

Extrapolation de spectre et variation totale pondérée

Lionel MOISAN¹

¹Centre de Mathématiques et de Leurs Applications (CMLA, UMR 8536)

61 avenue du président Wilson, 94245 Cachan cedex, France

Lionel.Moisan@cmla.ens-cachan.fr

Résumé – Etant donnée une image dont le spectre est connu sur un certain domaine, comment extrapoler ce spectre à un domaine plus étendu en limitant au maximum les effets de Gibbs sur l'image ? Nous comparons deux formulations variationnelles classiques, le maximum d'entropie et la variation totale, avant de proposer une approche apparemment plus efficace reposant sur une pondération non-locale de la variation totale.

Abstract – Given an image whose spectrum is known on a certain domain, how to extend this spectrum to a larger domain and limit Gibbs oscillations in the image ? We compare two classic variational formulations, the maximum entropy and the total variation. Last, we propose a new method, apparently more efficient, relying on a non-local weighting of the total variation.

1 L'extrapolation de spectre

Selon la théorie de Shannon, l'échantillonnage d'une image avec un pas δ n'est licite que si le support du spectre de l'image ne s'auto-intersecte pas lorsqu'on le translate de $\pm 1/\delta$ selon l'un des axes. Si cette condition n'est pas vérifiée, un repliement spectral (*aliasing*) survient, et l'image reconstruite par interpolation sinc à partir des échantillons diffère de l'original.

Pour éviter l'*aliasing*, on doit donc en théorie appliquer avant l'échantillonnage un filtre passe-bas qui – idéalement – annule toutes les fréquences hors de $[-(2\delta)^{-1}, (2\delta)^{-1}]^2$ sans affecter les autres. En pratique, les filtres passe-bas réalisables ont aussi pour effet d'atténuer les fréquences au bord de ce domaine, mais ce point peut être négligé si l'atténuation est connue.

On peut alors se poser la question suivante : peut-on, après échantillonnage, « retrouver » les hautes fréquences éliminées par le filtre passe-bas afin d'augmenter la résolution de l'image ? Ce problème est un cas particulier de l'extrapolation de spectre : **connaissant la transformée de Fourier d'une image dans un domaine donné K , peut-on la prolonger à un domaine plus grand ?** La principale difficulté vient de l'effet de Gibbs, ou *ringing* : une discontinuité dans le spectre de l'image provoque des rebonds dans l'image elle-même. Ainsi, l'extrapolation triviale du spectre par la constante 0 (*zero-padding*) n'est pas satisfaisante car les discontinuités générées sur le bord de K produisent beaucoup d'oscillations dans l'image (cf. figure 1). La suppression de ces rebonds est précisément l'objectif premier de l'extrapolation de spectre.

Pour construire un spectre plausible dans les fréquences manquantes, on peut adopter une formulation variationnelle : parmi toutes les extrapolations spectrales d'une image donnée, on choisit celle qui minimise une certaine énergie. C'est le point de vue adopté par Rougé et Seghier [3] (maximisation de l'entropie de Burg) et par Guichard et Malgouyres [2] (minimisation de la variation totale).

Dans cet article, nous discutons les résultats obtenus par ces deux méthodes, avant de proposer une variante de la dernière qui permet d'améliorer sensiblement les résultats. Nous abordons le problème essentiellement sous l'angle expérimental, en insistant sur la résolution numérique et sur l'efficacité des méthodes étudiées vis-à-vis de l'élimination du *ringing*.

2 Deux méthodes classiques

Fixons quelques notations. Soit une image u , définie sur un domaine rectangulaire discret $\Omega =]-M, M] \times]-N, N]$. On suppose que u est prolongée par périodicité à \mathbb{R}^2 tout entier. La transformée de Fourier (discrète) de u est alors définie sur Ω par

$$\mathcal{F}(u) : (p, q) \mapsto \sum_{(k, l) \in \Omega} \exp\left(-2i\pi \frac{kp + lq}{4MN}\right) u(k, l).$$

On suppose que l'on connaît $\mathcal{F}(u) = z$ sur un sous-domaine K de Ω et on se propose de l'extrapoler à Ω tout entier. Autrement dit, étant donnée une fonction $z : K \rightarrow \mathbb{C}$, on se propose de trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (p, q) \in K, \quad \mathcal{F}(u)(p, q) = z(p, q). \quad (1)$$

2.1 Entropie de Burg

L'entropie de Burg d'une fonction f strictement positive définie sur un domaine Ω est donnée par

$$E(f) = \int_{\Omega} -\log f(x) dx.$$

Rougé et Seghier [3] proposent de réaliser l'extrapolation de spectre en minimisant $E(u)$ sous la contrainte (1). Remarquons que E est une fonctionnelle strictement convexe, ce qui garantit l'existence et l'unicité du minimum.

Algorithme. Dans une formulation discrète, on doit donc chercher une fonction u vérifiant

$$\forall (k, l) \in \Omega, \quad u(k, l) > 0, \quad (2)$$

la condition (1), et minimisant

$$E(u) = \sum_{(k,l) \in \Omega} -\log u(k, l). \quad (3)$$

Posons

$$v(k, l) := \frac{\partial E}{\partial u(k, l)} = -\frac{1}{u(k, l)},$$

et définissons l'image $\bar{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation

$$\mathcal{F}(\bar{v}) = \mathcal{F}(v) \cdot (1 - 1_K),$$

où 1_K est la fonction indicatrice de K . Alors \bar{v} représente le gradient de la fonctionnelle E projeté sur l'espace tangent à la contrainte (1), de sorte que pour $t > 0$, si la fonction $u_t = u - t\bar{v}$ est strictement positive, alors elle vérifie (1) (si c'est le cas pour u) et $E(u_t) < E(u)$. Il reste à choisir la meilleure valeur possible de t (méthode du gradient à pas optimal), définie par l'unique $t_0 > 0$ solution de

$$\sum_{(k,l) \in \Omega} \frac{\bar{v}(k, l)}{u(k, l) - t_0 \bar{v}(k, l)} = 0.$$

Pratiquement, la valeur de t_0 peut être évaluée en quelques itérations par dichotomie.

En fait, l'algorithme itératif que nous venons de décrire ne peut être appliqué que si l'on part d'une fonction u vérifiant déjà (1) et (2). Or, la condition initiale naturelle donnée par u vérifiant (1) et telle que $\mathcal{F}(u) = 0$ hors de K (*zero-padding*) n'a aucune raison d'être positive; plus grave, il se peut même qu'il n'existe aucune fonction u vérifiant à la fois (1) et (2) (cf. [3]), auquel cas le problème est sans solution.

Derrière ce problème de positivité se cache un autre problème : l'extrême lenteur de convergence de l'algorithme si le minimum de u est proche de 0. Le pas optimal t_0 est alors contraint à rester très petit pour garantir la positivité de u_{t_0} . Nous avons donc été conduit à considérer le problème relaxé suivant : au lieu de minimiser (3), nous introduisons un paramètre $\varepsilon < \min u$ et minimisons

$$E_\varepsilon(u) = \sum_{\Omega} -\log(u - \varepsilon).$$

Cette minimisation peut se faire grâce à l'algorithme décrit précédemment, à condition de remplacer partout u par $u - \varepsilon$. On remarque alors que la vitesse de convergence est très dépendante de la distance de ε au minimum de u : l'algorithme converge d'autant plus rapidement que cette distance est grande. Nous avons donc adopté la stratégie suivante : nous nous donnons une suite ε_n , typiquement $\varepsilon_n = -C\lambda^n$ avec $0 < \lambda < 1$ (λ proche de 1 en pratique), et nous minimisons à l'étape n la fonctionnelle E_{ε_n} sous la contrainte (1). Cette méthode relaxée permet d'accélérer nettement la convergence vers le minimum de la fonctionnelle véritable $E_0 = E_{\varepsilon_\infty}$.

2.2 Variation totale

L'introduction de la variation totale

$$TV(f) = \int_{\Omega} |Df|$$

comme critère de régularité d'une image est due à Rudin [4]. L'intérêt de cette énergie est qu'elle autorise f à présenter des discontinuités, ce qui est particulièrement adapté aux images (*edges*). Dans [2], Guichard et Malgouyres proposent de réaliser l'extrapolation de spectre en minimisant cette énergie (en fait leur point de vue est légèrement différent de celui présenté ici puisque leur point de départ est une image aliasée, mais le principe est le même).

Algorithme. Sur une image discrète u , il faut choisir une définition du gradient $|Du|$. En toute rigueur, il faudrait certainement considérer le gradient continu donné par l'interpolation de Shannon de l'image, mais nous avons adopté un choix plus simple en définissant

$$|D_\varepsilon u(k, l)| = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} (u(k+i, l+j) - u(k, l))^2},$$

la somme étant étendue aux 4 plus proches voisins de (k, l) , soit $(i, j) \in \{(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}$. Une symétrisation est appliquée à chaque bord de Ω . La dérivée de la fonctionnelle

$$TV(u) = \sum_{(k,l) \in \Omega} |D_0 u(k, l)|$$

étant discontinue aux points où $|D_0 u(k, l)| = 0$, la convergence d'une minimisation directe peut être très lente. Pour minimiser $TV(u)$, nous avons donc préféré minimiser successivement les fonctionnelles relaxées

$$TV_\varepsilon(u) = \sum_{(k,l) \in \Omega} |D_\varepsilon u(k, l)|,$$

pour ε en progression géométrique vers 0. Comme pour l'entropie de Burg, le gradient de la fonctionnelle relaxée est projeté sur la contrainte, et le pas de descente optimal est calculé en quelques itérations par la méthode de Newton.

2.3 Comparaison des deux méthodes

La méthode entropique ne donne pas de très bons résultats, en particulier ses capacités à atténuer le ringing semblent très limitées (cf. figure 1, ligne 2). En revanche, la minimisation TV supprime très largement le *ringing*, au prix parfois d'un effet de *clustering* qui fait perdre à l'image les détails de ses régions texturées. On peut limiter ce *clustering* en stoppant l'algorithme de minimisation de la variation totale au bout de quelques itérations (typiquement de l'ordre de 5). Il semble en effet que la minimisation atténuée d'abord le *ringing* avant de provoquer ces effets de *clusters*.

3 Variation totale pondérée

Perceptuellement, nous sommes beaucoup plus sensibles à des oscillations dans les régions uniformes que dans les régions texturées. Or la variation totale pénalise autant ces deux cas, puisque si v est un vecteur colinéaire à Df , on a $|Df + v| = |Df| + |v|$. Ceci a pour effet de ne pas éliminer complètement le *ringing* dans les zones uniformes de l'image, et d'atténuer fortement le contraste des régions texturées, où la variation totale est naturellement élevée. Pour tenir compte de notre perception effective du *ringing*, nous proposons une variation totale pondérée, définie par

$$TV^w(f) = \int_{\Omega} w(x)|Df(x)| dx, \quad (4)$$

où w est une fonction de pondération, positive et donnée a priori. On peut donner un sens mathématique précis à (4) avec des hypothèses assez faibles sur w , typiquement lorsque w est une mesure de Radon [1]. Dans la suite, nous nous limiterons à l'interprétation discrète de (4).

Pour que (4) remplisse les objectifs fixés, il faut que la fonction w prenne des valeurs élevées dans les zones où f est assez uniforme, et des valeurs faibles ailleurs. Cependant, on ne désire pas écrire explicitement la dépendance de w par rapport à f dans (4), car on perdrait alors très certainement la convexité, et toutes les propriétés de minimisation qui en découlent, sans parler de la non-dérivabilité éventuelle de $f \mapsto w(f)$. L'extrapolation de spectre par cette nouvelle méthode se fait donc en deux temps : on détermine d'abord w en fonction des données initiales (le spectre connu z), puis on minimise $TV^w(f)$ à w fixé sous la contrainte (1).

3.1 Choix de la pondération

La fonction de pondération introduite plus haut a pour but de différencier les régions homogènes de l'image des régions texturées. Cette fonction doit donc être estimée de façon moins locale que le gradient lui-même. Partant de la donnée connue z , nous pouvons définir une première image u_0 obtenue par l'extrapolation de spectre z sous contrainte de minimisation de la variation totale. On pourrait alors poser $w = |Du_0 * G_{\sigma}|^{-1}$, où G_{σ} représente la fonction de Gauss bidimensionnelle d'écart-type σ (ou, plus généralement, n'importe quel filtre passe-bas). Malheureusement, les résultats obtenus avec cette définition ne sont pas concluants. Nous avons finalement opté pour la définition suivante :

$$w_{\lambda}f(x) = \sup \left\{ r; \lambda \geq \inf_{|y-x| \leq r} \sup_{|z-y| \leq r} |f(z) - f(x)| \right\}.$$

Cette définition de $w_{\lambda}f$ correspond à une estimation non locale de l'inverse du module du gradient de f . En effet, on vérifie sans difficulté que si $Df(x) \neq 0$, alors

$$w_{\lambda}f(x) \sim \frac{\lambda}{|Df(x)|} \quad \text{quand } \lambda \rightarrow 0.$$

Algorithme. La minimisation de la fonctionnelle se fait exactement comme pour la variation totale, après calcul de la fonction de poids $w = w_{\lambda}u_0$. Là encore, on introduit

une relaxation pour s'assurer de la convergence effective de l'algorithme. Le choix du paramètre λ joue un rôle assez important : intuitivement λ doit être de l'ordre du niveau de bruit moyen (y compris le *ringing*) de l'image u_0 . Dans les expériences de la figure 1 (ligne 4), nous avons utilisé $\lambda = 10$ pour des images dont la dynamique était de l'ordre de 200.

3.2 Résultats

Dans le cas de l'image de Nîmes, on remarque que l'image finale ne présente plus aucun *ringing* et que certains détails ont été partiellement retrouvés. Globalement, les bords sont plus nets que pour la ligne 3 (minimisation TV). Cette amélioration globale est d'ailleurs très nette sur le spectre, puisqu'on ne perçoit plus de discontinuités au bord de K . Pour la simulation sur le rectangle et l'ellipse, les résultats sont extrêmement concluants et le spectre est entièrement reconstruit.

4 Conclusion

Nous avons comparé dans cette étude trois techniques d'extrapolation de spectre : 1. la méthode par maximum d'entropie, visiblement peu à même de supprimer les effets de Gibbs; 2. la méthode de minimisation TV, très efficace; 3. une nouvelle méthode, reposant sur une pondération particulière de la variation totale, qui apporte une amélioration notable par rapport à la minimisation TV classique. Nous justifions sa construction par des arguments heuristiques mais une étude théorique plus poussée serait utile pour expliquer les bons résultats obtenus par cette nouvelle méthode.

Remerciements

Cette étude a été partiellement supportée par le contrat n° 762/CNES/99/7635/00-0T201*22. Je tiens à remercier Bernard Rougé et Vicent Caselles pour les multiples discussions que nous avons eues sur ce sujet.

Références

- [1] G. Bellettini, G. Bouchitté, I. Fragalià, "BV Functions with Respect to a Measure and Relaxation of Metric Integral Functionals", *Journal of Convex Analysis* 6:2, pp. 349-366, 2000.
- [2] F. Guichard, F. Malgouyres, "Total Variation Based Interpolation", *Proceedings of the European Signal Processing Conference*, vol. 3, pp. 1741-1744, 1998.
- [3] B. Rougé, A. Seghier, "Nonlinear spectral extrapolation: new results and their application to spatial and medical imaging", *SPIE Proceedings*, vol. 2568, pp.279-289, 1995.
- [4] L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms", *Physica D* 60:1-4, pp. 259-268, 1992.

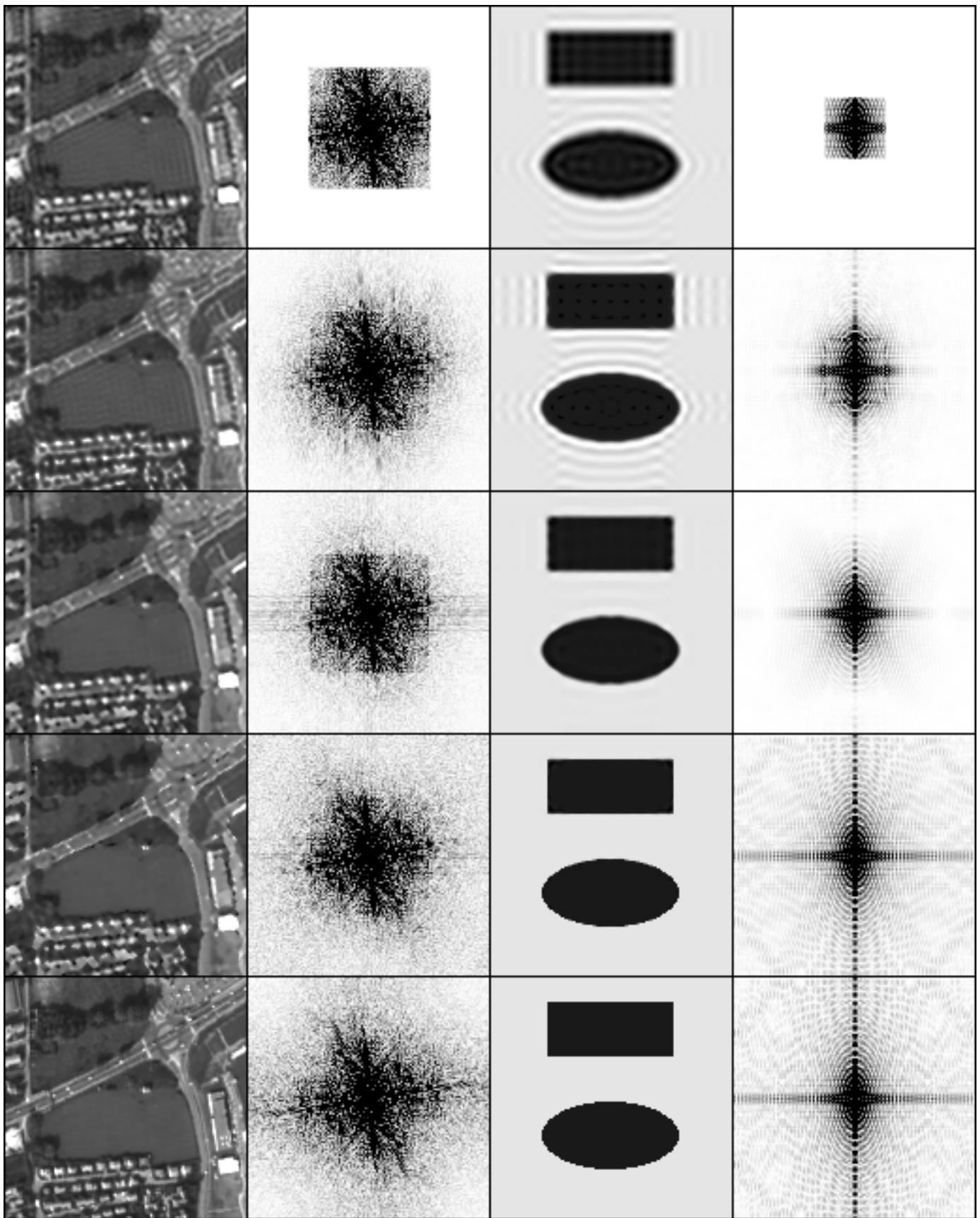


FIG. 1: *Extrapolation de spectre par zero padding (ligne 1), par maximum d'entropie (ligne 2), par variation totale (ligne 3), par variation totale pondérée (ligne 4), et image de référence (ligne 5). Sur chaque ligne : résultat pour l'image de Nîmes (colonne 1), spectre correspondant (colonne 2), résultat pour l'image géométrique (colonne 3), spectre correspondant (colonne 4).*