

# Analyse de champs browniens fractionnaires anisotropes

Rachid JENNANE<sup>1</sup>, Rachid HARBA<sup>1</sup>, Emmanuel PERRIN<sup>1</sup>, Aline BONAMI<sup>2</sup>, Anne ESTRADE<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LESI-ESPEO, Université d'Orléans  
BP 6744, 45067 Orléans Cedex 2, France  
prénom.nom@univ-orleans.fr

<sup>2</sup>MAPMO, Université d'Orléans  
BP 6759, 45067 Orléans Cedex 2, France  
prénom.nom@univ-orleans.fr

**Résumé** - Cette communication présente la Méthode des Moyennes Directionnelles (MMD) pour analyser un Champ Brownien Fractionnaire Anisotrope (CBFA) défini dans le domaine spectral par un paramètre de Hurst  $H(\theta)$  variable suivant la direction  $\theta$ . Pour une direction  $\varphi$  donnée sur l'image, on calcule la moyenne de lignes dans cette direction ainsi que la régularité  $R(\varphi)$  du signal résultant. Nous montrons que pour  $\theta = \varphi + \pi/2$ , la fonction  $H(\theta)$  vaut  $R(\varphi) - 1/2$  et peut-être ainsi estimée. Nous avons testé cette méthode sur des images type fractales isotropes et sur des CBFA synthétisés par la méthode de Fourier inverse. Les résultats apparaissent tout à fait corrects malgré les difficultés de synthèse précise de CBFA, de l'analyse de signaux dont l'exposant de Hölder dépasse 1, et de la discrétisation des images. Ces travaux ouvrent des perspectives intéressantes concernant le calcul possible des paramètres d'une structure fractale poreuse 3D connue par sa projection comme c'est le cas pour une radiographie.

**Abstract** – In this communication, we present the Directional Averages Method (DAM) to analyse Anisotropic Fractional Brownian Fields (AFBF) defined in the spectral domain by a Hurst parameter  $H(\theta)$  depending on the direction  $\theta$ . For a given direction  $\varphi$  on the image, the average is formed in that direction and the regularity  $R(\varphi)$  is estimated. We show that for  $\theta = \varphi + \pi/2$ , the function  $H(\theta)$  is equal to  $R(\varphi) - 1/2$  and can be thus recovered. We have tested DAM on isotropic fractal images as well as on AFBF generated by the inverse Fourier method. Results are fair even if difficulties arise linked to the synthesis of true AFBF, to the analysis of signals which Hölder exponent is greater than one, and to the digitisation of images. Interesting perspectives can be developed concerning the analysis of fractal porous volumes only known from a 2D projection as it is the case for radiographs.

## 1. Introduction

L'analyse fractale de signaux et d'images trouve de plus en plus d'applications concrètes car elle permet de caractériser des phénomènes en  $1/f$ , l'invariance à travers les échelles ou des phénomènes à longue dépendance. Le modèle du mouvement brownien fractionnaire de paramètre  $H$  est souvent utilisé dans ces cas-là [1]. Concernant les images, le paramètre  $H$  ( $0 < H < 1$ ) contrôle alors la rugosité de la texture : plus  $H$  est proche de 0, plus l'image est rugueuse et plus  $H$  est proche de 1, plus l'image est lisse [2].

Il est souvent important de tenir compte de l'anisotropie des images, c'est à dire de la variation du paramètre  $H$  en fonction de l'angle d'analyse. C'est le cas par exemple lors d'une analyse de clichés radiographiques de tissus osseux où l'anisotropie peut être porteuse d'informations [3]. Pour cette application, l'image 2D est alors une projection de la structure 3D qui conditionne en grande partie la résistance mécanique globale de l'os. Une variation d'anisotropie peut révéler les modifications de la structure 3D.

Une évaluation naturelle de l'anisotropie consisterait à mesurer le paramètre  $H$  de lignes parallèles extraites d'une image et de répéter cette analyse pour un nombre fini de directions. Or, cette évaluation naturelle se heurte à des difficultés majeures. Nous proposons ici une nouvelle méthode permettant une mesure de l'anisotropie.

Après quelques définitions, nous décrirons brièvement cette méthode et montrerons des résultats sur des données synthétiques.

## 2. Définition du CBFA

Avant de parler du CBFA, il convient de définir le mouvement brownien fractionnaire  $D$ -dimensionnel isotrope (mbf- $D$ ). Ce processus de paramètre  $H$  tel que  $0 < H < 1$  noté  $B_H = \{B_H(t); t \in \mathbb{R}^D\}$  peut être représenté à l'aide de son intégrale stochastique spectrale [4] :

$$B_H(t) = \int_{\mathbb{R}^D} \frac{e^{it \cdot \xi} - 1}{|\xi|^{H+D/2}} dB^D(\xi) \quad (1)$$

où

- $B^D = \{B(\xi); \xi \in \mathbb{R}^D\}$  est le champ brownien  $D$ -dimensionnel de Lévy qui dépend de la fréquence  $\xi$ ,
- $t \cdot \xi$  représente le produit scalaire entre les vecteurs  $t$  et  $\xi$ ,
- et  $|\xi|$  est la norme euclidienne du vecteur  $\xi$ .

$B_H(t)$  est un processus gaussien, centré, auto-similaire et isotrope dont les incréments sont stationnaires. Par abus de langage, nous appelons densité spectrale le terme  $1/|\xi|^{(H+D/2)}$  dans l'équation précédente.

Pour définir un CBFA, il suffit de modifier convenablement la densité spectrale et plusieurs solutions sont envisageables dans le cas bidimensionnel où  $\xi = (u, v)$  [5]. Parmi celles-ci, la plus simple consiste à remplacer la constante  $H$  par une fonction de l'angle  $\theta = \arctg(v/u)$ ,  $\pi$ -périodique, qui prend ses valeurs dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Un tel CBFA peut alors s'écrire de la manière suivante pour  $t \in \mathbb{R}^2$  :

$$B_H(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{it \cdot \xi} - 1}{|\xi|^{H(\theta)+1}} dB^2(\xi) \quad (2)$$

La figure 1 montre quelques réalisations de taille 512x512 de mbf-2 de paramètre H et de CBFA pour  $H(\theta)=H_0 + H_1 \cos(2\theta)$ .

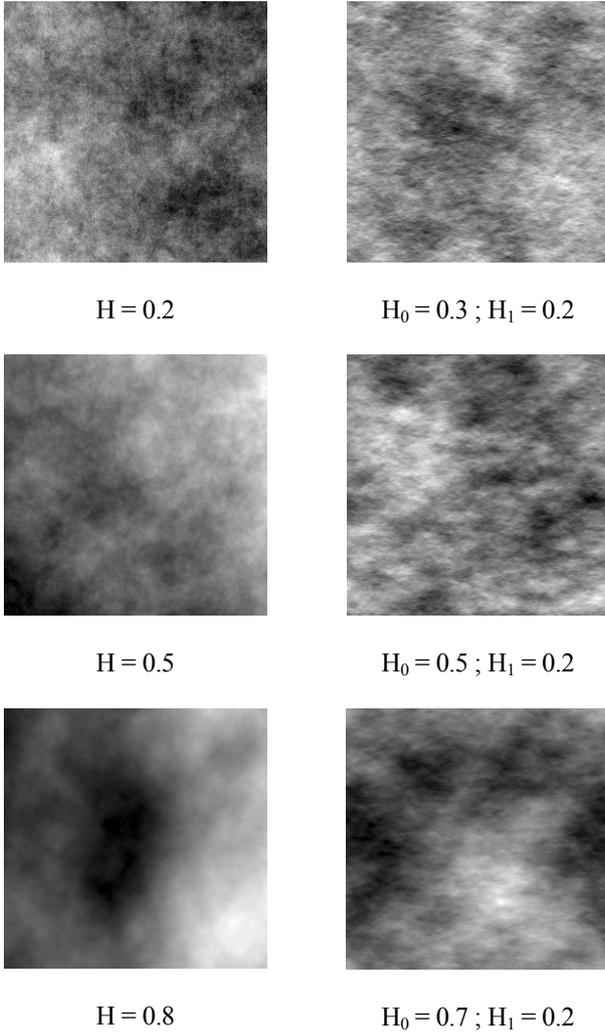


FIG. 1 : Plusieurs réalisations de mbf-2 pour différentes valeurs de H (colonne de gauche) et de CBFA pour différentes valeurs de  $H_0$  et  $H_1$  (colonne de droite).

On remarque que plus H augmente, plus les images de gauche deviennent lisses pour le mbf-2. La même constatation peut être faite pour les images de droite type CBFA relativement au paramètre  $H_0$  et que ces dernières sont bien anisotropes.

### 3. Analyse de l'anisotropie d'un CBFA

Pour analyser un CBFA, c'est à dire retrouver  $H(\theta)$ , une première idée naturelle est de mesurer la régularité  $R(\varphi)$  d'une réalisation dans plusieurs directions  $\varphi$ . Mais Davies *et al.* ont montré que la régularité d'un champ à accroissements stationnaires est identique dans toutes les directions sauf éventuellement une [6]. En effet, la stationnarité des accroissements du champ permet d'affirmer que le signal présente la même régularité le long de chaque ligne d'une même direction fixée. En décomposant suivant deux directions arbitraires  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , les trajectoires extraites dans la direction  $\varphi$  sont au moins aussi régulières que la moins régulière des deux portions. Autrement dit, on a  $R(\varphi) \geq \min(R(\varphi_1), R(\varphi_2))$ .

Il est alors facile de se convaincre que la fonction  $R(\varphi)$  qui vérifie l'inégalité ci-dessus quels que soient  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , doit être constante sauf éventuellement dans une direction privilégiée  $\varphi_0$  où elle prend une valeur strictement supérieure.

Ainsi une tentative d'évaluation de l'anisotropie par mesures successives de la régularité dans différentes directions, en extrayant des lignes parallèles d'un champ à accroissements stationnaires, est vouée à l'échec : la probabilité de trouver la direction particulière  $\varphi_0$  est nulle.

Une autre approche possible consiste à retrouver cette anisotropie dans le domaine spectral [7]. Mais on se heurte alors à des difficultés pratiques. En premier lieu, le calcul de la transformée de Fourier pour de telles images non stationnaires est délicat ainsi que l'estimation de  $H(\theta)$  à partir du spectre 2D calculé. De plus, la complexité de la méthode est en  $O(N^2 \log N)$  pour une image de taille  $N \times N$ .

La méthode que nous proposons permet de mettre en évidence l'anisotropie fractale et est relativement simple à mettre en place. Enfin, elle nécessite très peu de puissance de calcul.

### 4. Méthode des moyennes directionnelles

La Méthode des Moyennes Directionnelles (MMD) consiste à extraire des lignes parallèles d'un CBFA. Pour chaque ligne, on calcule sa moyenne. On obtient ainsi un nouveau signal dont l'exposant critique de Hölder est égal à l'exposant, dans la direction orthogonale, de la densité spectrale du CBFA augmentée de 1/2 (la démonstration de ce résultat dans le cas général peut être trouvée dans [5]). En effet, le fait de sommer le long de lignes rajoute de la régularité au processus intégré. On peut remarquer le parallèle entre cette approche et le théorème des projections qui permet, par exemple, la reconstruction en tomodensitométrie X.

Dans le cas particulier où H est une fonction de  $\theta$  on peut facilement démontrer ce résultat. Les moyennes réalisées le long de toutes les lignes de direction  $\varphi$  d'un CBFA, dans une fenêtre d'observation  $\psi$  de moyenne 1 et de carré intégrable, constituent un processus gaussien  $\{Y_{H,\varphi}(s); s \in \mathbb{R}\}$  de représentation spectrale :

$$Y_{H,\varphi}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{is\xi} - 1) g_{H,\varphi}(\xi) dB^1(\xi) \quad (3)$$

où  $B^1 = \{B(\xi); \xi \in \mathbb{R}\}$  est un brownien à une dimension. La densité spectrale  $g_{H,\varphi}$  vérifie

$$g_{H,\varphi}^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(u)|^2}{(u^2 + \xi^2)^{H(\varphi + \arctg \frac{\xi}{u}) + 1}} du \quad (4)$$

soit encore

$$g_{H,\varphi}^2(\xi) = \frac{1}{|\xi|^{2H(\varphi + \pi/2) + 2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\xi|^{2H(\varphi + \pi/2) - 2H(\varphi + \arctg \frac{\xi}{u})} |\hat{\psi}(u)|^2}{(1 + (\frac{u}{\xi})^2)^{H(\varphi + \arctg \frac{\xi}{u}) + 1}} du. \quad (5)$$

où  $\hat{\psi}$  est la transformée de Fourier de  $\psi$ . Si H possède une régularité Höldérienne, la densité spectrale  $g_{H,\varphi}$  est équivalente pour les hautes fréquences à :

$$\frac{C_\psi}{|\zeta|^{H(\varphi+\pi/2)+1}} \text{ où } C_\psi = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(u)|^2 du}. \quad (6)$$

Le processus des moyennes  $Y_{H,\varphi}$  se comporte pour les hautes fréquences comme un mbf unidimensionnel d'indice  $H(\varphi+\pi/2)+1/2$  (voir [8] pour la définition d'un mbf d'indice  $H$  supérieur à 1).

On peut noter que la théorie générale des processus gaussiens [9] permet de montrer que le paramètre d'autosimilarité  $H(\varphi+\pi/2)+1/2$  est aussi l'exposant de Hölder critique des réalisations de  $Y_{H,\varphi}$ .

Pour analyser une image modélisée par un CFBA, il suffit alors d'effectuer les moyennes le long des lignes pour une direction  $\varphi$  donnée et d'estimer le paramètre d'auto similarité  $\bar{H}(\varphi)$  du processus ainsi fabriqué. En répétant cette procédure dans plusieurs directions, et pour  $\theta = \varphi + \pi/2$ , on retrouve la fonction d'anisotropie de définition du CBFA  $H(\theta) = \bar{H}(\varphi) - 1/2$ .

Maintenant que la méthode MMD est décrite, il convient de la tester sur des images isotropes dans un premier temps, puis anisotropes ensuite.

## 5. Résultats sur des images isotropes

Les méthodes qui permettent de synthétiser un mbf-2 isotrope sont peu nombreuses [10]. Dans ces travaux, on note principalement celles dites du déplacement du point milieu et la synthèse par transformée de Fourier rapide inverse. Ces deux méthodes sont peu précises. Depuis ces travaux assez anciens, deux nouvelles méthodes de synthèse 2D ont été proposées : celle basée sur la méthode de Cholesky [11] et celle basée sur les incréments seconds du processus, dite Fourier incrémental [12]. Pour la première méthode citée, la complexité est en  $O(N^4)$  et la taille mémoire est en  $O(N^4)$  si bien qu'il est difficile de synthétiser des images de taille supérieure à quelques dizaines de pixels de côté avec les calculateurs usuels. Par contre, la méthode Fourier incrémental est précise, sans être toutefois théoriquement exacte, et relativement facile à mettre en œuvre. C'est cette technique que nous retenons.

Lorsque la valeur du paramètre  $H$  des images est inférieure à 0.5, l'exposant de Hölder du signal moyenné  $\bar{H}(\varphi)$  dans une direction donnée est inférieur à 1. Pour la mesure de  $\bar{H}$ , nous avons utilisé l'approximation du maximum de vraisemblance par Whittle [13]. Brièvement, cette méthode consiste à calculer les incréments du signal qui sont stationnaires. On ajuste alors la densité spectrale de puissance théorique à celle des données. Mais, lorsque, la valeur du paramètre  $H$  des images est supérieure à 0.5, l'exposant de Hölder du signal moyenné dans une direction donnée  $\bar{H}(\varphi)$  dépasse la valeur butée 1. On estime alors le paramètre d'autosimilarité à l'aide des incréments seconds [8].

Nous avons appliqué MMD sur différentes images de taille 512x512 type Fourier incrémental. Afin de réduire les approximations induites par la lecture orientée nous n'avons retenu que 4 directions où les pixels sont alignés aux angles  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $135^\circ$ . Pour atténuer l'effet des fluctuations statistiques, la valeur prise comme estimation de  $H$  est la

moyenne de 50 mesures obtenues à partir d'images indépendantes. Ces valeurs sont ensuite reportées sur un diagramme polaire mettant en évidence les variations angulaires caractéristiques de la texture.

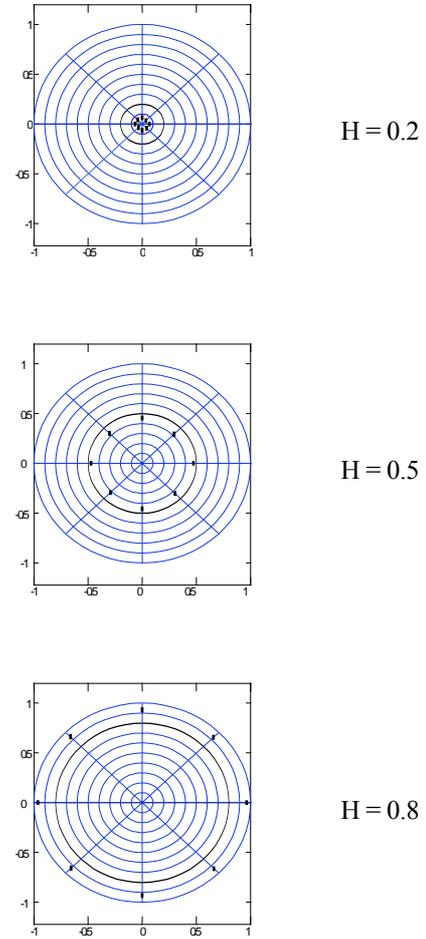


FIG. 2 : MMD appliquée sur des mbf-2 isotropes. En gras, les cercles théoriques et les 8 points de mesure. Les cercles des graduations sont espacés de 0.1.

On remarque que les valeurs mesurées sont proches de celles espérées pour  $H=0.5$ , sous estimées pour  $H=0.2$  et sur estimées pour  $H = 0.8$ .

## 6. Résultats sur des images anisotropes

La méthode Fourier incrémental ne permet pas, à notre connaissance, de synthétiser des CBFA tels que nous les avons définis. Nous avons donc du retenir la synthèse par Fourier inverse qui permet de générer des réalisations de CBFA, notées  $X$ , de taille  $N \times N$  comme :

$$X[x,y] = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{kl} e^{2\pi i \left( \frac{kx}{N} + \frac{ly}{N} \right)}. \quad (7)$$

Les coefficients  $a_{kl}$  sont gaussiens centrés et de variance :

$$E\left(|a_{kl}|^2\right) = (k^2 + l^2)^{-H(\theta)-1}. \quad (8)$$

Comme on désire que la fonction  $X$  soit aussi réelle, il faut que les coefficients obéissent à la symétrie hermitienne.

L'un des problèmes de cette méthode est qu'elle utilise l'algorithme FFT et ainsi l'image est doublement périodique. Les résultats présentés figure 3 sont de bonne qualité lorsque les valeurs de  $H$  sont inférieures à 0.5, c'est à dire lorsque le paramètre  $\bar{H}$  du processus moyenné est inférieur à 1. Pour des valeurs supérieures, on note des valeurs généralement surestimées.

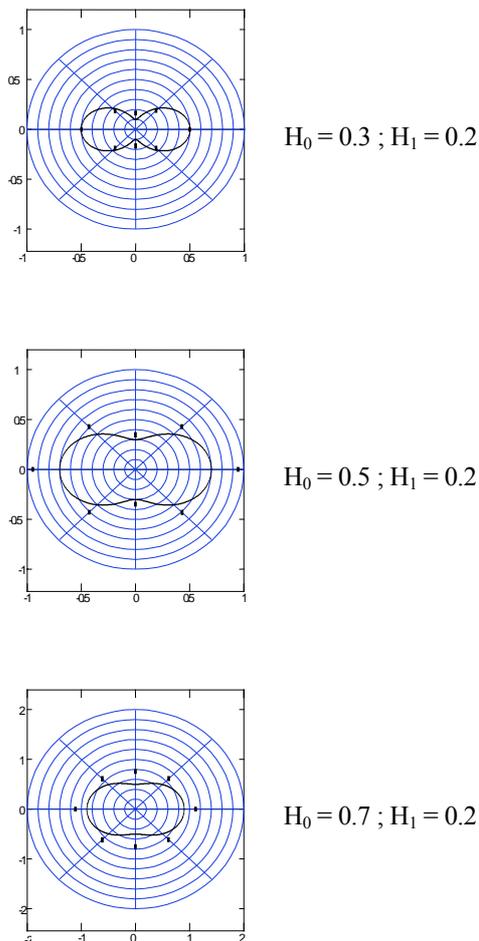


FIG. 3 : MMD appliquée sur des CBFA. En gras les formes théoriques et les 8 points de mesure. Les cercles des graduations sont espacés de 0.1 sauf pour le diagramme du bas où cette valeur vaut 0.2.

## 7. Conclusion

Dans l'étude préliminaire présentée ici, on voit apparaître à la fois les difficultés de synthèse précise de CBFA, d'analyse de signaux dont l'exposant de Hölder dépasse 1, et de problèmes liés à la discrétisation des images. Ces questions sont encore largement ouvertes. Malgré cela, les résultats apparaissent tout à fait corrects.

Ces travaux peuvent conduire à d'intéressantes extensions. C'est le cas lorsque l'on désire décrire la porosité d'un milieu tridimensionnel connu au travers d'une de ses projections 2D, comme une radiographie par exemple. On peut, dans cet esprit,

proposer un modèle 3D analogue au modèle considéré en 2D où cette fois-ci  $B_H(t)$  représente la densité de matière en un point  $t$  de l'espace. Le procédé de radiographie correspond donc à une moyenne dans la direction des rayons  $X$ . Le même raisonnement qu'en deux variables permet de montrer qu'asymptotiquement, en hautes fréquences, le processus obtenu après cette intégration est du type étudié en deux dimensions. Là encore, le paramètre  $H$  augmentera de 1/2 pour la projection. Cette propriété, relative au procédé de moyenne suivant une direction, justifie son utilisation pour modéliser des radiographies de milieux poreux tels que les os. Elle justifie également les analyses ayant des comportements différents en basses et hautes fréquences comme celles qui ont été proposées dans [14]. Une étude, avec justification des résultats annoncés ici, est en cours.

## Références

- [1] B. B. Mandelbrot, J. W. Van Ness. *Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications*. SIAM, Vol. 10, N° 4, pp. 422-438, 1968.
- [2] A. P. Pentland. *Fractal-Based Description of Naturel Scenes*. IEEE transactions On Pattern analysis and Machine Intelligence, N° 6, pp. 661-674, Nov.1984.
- [3] R. Harba, R. Jennane, G. Jacquet, L. Benhamou. *Bone Texture Radiograph Characterisation by Fractal Analysis*. ITBM, Vol 20, N° 4, pp. 207-219, 1999.
- [4] S. Reed, P. C. Lee, T. K. Truong. *Spectral Representation of Fractional Brownian Motion in  $n$  Dimensions and its Properties*. IEEE Trans. on Inf. Theory, Vol. 41, N° 5, PP. 1439-1451, 1995.
- [5] A. Bonami, A. Estrade. *Anisotropic Analysis of Regularity in A Two-Dimensional Gaussian Model*. Note interne, Université d'Orléans, MAPMO, 2001.
- [6] S. Davies, P. Hall. *Fractal Analysis of Surface Roughness by Using Spatial Data*. J. R. Stat. Soc., Vol. 61, Part 1, pp. 3-37, 1999.
- [7] T. Loussot, R. Harba, G. Jacquet, C. L. Benhamou, E. Lespessailles A. Jullien. *An Oriented Fractal Analysis for the Characterisation of Texture. Application to bone Radiographs*. EUSIPCO 96, pp. 371-374, 1996.
- [8] E. Perrin, R. Harba, C. Berzin-Joseph, I Iribarren, A. Bonami.  *$n$ th-order fractional Brownian motion and fractional Gaussian noises*. IEEE transaction on Signal Processing, Vol. 45, N° 5, pp. 1049-1059, mai 2001.
- [9] R. Adler, *The Geometry of Random Fields*. Ed. John Wiley and Sons, 1981.
- [10] M. F. Barnsley, R. L. Devaney, B. B. Mandelbrot, H. O. Peitgen, D. Saupe, R. F. Voss. *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, 1988.
- [11] S. Höfer, H. Hannachi, M. Pandit, R. Kumaresan. *Isotropic two-dimensional fractional Brownian motion and its application in ultrasonic analysis*. IEEE EMBS-92, pp. 1267-1269, 1992.
- [12] L. M. Kaplan, C. C. J. Kuo. *An Improved Method for 2-D Self-Similar Image Synthesis*. IEEE Trans. on Image Processing, Vol. 5, N° 5, pp. 754-761, 1996.
- [13] J. Beran. *Statistics for Long-Memory Processes*. Monographs on Statistics and Applied Probability 61, Chapman & Hall, 1994.
- [14] R. Harba, G. Jacquet, R. Jennane, T. Loussot, C. L. Benhamou, E. Lespessailles, D. Tourlière. *Determination of Fractal Scales on Trabecular Bone X-Ray Images*. Fractals, Vol. 2, N° 3, pp. 451-456, 1994.