

Analyse qualitative des images par propagation de front d'ondes

Ghizlane ELGHOUMARI, Kaouthar HILA, Eric DELECELLE, Eric PETIT

LERISS : LABORATOIRE D'ETUDE ET DE RECHERCHE
EN INSTRUMENTATION, SIGNAUX ET SYSTEMES

Université Paris12-Val de Marne.
61 avenue du Général de Gaulle
94010 Créteil Cedex.

elghoumari@univ-paris12.fr
hila@univ-paris12.fr

Résumé – Une première analyse d'images de niveaux de gris par propagation de front d'ondes est présentée. Le modèle de variété active fondé sur le principe de Fermat est exploité afin d'adapter l'algorithme de calcul des temps d'arrivée basé sur un schéma de différences finies. Les principes de Fermat et de Huygens sont pris en compte dans les calculs ainsi que les phénomènes de diffraction, réfraction et réflexion des ondes directe et inverse. L'indice de réfraction du milieu est associé à une fonction des niveaux de gris de l'image. Les fronts d'ondes réagissent différemment par rapport aux régions sombres et claires et par rapport aux variations du gradient.
Mots clé – Front d'ondes, Principe de Fermat, Principe de Huygens, Indice de réfraction, Schéma des différences finies.

Abstract – This paper deals with the propagation of wavefront to analyse grey level images. We use an active contour model based on Fermat principle to adapt the algorithm that computes traveltimes to a finite difference scheme. The principles of Fermat and Huygens are taken into account in calculations as well as the phenomena of diffraction, refraction and reflection of the direct and opposite waves. The refraction index of the medium is associated to a function of the image grey levels. The wavefront differently reacts depending on whether the image is clear, dark, or presenting luminance variations.

Keywords - Wave front, Fermat's principle, Huygens's principle, refraction index, Diagram of finished differences.

1. Introduction

Depuis leur introduction en 1987 par Kass, Witkin et Terzopoulos [1], les contours déformables, ou contours actifs, sont devenus très populaires. Leur application se situe dans de nombreux domaines tels que la reconnaissance des formes, la biologie ou l'imagerie médicale. Le plus souvent, le modèle utilisé repose sur une analogie mécanique.

E. Deléchelle [2] a récemment proposé un nouveau modèle de variété active fondé sur le principe de Fermat qui stipule que *pour aller d'un point à un autre la lumière emprunte le trajet pour lequel le temps de parcours est minimum*. Ce principe représente une transition intéressante entre la loi qui régit la déformation d'un corps élastique et celle qui décrit la dynamique d'une masse en mouvement. La loi de minimisation en découlant aboutit à une formulation variationnelle semblable à celle rencontrée dans le cas des contours déformables, mais qui comporte moins de paramètres. Les différents résultats obtenus par ce modèle sur une grande variété d'images témoignent de l'efficacité de cette approche et de sa robustesse au bruit. Cependant, l'inconvénient de cette méthode est qu'on utilise un procédé d'interpolation afin de construire le contour désiré, ce qui engendre des erreurs de précision.

Notre projet consiste à associer l'approche précitée à une autre récemment utilisée en sismologie. Nous assimilons

donc l'image à un milieu de propagation d'ondes d'indice de réfraction variable.

Rappelons que la sismologie propose des méthodes d'investigation permettant l'exploration des couches souterraines de la Terre. Dans ce cadre, on appelle tomographie des temps d'arrivée [3] une technique utilisée pour la modélisation des variations des vitesses de propagation des ondes sismiques. Pour adapter un modèle a priori des vitesses de propagation [4], plusieurs méthodes sont utilisées afin de calculer le temps de parcours, dont en particulier : la méthode des caractéristiques (ray tracing) [5], la méthode du lancer de rayons (ray shooting) [5] et la méthode des différences finies [4], [6].

Nous optons ici pour l'utilisation d'un schéma de différences finies ce qui nous permet d'accéder directement à la propagation du front d'ondes (les fronts d'ondes étant les surfaces sur lesquelles le temps de parcours est constant).

2. Formulation du problème

Afin de propager le front d'ondes, nous commençons par établir l'équation eikonal d'une onde élastique qui nous permettra de générer la propagation du front d'ondes. Nous exprimons ensuite le champ de vitesse en fonction de l'indice de réfraction du milieu puis en fonction des niveaux de gris de l'image.

2.1 Mise en équation du front d'ondes

Pour un milieu 2-D isotopique de densité constante, l'équation d'onde est de la forme :

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 P}{dy^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 P}{dt^2}$$

où

- $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, x, y)$ est un champ scalaire,
- $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y)$ est le champ de vitesse du milieu.

On peut développer la fonction de Green [7] de cette équation d'ondes en une série de terme général :

$$G(w, x, y, x_s, y_s) = A(x, y, x_s, y_s) e^{i w t(x, y, x_s, y_s)} \quad (1)$$

où

- t est le temps de parcours pris par une onde pour se propager d'une source $S(x_s, y_s)$ vers un point destination (x, y) ,
- A est l'affaiblissement en amplitude dû à la propagation géométrique du front d'onde,
- w est la fréquence de l'onde.

En dérivant l'équation (1), nous pouvons déduire que le champs du temps de parcours t , satisfait l'équation suivante dite équation eikonal :

$$|\nabla(t)|^2 = \frac{1}{v^2} \quad (2)$$

L'amplitude A vérifie quant à elle l'équation de transport d'ordre zéro suivante :

$$\nabla t \cdot \nabla A + \frac{1}{2} \cdot \nabla^2 t \cdot A = 0 \quad (3)$$

On définit les rayons comme étant les trajectoires orthogonales en chaque point du front d'ondes et dont le vecteur vitesse est parallèle à ∇t . Afin de propager le front d'onde, nous nous intéressons à la résolution de l'équation eikonal.

2.2 Application du modèle optique

D'après le principe de Fermat, le temps de parcours t entre deux points A et B est défini par :

$$t = \int_A^B \frac{1}{v} ds = \frac{1}{c} \int_A^B n ds \quad (4)$$

où

- v est la vitesse de la lumière dans le milieu, fonction de l'indice de réfraction n de ce milieu,
- n est donné par la relation $v = \frac{c}{n}$
- c est la célérité.

Dans le cadre de la détection de contours [2], l'image est assimilée à un milieu de propagation de la lumière. L'indice de réfraction n de ce milieu est lié à l'intensité I des niveaux de gris de l'image par l'une des équations suivantes :

$$n(x, y) = I(x, y) \quad (5)$$

$$\text{ou} \quad n(x, y) = \ln v \{I(x, y)\} \quad (6)$$

$$\text{ou} \quad n(x, y) = \frac{1}{1 + |\nabla I(x, y)|} \quad (7)$$

L'expression de l'indice de réfraction dépend du résultat souhaité. Par exemple, la relation (5) est utilisée dans le cas de la détection de fines structures sombres, la relation (6) est utilisée pour les structures claires alors que la relation (7) est utilisée dans le cadre de la détection des contours.

3. Résolution algorithmique

Traditionnellement, l'équation eikonal est résolue par la méthode des caractéristiques qui présente des problèmes de convergence pour des champs de vitesses complexes ou discontinus. Le schéma de différences finies que nous avons choisi permet d'éviter ces problèmes comme nous allons le montrer dans la suite.

3.1 Méthode des différences finies

En 1988, Vidale [8] a introduit un schéma de différences finies permettant de propager des fronts d'ondes plans ou circulaires. Le calcul du temps de parcours est fait à partir d'une grille régulière. Ce schéma a été repris et amélioré par Van Trier et Symes [9].

En 1991, Podvin et Lecomte [10] ont proposé une méthode fondée sur un schéma de différences finies, avec l'hypothèse de propagation d'une onde plane régie par le principe de Fermat. De plus, en chaque point de la grille, la propagation de l'onde directe et de l'onde inverse prend en considération les phénomènes de diffraction, de transmission et de réflexion.

Afin de bénéficier des avantages du schéma proposé par Podvin et Lecomte, nous utilisons une méthode basée sur le même schéma de différences finies mais nous considérons non plus une onde plane mais un front d'onde courbé [11] afin d'éviter les problèmes de stabilité de l'algorithme au voisinage de la source.

Nous nous basons essentiellement sur la méthode proposée par Ping Zhao [6]. Cette méthode prend en compte le concept de l'équation eikonal en ajoutant au principe de chemin minimal de Fermat le concept de Huygens qui s'énonce comme suit : *tout point d'une surface diffractante atteint par un rayonnement lumineux peut être considéré comme une source lumineuse secondaire d'une onde de même fréquence de même amplitude et de même phase.*

L'équation eikonal en 2-D ayant la forme suivante :

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dy}\right)^2 = \frac{1}{v^2} \quad (8)$$

où :

- t est le temps de traversée
- x et y sont les coordonnées en 2-D.

Le modèle de vitesse est subdivisé en cellules carrées. On note $V_{i,j}$ la vitesse dans chaque cellule (i,j) et on utilise la configuration de Schneider pour établir la grille de vitesse (Fig1).

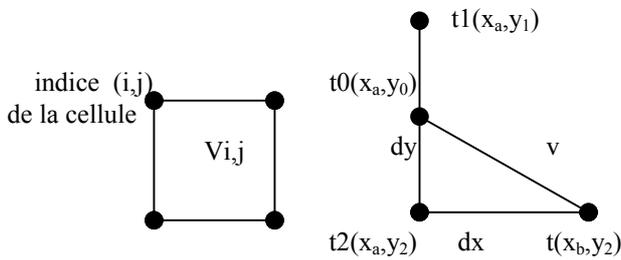


FIG. 1 : Configuration de Schneider

$t(x_b, y_2)$ peut être obtenu à partir des temps des deux points voisins $t1(x_a, y_1)$ et $t2(x_a, y_2)$.

3.2 Avantages de la résolution proposée

L'établissement de la grille nécessite les deux étapes suivantes :

- l'onde directe doit être définie dans les quatre directions en tenant compte du principe de Huygens pour $dt/dx > 0$, $dt/dx < 0$, $dt/dy > 0$, $dt/dy < 0$,
- l'onde inverse doit être définie dans les mêmes directions.

Ces deux étapes engendrent seize points de parcours en chaque point de la grille. Ceci recouvre tous les chemins des rayons possibles (transmission, réfraction et diffraction) d'un point donné. Il ne reste donc plus qu'à choisir celui pour lequel le temps de parcours est minimal (Principe de Fermat).

Cet algorithme présente plusieurs avantages :

- le problème de causalité est résolu grâce à l'établissement de la propagation directe et inverse,
- les principes de Fermat et de Huygens sont appliqués, ainsi trois types d'ondes sont examinés en chaque point de la grille (onde transmise, diffractée et réfractée) et seule l'onde correspondant au temps de parcours minimum est retenue,
- l'hypothèse de fronts d'onde courbé contribue à la précision des résultats.

4. Avantages de l'application du modèle optique à l'image

En assimilant l'image à un milieu de propagation nous établissons un parallèle entre la vitesse de propagation dans ce milieu et les niveaux de gris de l'image (relations 5, 6 et 7). Il est à noter que l'approche du modèle optique proposé est fondée sur un principe physique. Le temps de parcours et le terme de régularisation y trouvent un sens physique.

Terme de régularisation

On exprime l'équation de mouvement d'un photon dans un milieu hétérogène à l'aide du paramètre spatial s (rayon de courbure) comme suit :

$$\nabla n = \frac{d}{ds} (n \vec{t}) \quad (9)$$

où : \rightarrow

- \vec{t} est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire.

A partir de cette équation, on montre [2] que la courbure κ sur un contour C de l'image vérifie :

$$|\kappa| \leq \sup_C \left\{ \frac{\|\nabla n\|_{\perp}}{n} \right\} \quad (10)$$

En posant $n = n_0 + \Delta n$,

où :

- Δn est obtenue à partir des relations (4,5,6). On prend $0 \leq \Delta n \leq 1$,
- n_0 est un offset à valeur constante pour tous les pixels de l'image

l'équation (10) permet d'écrire :

$$|\kappa| \leq \frac{1}{n_0} \quad (11)$$

Le paramètre n_0 définit en quelque sorte le rayon de courbure minimum de la trajectoire de Fermat. Puisque les fronts d'onde sont perpendiculaires aux rayons lumineux, on peut déduire que n_0 agit également sur la régularité des fronts d'onde.

5. Résultats et discussions

Afin de tester la sensibilité du front d'onde au contenu de l'image, nous avons pris quelques exemples de synthèse. Notre source de propagation est placée au milieu de la bordure supérieure de l'image.

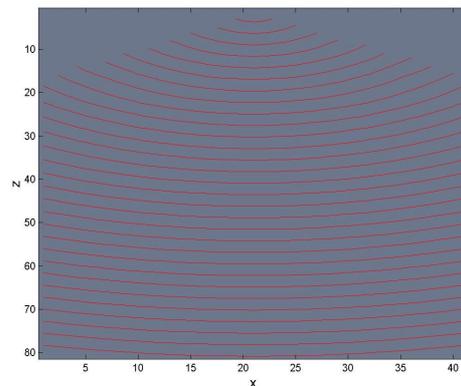


FIG. 2 : Milieu uniforme

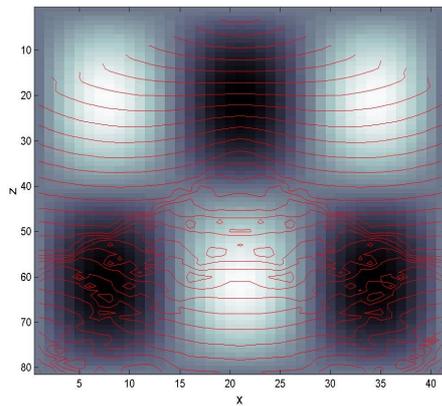


FIG. 3 : Milieu complexe

On remarque que :

- Pour un *milieu uniforme* (Fig2) (vitesse de propagation constante et égale à 1), les fronts d'ondes sont des arcs de cercles réguliers et uniformément distancés.
- Pour un *milieu complexe* (Fig3) (vitesse de propagation variable et est égale à $1+0.2*\sin(3*\pi*y)*\sin(3*\pi*x)$).

Nous pouvons analyser l'image (Fig3) en découpant le plan en deux parties comme suit :

$0 < y < 40$ on remarque qu'au niveau des régions sombres (zones de grandes vitesses) les fronts d'ondes tournent leur convexité vers la direction opposée à la source ; par contre pour les régions claires, les fronts d'ondes tournent leur convexité vers la source.

$40 < y < 80$ les fronts d'ondes sont beaucoup plus irréguliers : on remarque la présence de courbes fermées au niveau de la zone claire centrale, ceci est dû au problème de l'arrivée multiple (différents rayons lumineux issus de notre source viennent se croiser et engendrent des courbes fermées au niveau des fronts d'ondes). Au niveau des zones sombres, le champ de front d'onde est beaucoup plus irrégulier, ce qui engendre de multiples courbes fermées secondaires.

La régularité des fronts d'onde est liée à la courbure locale. On montre dans [2] que la courbure maximale peut être fixée a priori par définition de l'indice de réfraction en prenant

$$n = n_0 + \Delta n$$

où :

- n_0 joue le rôle de terme de régularisation
- Δn est fonction des niveaux de gris.

La position à un instant donné et la courbure en un point donné du front d'onde sont définies à partir des caractéristiques du milieu de propagation, c'est à dire des niveaux de gris de l'image. Cette propriété nous permet d'envisager le développement d'une méthode fondée sur ce modèle de propagation afin de détecter les contours sur une

image et de valider cette approche dans le domaine 3D auquel notre modèle peut être facilement étendu.

Références

- [1] M. Kass, A. Witkin et D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. Int. J. Comput. Vision, vol 1, n°4, pp 321-331, 1988.
- [2] E. Delechelle, J. Lemoine. La trajectoire déformable: un modèle de variété active fondée sur le principe de Fermat. Traitement du signal 2000-vol 17 n°1 pp 47-58.
- [3] W. Symes. Numerical methods for tomography. Mathematical geophysics summer school. Stanford University, August 1999.
- [4] L. Zhang. Imaging by the wave front propagation method. Ph.D. These. 1992.
- [5] W. Symes. Numerical methods for traveltimes and amplitudes. Mathematical geophysics summer school. Stanford University, August 1999.
- [6] P. Zhao. An efficient computer program for wavefront calculation by the finite-difference method. Computers and Geosciences, vol. 22, n°3, pp 239-251. 1996.
- [7] V. Cerveny, I.A. Molotkov, I. Psencik. Ray methods in seismology: Univ. of Karlova Press. 1977.
- [8] J.E. Vidale. Finite differences calculation of travel times. Bull. Seism. Soc. Am. 78, n° 6, pp 2062-2076. 1988.
- [9] J. Van Trier, W. Symes. Upwind finite-difference calculation of traveltimes. Geophysics, 56, pp 812-821, 1991.
- [10] P. Podvin, I. Lecomte. Finite difference computation of traveltimes in very velocity models: a massively parallel approach and its associated tools. Geophys. J. Int. 105, pp 271-284, 1991.
- [11] W.A. Schneider Jr., K.A. Ranzinger, A.H. Balch et C. Kruse. A dynamic programming approach to first arrival traveltime computation in media with arbitrariness distributed velocities. Geophysics, vol. 57, n°5, pp 521-526. 1992.