIME

UMR 6525 Astrophysique, Université de Nice Sophia-Antipolis
Parc Valrose, 06108 Nice CEDEX 2, France
ferrari@unice.fr, aime@unice.fr

Résumé – Cette communication présente une étude statistique de la technique de détection d'exo-planètes en imagerie courte pose proposée par A. Labeyrie, [6]. Le détecteur originalement proposé était construit de façon empirique. On propose dans cette communication d'aborder le problème en utilisant la théorie de la détection dans le but d'obtenir une décision optimale. La déflexion d'une famille de détecteurs issue du détecteur de Neyman Pearson montre que les deux détecteurs utilisant uniquement les fréquences des événements $\{0\}$ ou $\{0,1\}$ ont des propriétés quasi optimales dans le cas où le nombre d'images traitées, et non le temps de pose, est fixé. Les performances de ces détecteurs sont évaluées par des courbes CORE.

Abstract – This communication presents a statistical study of the dark-speckle technique proposed by A. Labeyrie, [6], for exo-planets detection using short exposure imaging. The original detector was derived empirically. We propose to tackle this problem using detection theory tools in order to achieve optimal detection performances. The deflection of a detectors family arising from the Neyman Pearson detector shows that the tests statistics relying only frequencies of the events $\{0\}$ or $\{0,1\}$ are almost optimal when the number of processed images is fixed. When the total exposure time is fixed this result is no more valid. Finally, the performances of these detectors are evaluated using ROC curves.

1 Introduction

La détection par imagerie directe d'exo-planètes (planètes qui orbitent autour d'une étoile autre que le soleil) pose de nombreux problèmes techniques. Elle nécessite en effet une haute résolution angulaire et surtout une forte dynamique, la luminosité d'une planète étant plusieurs milliards de fois plus faible que celle de l'étoile qui l'illumine. Alors que cette détection est en passe de devenir techniquement possible avec des télescopes spatiaux la diffraction de la lumière par l'atmosphère constitue la difficulté majeure à surmonter dans le cas d'instruments terrestres. Une optique adaptative est à même de compenser une partie importante des effets de cette turbulence atmosphérique en reconcentrant la lumière reçue par l'étoile en un pic central avec une largeur voisine de celle de la tâche d'Airy correspondante et en réduisant ses effets au niveau de la planète à un halo aléatoire (tavelures ou speckles). Une étude détaillée de ce système, [2], a cependant montré que l'obtention d'une image de planète nécessite la réalisation d'un système avec des caractéristiques proches des limites théoriques, associé à une exposition de plusieurs heures.

Afin d'améliorer les performances de cette technique, Labeyrie [6] a proposé en 1995 de prendre en compte les propriétés statistiques de ces tavelures par une méthode de détection directe utilisant une optique adaptative et des temps de pose très courts. Une étude de la densité de probabilité du nombre de photons comptés montre alors une diminution de la fréquence de l'événement 0 dans le cas où une planète est présente. Un détecteur empirique reposant sur une carte des fréquences de 0 (technique dite

des "tavelures obscures") est ainsi proposé dans [6] et analysé de façon plus formelle dans [1].

Cette communication propose d'appliquer à ce problème les outils de la théorie de la détection et en particulier de déterminer un détecteur "quasi"-optimal ainsi que ses performances. La section 2 présente le modèle statistique utilisé pour les données. Dans la section 3 une famille de détecteurs basés sur le détecteur optimal de Neyman Pearson est proposé. La statistique de test étudiée consiste en une combinaison linéaire tronquée des fréquences des nombres de photons comptés sur le même pixel des différentes images traitées. Le nombre de fréquences optimal à utiliser est obtenu à partir de la déflexion du test calculée pour un temps de pose par image optimal. Enfin, la section 4 étudie les performances des deux détecteurs "quasi"-optimaux retenus, par l'intermédiaire de courbes CORE.

2 Modèle

Le temps de pose étant très court, il est nécessaire de tenir compte de la nature quantique de la photodétection. La présentation qui est faite ici correspond à la théorie semi-classique de la détection, [3] : le comptage de photons n'intervient que lors de la photodétection par le capteur.

Si I est l'intensité lumineuse classique (ou fort flux) collectée par un pixel sur l'image et $p(I)$ sa densité de probabilité, le nombre x de photoélectrons détectés sur un pixel avec un rendement quantique α et conditionnellement

à I suit une loi de Poisson et donc :

$$p(x) = \int_{0^-}^{+\infty} p(x|I)p(I)dI \quad (1)$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} \frac{(\alpha I)^x}{x!} \exp(-\alpha I)p(I)dI. \quad (2)$$

La distribution de ‘‘Poisson composée’’ qui en résulte joue un rôle central en optique statistique [3] et en mathématiques actuarielles [4].

Nous ferons dans la suite l’hypothèse classique que l’amplitude complexe de l’onde est circulaire gaussienne de variance M et à valeur moyenne nulle. L’intensité I suit alors une loi exponentielle qui une fois remplacée dans (2) conduit à une distribution géométrique sur un pixel sans planète :

$$p(x) = \frac{(\alpha M)^x}{(1 + \alpha M)^{x+1}}. \quad (3)$$

La présence d’une planète rajoute une intensité lumineuse fixe m : $I_p = I + m$, la densité de probabilité fort flux devenant ainsi $p_p(I) = p(I - m)$. En remplaçant cette expression dans (2) on obtient l’expression suivante de la densité de probabilité pour un pixel contenant une planète :

$$p_p(x) = \frac{(\alpha M)^x}{(1 + \alpha M)^{x+1}} e^{-m} \sum_{q=0}^x \frac{1}{q!} \left(m \frac{1 + \alpha M}{M} \right)^q. \quad (4)$$

On peut remarquer que cette distribution est un cas particulier de la distribution de Delaporte citée dans [4, page 34].

Afin de simplifier les notations on considérera $\alpha = 1$ et on notera $\beta = m/M$ le rapport de flux planète/étoile. La figure 1 représente les probabilités (3) et (4) pour deux valeurs de M et de β . L’écart entre les deux densités se situe essentiellement pour des valeurs faibles de x . En effet d’après (3,4) :

$$p(0) = \frac{1}{1 + M}, \quad p_p(0) = \frac{\exp(-m)}{1 + M}, \quad (5)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_p(x)}{p(x)} = \exp(\beta) \approx 1, \quad (6)$$

pour les valeurs de β considérées ici. On vérifie également sur ces figures que pour M fixé les deux densités sont d’autant plus ‘‘séparées’’ autour de 0 que le rapport de flux β est grand.

Le fait que l’écart majeur entre $p_p(x)$ et $p(x)$ se situe en $x = 0$ justifie la technique développée dans [6]. Or d’après la figure 1 il apparaît clairement que si ce raisonnement peut conduire à une détection quasi optimale pour des valeurs faibles de M c’est à dire pour une bonne correction des effets de la turbulence, ceci n’est plus vrai pour des valeurs de M plus grandes.

3 Étude du détecteur

On considère que l’on dispose de N images et on note $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, les valeurs du pixel que l’on souhaite

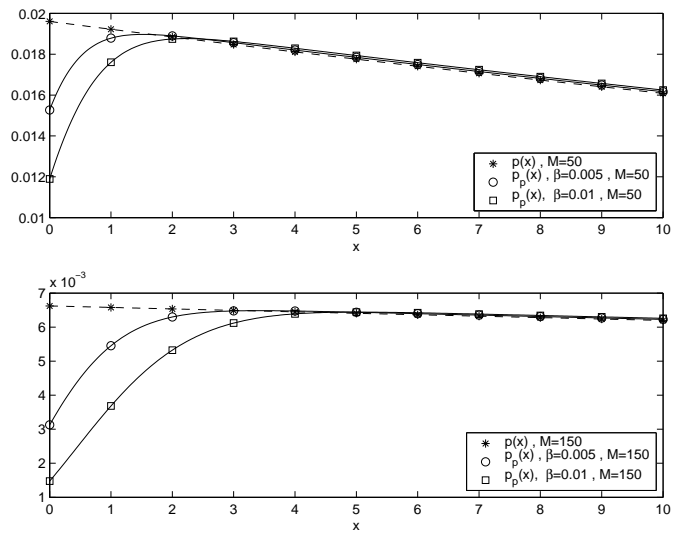


FIG. 1 – Probabilité en présence de planète : $p_p(x)$ (*) et en l’absence de planète $p(x)$ (\square, \circ).

tester. Le problème est donc de tester les deux hypothèses :

$$\mathcal{H}_1 \text{ (présence d’une planète) : } X \sim \prod_{n=1}^N p_p(x_n),$$

$$\mathcal{H}_0 \text{ (absence de planète) : } X \sim \prod_{n=1}^N p(x_n)$$

On se propose de considérer dans un premier temps le détecteur optimal de Neyman Pearson [7], qui consiste à tester le rapport des vraisemblances de X sous les deux hypothèses par rapport à un seuil. On considérera dans la suite le logarithme de ce rapport afin de faire intervenir la fréquence de chaque événementement de façon linéaire dans la statistique de test correspondante, notée T :

$$T = \sum_{n=1}^N \log \left(\frac{p_p(x_n)}{p(x_n)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k \log \left(\frac{p_p(x_n)}{p(x_n)} \right), \quad (7)$$

où N_k désigne le nombre de fois où k photons ont été mesurés sur le même pixel des N images. Compte tenu des remarques faites dans la section précédente, les cas où un nombre élevé de photons ont été comptés ne contribueront pas de façon significative aux performances du détecteur. En conséquence on considérera dans la suite le détecteur défini par :

$$T_L = \sum_{k=0}^L \alpha_{k,m,M} N_k \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} \eta \quad (8)$$

avec :

$$\alpha_{k,m,M} = m - \log \left(\sum_{q=0}^k \frac{1}{q!} \left(m \frac{1 + \alpha M}{M} \right)^q \right),$$

où le seuil η déterminera les probabilités de détection et de fausse alarme. Avec ces notations, la technique des valeurs obscures correspond à l’utilisation de la statistique de test $T_0 = (m - 1)N_0$.

L’étude des probabilités de détection et de fausse alarme nécessite la distribution conjointe des N_k sous les deux hypothèses. Ces variables aléatoires suivent une distribution

multinomiale de ‘‘probabilité de cellule’’ $p(k)$ ou $p_p(k)$ et d’indice N [5] :

$$p(N_0, \dots, N_L | H_0) = N! \frac{p_*^{N_*}}{N_*!} \prod_{k=0}^L \frac{p(k)^{N_k}}{N_k!}, \quad (9)$$

$$p(N_0, \dots, N_L | H_1) = N! \frac{p_{p,*}^{N_{p,*}}}{N_{p,*}!} \prod_{k=0}^L \frac{p_p(k)^{N_k}}{N_k!}, \quad (10)$$

où $N_* = N - \sum_{k=0}^L N_k$, $p_* = 1 - \sum_{k=0}^L p(k)$ et $p_{p,*} = 1 - \sum_{k=0}^L p_p(k)$. La distribution de T_L pour un L quelconque est donc délicate à obtenir. On propose donc dans un premier temps d’étudier le test à partir du coefficient de déflexion :

$$d_L^2 = \frac{(E(T; \mathcal{H}_1) - E(T; \mathcal{H}_0))^2}{\text{var}(T; \mathcal{H}_0)}. \quad (11)$$

En utilisant les expressions des moyennes et covariances d’une distribution multinomiale on obtient :

$$d_L^2 = N \frac{(\sum_{k=0}^L (p_p(k) - p(k)) \alpha_{k,m,M})^2}{\xi}, \quad (12)$$

avec :

$$\begin{aligned} \xi = & \sum_{k=0}^L p(k)(1-p(k)) \alpha_{k,m,M}^2 \\ & - \sum_{k,q=0, k \neq q}^L p(k)p(q) \alpha_{k,m,M} \alpha_{q,m,M}. \end{aligned}$$

Dans le cas $L = 0$ l’expression de la déflexion devient :

$$d_0 = \sqrt{\frac{N}{M}} (1 - \exp(-\beta M)), \quad (13)$$

qui au rapport $(M+1)/M$ près est identique au rapport signal sur bruit défini dans [6, 1].

L’objectif étant pour un rapport de flux planète/étoile donné d’analyser l’effet de L sur le test, il est nécessaire de déterminer dans un premier temps la valeur de M qui maximise d_L^2 . Cette valeur, notée M^* , donne le nombre optimal de photons sur un pixel. Deux approches sont envisageables afin de résoudre ce problème suivant que l’on considère comme fixé le temps de pose total ou le nombre d’images. Dans le second cas, il est en effet nécessaire de considérer que le nombre total moyen de photoélectrons collectés $T = MN$ est fixé et remplacer N par T/M avant la maximisation de d_L^2 .

Divers tracés de d_L^2 en fonction de M ont été réalisés dans les deux cas précédents. Ils ont mis en évidence, comme le montre la figure 2, un comportement commun :

- pour un nombre d’images fixé d_L^2 possède un maximum unique,
- pour un temps de pose fixé le maximum de d_L^2 est obtenu quand M tend vers 0 et donc pour un nombre d’images infinis.

Ce dernier résultat est en désaccord avec les résultats obtenus dans [1]. On peut cependant tenter de donner une explication intuitive à ce résultat par le fait que, comme il a été noté dans la section précédente, plus M diminue plus la fréquence des 0 aura un rôle déterminant dans le test. Dans la mesure où on peut donc augmenter indéfiniment

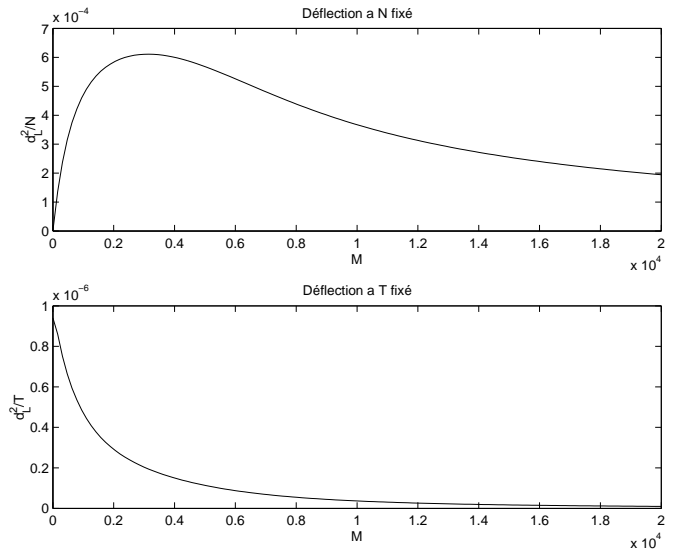


FIG. 2 – Déflexion en fonction de M ($\beta = 10^{-3}$, $L = 3$).

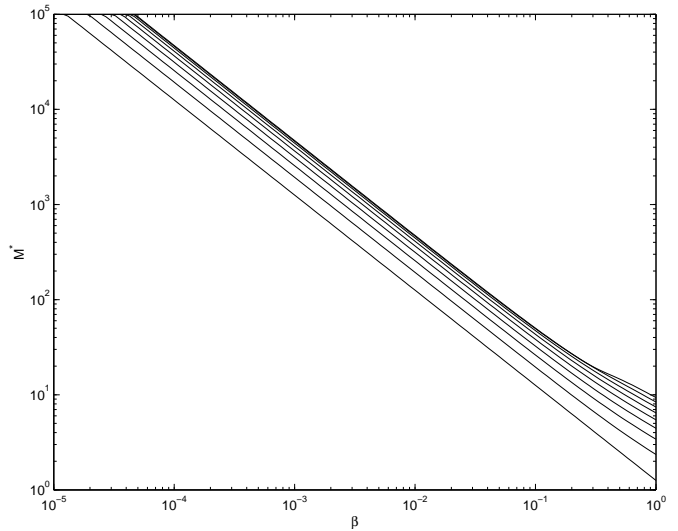


FIG. 3 – M^* en fonction de β pour $L = 0 \dots 8$.

N il peut se révéler avantageux de faire tendre M vers 0, le gain obtenu en comptant plus d’un photoélectron par pose devenant très faible dans ce cas.

Nous limiterons donc la suite de cette étude au cas où N est fixé. La valeur de M^* obtenue par maximisation numérique de d_L est tracé dans la figure 3 en fonction de β et pour $0 \leq L \leq 8$. Quand L augmente jusqu’à atteindre une valeur limite. Notons que la valeur numérique de M^* obtenue pour $L = 0$ correspond bien à la valeur proposée dans [1], c.a.d. $M^* \approx 1/\beta$.

La figure 4 donne la déflexion optimale obtenue en prenant $M = M^*$. Bien que l’augmentation de L augmente la déflexion, cet augmentation n’est plus significative au delà de $L = 1$. Il est donc légitime de n’envisager comme statistiques de test que T_0 et T_1 et de considérer que leurs performances seront voisines de celle du détecteur de Neyman Pearson.

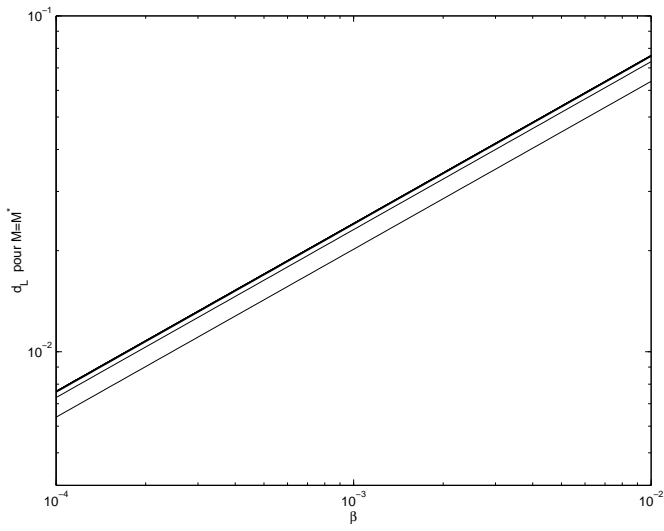


FIG. 4 – d_L pour $M = M^*$ en fonction de β ($L = 0 \dots 8$).

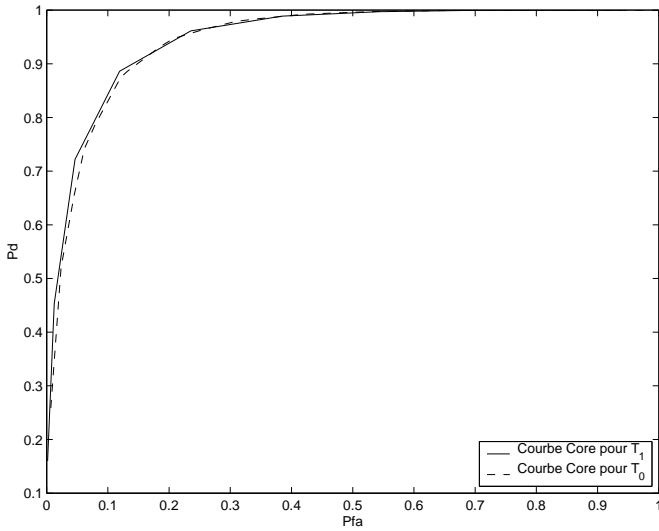


FIG. 5 – Courbe CORE pour $\beta = 10^{-3}$ et $T = 10^7$.

4 Performance des détecteurs

Les performances des deux détecteurs retenus dans la section précédente ont été évaluées par l’intermédiaire de courbes CORE. Il est bon de souligner que l’obtention de ces courbes par une méthode de Monte Carlo est très délicate dans le cas présent. Elle nécessite en effet la génération d’un grand nombre de données vérifiant des lois non standard. Il est cependant facile de générer directement ces courbes à partir de l’expression de la statistique de test T_L et des densités conjointes (9,10) en sommant ces dernières sur les supports adéquats.

Ces courbes sont facilement calculées dans le cas $L = 0$ et $L = 1$. La figure 5 donne le résultat dans le cas $\beta = 10^{-3}$. Pour les deux détecteurs $M = M^*$ et le nombre total moyen de photons est de $T = MN = 10^7$. On peut donc considérer que dans cette configuration l’utilisation de T_0 , et donc la méthode [6], présente des performances optimales.

5 Conclusion

Cette communication propose une étude statistique de la technique de détection d’exo-planètes en imagerie courte pose proposée par A. Labeyrie, [6]. Cette technique repose sur le nombre de fois où 0 photons sont collectés sur le même pixel des différentes images traitées. La statistique de test envisagée dans cette communication généralise ce détecteur en utilisant une combinaison linéaire des fréquences des nombres de photons comptés.

Dans le cas où l’on considère que le temps de pose total est fixé, il apparaît qu’il convient de traiter le plus grand nombre possible d’images et donc de réduire au minimum le temps de pose par image. Par contre si le nombre total d’images est fixé, une valeur optimale du nombre moyen de photons collectés par image est obtenu. Pour cette valeur le détecteur optimal est pratiquement atteint en utilisant uniquement les fréquences des événements {0 photons} ou {0 photons, 1 photon}. Le tracé analytique des courbes CORE de ces deux détecteurs montre que la méthode [6], présente des performances “quasi”-optimales.

Références

- [1] C. Aime. Analysis of the technique of dark speckles for detection of exo-planets. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, pages 411–421, 2000.
- [2] J. R. P. Angel. Grounded-based imaging of extrasolar planets using adaptive optics. *Nature*, (368) : 203–207, 1994.
- [3] J. Goodman. *Statistical Optics*. Wiley interscience, 1985.
- [4] J. Grandell. *Mixed Poisson Processes*. Chapman & Hall, 1997.
- [5] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. *Discrete Multivariate Distributions*. Wiley, 1997.
- [6] A. Labeyrie. Images of exo-planets obtainable from dark speckles in adaptive telescopes. *Astronomy and Astrophysics*, (298) : 544–548, 1995.
- [7] H. Poor. *An Introduction to Signal Detection and Estimation*. Springer, 1994.