

# Influence de non-linéarités d'ordre 2 de Volterra sur l'algorithme LMS

Alexandre GUÉRIN<sup>1,2</sup>, Gérard FAUCON<sup>1</sup>, Régine LE BOUQUIN-JEANNÈS<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Traitement du Signal et de l'Image, Université de Rennes 1,  
Bâtiment 22, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

<sup>2</sup>Alcatel Business Systems, Micro-Systems and Signal Processing Department (ABS-MSD),  
32 Avenue Kléber, 92707 Colombes cedex, France

alexandre.guerin@univ-rennes1.fr, regine.le-bouquin@univ-rennes1.fr, gerard.faucon@univ-rennes1.fr

## Résumé –

Cet article décrit de manière théorique l'Annulation d'Écho Acoustique réalisée par un algorithme LMS en présence de non-linéarités avec mémoire dans le canal à identifier. Les non-linéarités, modélisées par un filtre polynomial de Volterra d'ordre 2, sont appliquées en amont du canal acoustique linéaire. Le comportement du filtre adaptatif et de l'Erreur Quadratique Moyenne en sa sortie sont dérivées en présence de données gaussiennes. Des simulations de Monte-Carlo valident les calculs théoriques.

## Abstract –

Our concern is the Acoustic Echo Cancellation in presence of nonlinearity with memory in the channel to be identified. In our context we assume that the nonlinearity, modeled by a pure second-order Volterra filter, is applied before a linear filter. The mean weight behaviour of the LMS algorithm as well as the mean-squared error at its output are derived in presence of gaussian data. Monte-Carlo simulations are then provided which show the accuracy of the theoretical predictions.

## 1 Introduction

Le domaine des télécommunications GSM voit le développement croissant, pour le confort voire la sécurité de l'utilisateur, de la fonction mains-libres. Cette fonctionnalité requiert à la fois une amplification plus élevée et un haut-parleur plus puissant, ce qui va à l'encontre de la miniaturisation des terminaux : il en résulte une utilisation aux tensions limites des composants analogiques, créant ainsi des non-linéarités. À cet effet, de nouvelles approches d'annulation d'écho acoustique à base de traitements non linéaires ont été proposées [1][2]. Dans [3], Costa *et al.* décrivent l'influence d'une fonction non linéaire sans mémoire de type *erf* sur le contrôle actif de bruit. On se propose ici d'étudier l'impact du haut-parleur, modélisé par un filtre de Volterra d'ordre 2, sur l'annulation d'écho linéaire réalisée par l'algorithme LMS (Least Mean-Squares). Plus précisément, on montrera son influence sur le comportement en moyenne du filtre adaptatif  $E\{\mathbf{w}(n)\}$ , et de l'EQM (Erreur Quadratique Moyenne)  $E\{e^2(n)\}$ , pour des données d'entrée gaussiennes et un pas d'adaptation faible.

## 2 Notations

La figure 1 montre le système réel dans son ensemble, composé du haut-parleur source de non-linéarités, du canal acoustique et du microphone que l'on suppose ici parfait.  $z(n)$  est un bruit additif, indépendant du signal d'excitation du haut-parleur  $x(n)$ . Le signal en sa sortie est noté  $x_{hp}(n)$ , et la réponse impulsionnelle du canal acous-

tique est représentée par le filtre linéaire  $w_{ca}$ . La grandeur  $d(n)$ , résultat de la convolution de  $x_{hp}(n)$  et de  $w_{ca}$ , est le signal d'écho capté par le microphone.

De par ses caractéristiques et notamment l'élasticité de sa membrane, le haut-parleur présente des propriétés de mémoire, aussi bien dans sa partie non linéaire qui se manifeste à des tensions d'entrée proches de la tension maximale d'utilisation définie par le constructeur, que dans sa partie linéaire. On peut ainsi représenter le haut-parleur par un filtre de Volterra causal d'ordre  $p$  de la forme :

$$\begin{aligned} x_{hp}(n) &= \sum_{\alpha_1=0}^{+\infty} h_1(\alpha_1) x(n - \alpha_1) \\ &\quad \vdots \\ &+ \sum_{\alpha_1=0}^{+\infty} \cdots \sum_{\alpha_p=\alpha_{p-1}}^{+\infty} h_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p) x(n - \alpha_1) \cdots x(n - \alpha_p) \end{aligned} \quad (1)$$

où le noyau  $h_1$  représente la partie linéaire et les noyaux d'ordres supérieurs  $h_i$ ,  $i \geq 2$  la partie non linéaire. Dans un souci de simplification, les noyaux seront limités à l'ordre 2. De plus, du fait de la convolution avec le canal acoustique  $w_{ca}$ , la partie linéaire  $h_1$  peut être incluse dans la réponse linéaire globale  $w^o = h_1 * w_{ca}$  : on peut alors montrer qu'il existe un noyau d'ordre 2,  $g_2$ , qui assure l'équivalence des systèmes  $\begin{pmatrix} h_1, h_2 \\ w_{ca} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \delta, g_2 \\ w^o \end{pmatrix}$ , où  $\delta$  est l'impulsion de Dirac. Sans perte de généralité, le système global haut-parleur/canal acoustique peut alors se représenter par un système série non linéaire/linéaire décrit sur la figure 2 (partie grisée). La partie non linéaire est modélisée par un filtre de Volterra d'ordre 2 de réponse

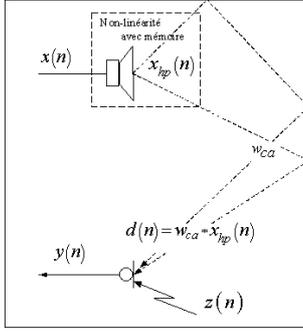


FIG. 1 – Schéma du système

impulsionnelle  $g_2(i, j)$  en parallèle avec un dirac, dont la sortie  $x_g(n)$  est exprimée par :

$$\begin{aligned} x_g(n) &= x(n) + x_2(n) \\ &= x(n) + \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=i}^{L-1} g_2(i, j) x(n-i) x(n-j), \end{aligned} \quad (2)$$

où la constante  $L$  représente la mémoire finie de la partie non linéaire du haut-parleur, et la réponse linéaire globale du système est représentée par un filtre à réponse impulsionnelle finie, de taille  $N \times 1$ , noté  $\mathbf{w}^0$ .

Pour un signal temporel quelconque  $u(n)$ , la notation  $\mathbf{u}(n)$  représente le vecteur d'observation des  $N$  derniers éléments :  $\mathbf{u}^T(n) = [u(n) u(n-1) \cdots u(n-N+1)]$ .

Le signal désiré  $d(n)$  s'écrit donc :

$$d(n) = \mathbf{x}_g^T(n) \mathbf{w}^0. \quad (3)$$

Le signal capté par le microphone est noté  $y(n)$  :

$$y(n) = d(n) + z(n), \quad (4)$$

où  $z(n)$  est un signal indépendant statistiquement de  $x(n)$ .

Le filtre adaptatif effectuant l'identification et réactualisé suivant l'algorithme LMS est noté  $\mathbf{w}(n)$ .

### 3 Analyse Statistique

On se propose dans un premier temps de déterminer l'influence théorique de la partie non linéaire du haut-parleur modélisé par l'équation (2) sur les performances de l'annulation d'écho réalisée par un filtre LMS. À cet effet, on rappelle les équations de l'erreur  $e(n)$  et de réactualisation du filtre adaptatif  $\mathbf{w}(n)$  :

$$e(n) = z(n) + \mathbf{w}^{0T} \mathbf{x}_g(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \quad (5)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu e(n) \mathbf{x}(n) \quad (6)$$

où  $\mu$  est le pas d'adaptation fixe du LMS,  $\mathbf{x}(n)$  le vecteur d'entrée du filtre adaptatif,  $x(n)$  et  $z(n)$  des bruits blancs gaussiens centrés, de variances respectives  $\sigma_x^2$  et  $\sigma_z^2$ .

#### 3.1 Hypothèses

Pour mener à bien l'analyse statistique, les hypothèses fondamentales énoncées dans [4] sont reprises. Cependant, du fait de la mémoire introduite par le filtre  $g_2$ , l'indépendance statistique des vecteurs  $\mathbf{x}_2(n)$  et  $\mathbf{x}_2(n-k)$  n'est vraie que pour  $|k| \geq L$  :

$$\begin{aligned} \forall |k| < L : \\ E \{ \mathbf{x}_2(n) \mathbf{x}_2^T(n-k) \} \neq E \{ \mathbf{x}_2(n) \} E \{ \mathbf{x}_2^T(n-k) \}. \end{aligned} \quad (7)$$

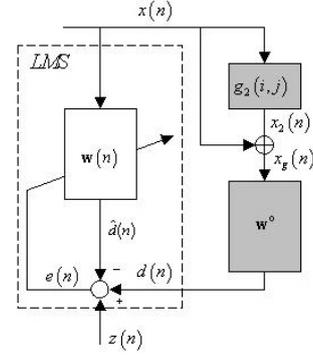


FIG. 2 – Modélisation du système (partie grisée) et identification

Ceci implique que le vecteur  $\mathbf{w}(n)$  n'est pas statistiquement indépendant de  $\mathbf{x}_2(n)$  (alors que  $\mathbf{w}(n)$  et  $\mathbf{x}(n)$  le sont). Nous verrons par la suite l'incidence de (7) sur la dérivation de  $E \{ e^2(n) \}$ .

#### 3.2 Filtre moyen $E \{ \mathbf{w}(n) \}$

En insérant l'équation (5) dans (6) et en prenant l'espérance conditionnellement à  $\mathbf{w}(n)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{w}(n+1) | \mathbf{w}(n) \} &= \mathbf{w}(n) - \mu \sigma_x^2 \mathbf{w}(n) \\ &\quad + \mu E \{ \mathbf{w}^{0T} \mathbf{x}_g(n) \mathbf{x}(n) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Pour un bruit blanc gaussien centré, les moments d'ordre impair sont nuls. En prenant l'espérance sur  $\mathbf{w}(n)$  de (8), on obtient finalement :

$$E \{ \mathbf{w}(n+1) \} = E \{ \mathbf{w}(n) \} (1 - \mu \sigma_x^2) + \mu \sigma_x^2 \mathbf{w}^0. \quad (9)$$

Si l'on prend comme condition initiale  $\mathbf{w}(0) = 0$ , l'équation (9) mène au système à deux équations [3] :

$$E \{ \mathbf{w}(n) \} = k(n) \mathbf{w}^0 \quad (10)$$

$$k(n+1) = k(n) (1 - \mu \sigma_x^2) + \mu \sigma_x^2, \text{ avec } k(0) = 0. \quad (11)$$

On montre aisément que, sous hypothèse de convergence ( $\mu < 2/\sigma_x^2$ ), la suite  $k(n)$  vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = 1$ , et donc que  $\mathbf{w}(n)$  tend vers  $\mathbf{w}^0$ .

#### 3.3 Erreur Quadratique Moyenne $E \{ e^2(n) \}$

À partir de l'équation (5), on obtient :

$$\begin{aligned} E \{ e^2(n) | \mathbf{w}(n) \} &= \sigma_x^2 \\ &\quad + E \{ \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) | \mathbf{w}(n) \} \\ &\quad + E \{ \mathbf{w}^{0T} \mathbf{x}_g(n) \mathbf{w}^{0T} \mathbf{x}_g(n) \} \\ &\quad - 2E \{ \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{w}^{0T} \mathbf{x}_g(n) | \mathbf{w}(n) \}. \end{aligned} \quad (12)$$

En vertu de l'indépendance de  $\mathbf{w}(n)$  et de  $\mathbf{x}(n)$ , la première espérance du terme de droite vaut  $\sigma_x^2 \mathbf{w}^T(n) \mathbf{w}(n)$ .

En utilisant la décomposition de  $\mathbf{x}_g$  de l'équation (2), la seconde espérance vaut  $\sigma_x^2 \mathbf{w}^{0T} \mathbf{w}^0 + \mathbf{w}^{0T} \Gamma_2 \mathbf{w}^0$ , où  $\Gamma_2$  est la matrice d'auto-corrélation de la non-linéarité d'ordre 2 :

$$\Gamma_2 = E \{ \mathbf{x}_2(n) \mathbf{x}_2^T(n) \}. \quad (13)$$

Toujours en utilisant (2), la troisième espérance se décompose en deux termes :

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{w}^{0T} \mathbf{x}_g(n) | \mathbf{w}(n) \} &= \\ E \{ \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}^0 | \mathbf{w}(n) \} & \\ + E \{ \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}_2^T(n) \mathbf{w}^0 | \mathbf{w}(n) \}. & \end{aligned} \quad (14)$$

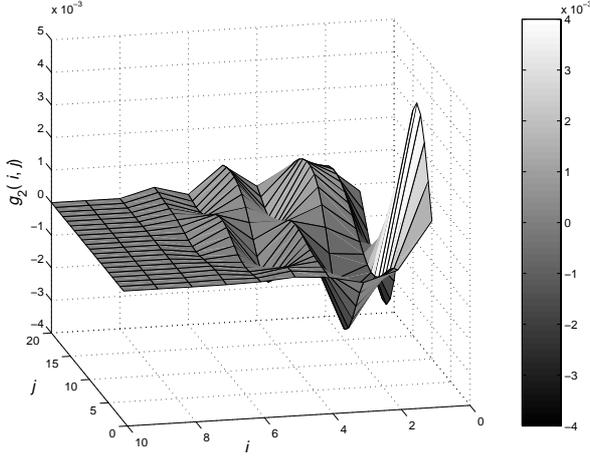


FIG. 3 – Coefficients du filtre de Volterra  $g_2$

Le premier terme de droite de (14) vaut  $\sigma_x^2 \mathbf{w}^{oT} \mathbf{w}(n)$ . Le second terme, que l'on note  $A$ , est plus complexe à expliciter du fait de la dépendance de  $\mathbf{w}(n)$  et de  $\mathbf{x}_2(n)$ . Néanmoins, on sait que pour  $k \geq L$ , l'indépendance entre  $\mathbf{w}(n-k)$  et  $\mathbf{x}_2(n)$  est réalisée. En remplaçant de manière itérative  $\mathbf{w}(n-k)$  en partant de  $k=0$  jusqu'à  $k=L$  grâce à la formule de récurrence (6), on peut montrer que :

$$A = \mathbf{w}^{oT} \left[ \mu \sum_{i=1}^{L-1} B(i) - \sum_{k=2}^{L-1} \mu^k \sum_{i=k}^{L-1} C(k, i) \right] \mathbf{w}^o, \quad (15)$$

où  $B(i)$  est assimilable à un moment d'ordre 6 et  $C(k, i)$  à un moment d'ordre  $2k+4$  :

$$B(i) = E \{ \mathbf{x}_2(n-i) \mathbf{x}^T(n-i) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}_2^T(n) \}, \quad (16)$$

$$C(k, i) = E \{ \mathbf{x}_2(n-i) \mathbf{x}^T(n-i) \times \prod_{j=1}^{k-1} (\mathbf{x}(n-i+j) \mathbf{x}^T(n-i+j)) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}_2^T(n) \}. \quad (17)$$

On remarque que chaque moment d'ordre  $2k+4$  est pondéré par  $\mu^k$ . Ainsi, même si  $L$  prend des valeurs importantes et par là même le moment d'ordre maximal  $2L+2$  (pour  $L=20$  et un signal  $x$  gaussien centré de variance unité, on a  $E \{ x^{2L+2} \} \approx 1,3 \cdot 10^{25}$ ), en choisissant un pas d'adaptation  $\mu$  suffisamment faible (de l'ordre de  $10^{-2}$ ),  $A$  reste négligeable devant les autres termes. De plus, ces moments sont également pondérés par le carré des coefficients  $g_2(i, j)$ , dont on peut observer sur la figure 3 qu'ils vérifient  $|g_2(i, j)| < 5 \cdot 10^{-3}$ . On en déduit alors l'équation de l'EQM :

$$E \{ e^2(n) \} = \sigma_z^2 + \sigma_x^2 E \{ \mathbf{w}^T(n) \mathbf{w}(n) \} - 2\sigma_x^2 E \{ \mathbf{w}^T(n) \} \mathbf{w}^o + \sigma_x^2 \mathbf{w}^{oT} \mathbf{w}^o + \mathbf{w}^{oT} \Gamma_2 \mathbf{w}^o. \quad (18)$$

**État transitoire :** on peut poser l'approximation suivante  $E \{ \mathbf{w}^T(n) \mathbf{w}(n) \} \approx E \{ \mathbf{w}(n) \}^T E \{ \mathbf{w}(n) \}$  [3], ce qui mène en utilisant le système d'équations (10,11) à :

$$E \{ e^2(n) \} = \sigma_z^2 + \sigma_x^2 \mathbf{w}^{oT} \mathbf{w}^o (1 - k(n))^2 + \mathbf{w}^{oT} \Gamma_2 \mathbf{w}^o. \quad (19)$$

Si l'on note  $\sigma_{dlin}^2$  la variance du signal d'observation  $d(n)$  dans le cas linéaire idéal (*i.e.* sans  $g_2$ ),

$$\sigma_{dlin}^2 = \sigma_x^2 \mathbf{w}^{oT} \mathbf{w}^o, \quad (20)$$

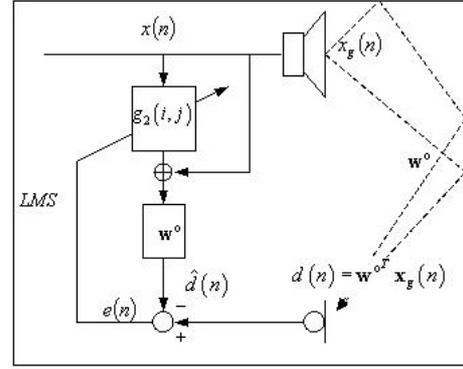


FIG. 4 – Identification de  $g_2$

on obtient :

$$E \{ e^2(n) \} = \sigma_z^2 + \sigma^2 (1 - k(n))^2 + \mathbf{w}^{oT} \Gamma_2 \mathbf{w}^o. \quad (21)$$

La seule différence entre l'équation (21) et la formule de récurrence régissant l'EQM dans le cas linéaire réside dans le terme constant  $\mathbf{w}^{oT} \Gamma_2 \mathbf{w}^o$ , ce qui signifie que la vitesse de convergence est la même que dans le cas linéaire.

**État stationnaire :** en utilisant le même formalisme développé par Haykin [4], on montre que :

$$E \{ e^2(\infty) \} = \sigma_z^2 + \mathbf{w}^{oT} \Gamma_2 \mathbf{w}^o + E \{ J_{ex}(\infty) \}, \quad (22)$$

où  $E \{ J_{ex}(\infty) \}$  est l'excès d'EQM dû à la variance du filtre adaptatif  $\mathbf{w}(n)$ . Si l'on impose maintenant  $\|\mathbf{x}_2\| \ll \|\mathbf{x}\|$ , on peut montrer que, sous l'hypothèse  $\mu \ll \frac{2}{\sigma_x^2}$ , ce terme est proportionnel à  $\mu$ . Ainsi pour  $\mu$  faible, l'EQM à l'état stationnaire vaut finalement :

$$E \{ e^2(\infty) \} = \sigma_z^2 + \mathbf{w}^{oT} \Gamma_2 \mathbf{w}^o. \quad (23)$$

À l'infini, l'EQM est donc égale à la variance du bruit additif plus le terme  $\mathbf{w}^{oT} \Gamma_2 \mathbf{w}^o$  qui n'est autre que la variance du terme non linéaire après le canal acoustique : cette propriété assure que ce terme est positif.

## 4 Simulations et Résultats

Dans ce chapitre, le système d'équations (10,11,19) représentant le comportement statistique du LMS est confronté à des simulations de Monte-Carlo.

### 4.1 Calcul de $g_2$ et $\Gamma_2$

Les coefficients  $g_2(i, j)$  sont appris sur des signaux enregistrés en suivant le protocole de la figure 4 : la relation linéaire liant  $d(n)$  à  $x(n)$ , représentée par  $\mathbf{w}^o$ , est d'abord apprise sur des signaux de faible puissance (sans non-linéarité), puis le filtre  $g_2$  est appris par la méthode du gradient en figeant  $\mathbf{w}^o$ . Cette identification par le gradient est possible grâce à la linéarité des filtres de Volterra par rapport à leurs coefficients.

Contrairement au cas linéaire, les valeurs du filtre  $g_2$  dépendent de la dynamique du signal d'excitation  $x(n)$ . Aussi, ces coefficients ont-ils été normalisés par la variance  $\sigma_x^2$  du signal d'excitation, ce qui revient à considérer par la suite des signaux de variance unité.

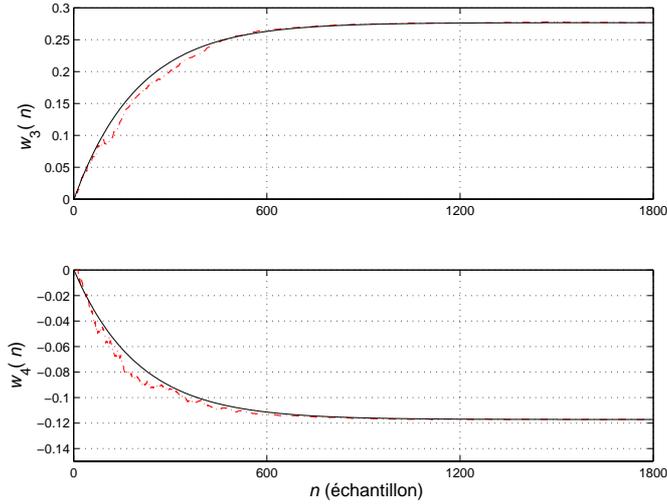


FIG. 5 – Comportement moyen théorique (courbe continue) et simulé (courbe en pointillés) des  $4^{\text{ème}}$  (haut) et  $5^{\text{ème}}$  (bas) coefficients du filtre adaptatif.

Les valeurs relativement faibles des coefficients  $g_2(i, j)$  données figure 3 assurent que la variance du signal non linéaire  $x_2$  reste négligeable comparée à celle de  $x$  : des écoutes subjectives montrent que l'oreille n'est pas sensible à cette distorsion.

Le calcul de  $\Gamma_2$  n'est pas décrit ici, mais si l'on note  $\gamma_2(p, q)$  le coefficient de la  $p^{\text{ème}}$  ligne,  $q^{\text{ème}}$  colonne de  $\Gamma_2$ , on montre que :

$$\gamma_2(p, q) = \sigma_x^4 \left[ \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{L-1} g_2(i, i) g_2(k, k) (1 + 2\delta_{i+p-q}(k)) + \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j>i}^{L-1} g_2(i, j) g_2(i+p-q, j+p-q) \right], \quad (24)$$

où  $\delta_i(k)$  est le symbole de kronecker :  $\delta_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

## 4.2 Résultats

Pour les simulations, on a obtenu les paramètres suivants :  $\mathbf{w}^0 = [0.711 \ -0.198 \ -0.604 \ 0.277 \ -0.117]$ , avec la condition  $\mathbf{w}^{0T} \mathbf{w}^0 = 1$ ,  $\sigma_x^2 = 1$ ,  $\sigma_z^2 = 10^{-6}$ , et  $\mu = 0.005$ . Le filtre de Volterra  $g_2(i, j)$  est donné figure 3. Ces valeurs imposent, dans le cas linéaire, un RSB (Rapport Signal à Bruit) de 60 dB correspondant à une EQM en régime permanent de -60 dB, soit un ERLE de 60 dB.

Sur la figure 5, on remarque l'adéquation entre le comportement théorique de  $E\{\mathbf{w}(n)\}$  et celui simulé (simulations de Monte-Carlo sur 5 réalisations), ce qui confirme que  $\mathbf{w}(n)$  converge bien vers la réponse impulsionnelle du système  $\mathbf{w}^0$ . Plus généralement, les noyaux de Volterra d'ordre pair n'ont aucune influence sur le comportement statistique moyen de  $\mathbf{w}(n)$ .

La figure 6 compare le comportement théorique de l'EQM décrit par l'équation (21) et simulé (sur 30 réalisations) : une fois encore, il y a une parfaite adéquation entre théorie et simulations. On remarque notamment que

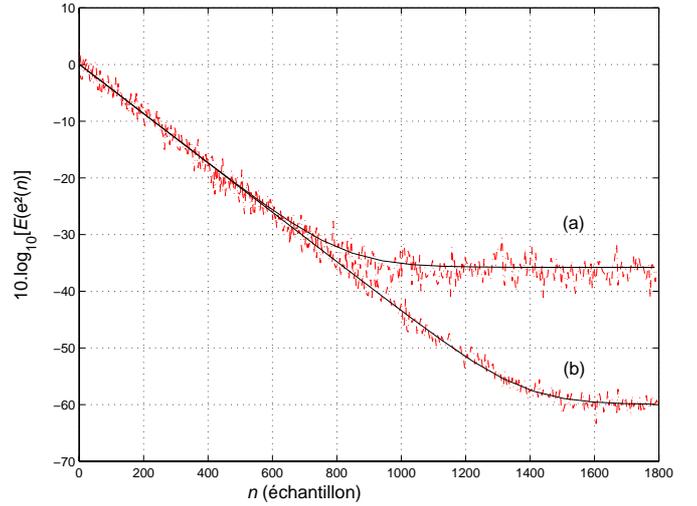


FIG. 6 – Comportement théorique (courbe continue) et simulé (courbe en pointillés) de l'EQM dans les cas (a) non linéaire et (b) linéaire.

le filtre  $g_2$  identifié sur des signaux réels, même sans incidence sur la qualité perçue du signal, entraîne une chute de l'ERLE en régime permanent de 60 dB à environ 35 dB.

## 5 Conclusion

Dans ce papier a été étudiée l'influence de non-linéarités avec mémoire dans le canal à identifier sur l'Annulation d'Écho Acoustique linéaire réalisée par le filtre adaptatif LMS. L'adéquation entre les simulations et les équations théoriques dérivées valident ces dernières ainsi que les hypothèses posées. Cette étude, menée à partir de données réelles, montre également qu'une faible non-linéarité (inaudible ici) dégrade fortement les performances en termes d'ERLE, sans pour autant influencer le comportement en moyenne du filtre adaptatif : ceci milite fortement en faveur de l'utilisation d'un filtrage non linéaire dans ce cadre précis.

## Références

- [1] A. Fermo, A. Carini, G.L. Sicuranza, *Simplified Volterra filters for acoustic echo cancellation in GSM receivers*, Proc. of the European Signal Processing Conference, Tampere, 2000.
- [2] A. Stenger, W. Kellermann, R. Rabenstein, *Adaptation of acoustic echo cancellers incorporating a memoryless nonlinearity*, Proc. of the International Workshop on Acoustic Echo and Noise Control, Pocono Manor, 1999.
- [3] M.H. Costa, J.C.M. Bermudez, N.J. Bershad, *Statistical analysis of the LMS algorithm with a zero-memory nonlinearity after the adaptive filter*, Proc. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Phoenix 1999.
- [4] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, second edition, 1991.