Extrapolation de Spectre avec Contraintes: La Méthode des Coefficients de Réflexion Subordonnés à un Poids

K. Drouiche et A. Seghier★
Université de Cergy Pontoise
LPTM, CNRS 8089
95301 Neuville Sur Oise Cedex
Karim.Drouiche@ptm.u-cergy.fr

★ Bât. de Mathématiques
Université de Paris Sud
91405 Orsay
Abdelatif.Seghier@math.u-psud.fr

17 Janvier 2001.

1 Introduction

Un travail récemment mené et achevé en dimension un, *([4])*, nous a permis de caractériser des extrapolations de spectres lorsqu'une information a priori était spécifiée. Cette information a priori est représentée dans notre cas par un poids m défini sur le domaine de l'image. Ce poids m est une fonction positive comme la fonction image et peut représenter en particulier une information de support, cette information supplémentaire permet une reconstruction plus fine de l'image par le biais d'une extrapolation de spectre plus près du "vrai spectre " et pour lequel le choix est optimal selon une certaine entropie (voir partie II). d'où le principe de super-résolution.

Les méthodes utilisées font intervenir uniquement des FFT directes et inverses, la complexité des algorithmes d'application est minimale. De plus, grâce à l'amélioration de la vitesse d'exécution des FFTs, *([5])*, nous pouvons proposer des algorithmes utilisables en temps réel.

Dans ce qui suit et par commodité, nous présentons le résultat en dimension un.

2 Méthodologie

Soit $\{c_{-n}, \cdots, c_{-1}, c_0, c_1, \cdots, c_n\}$ une suite de nombres complexes tels que:

- $$\overline{c}_k = c_{-k} \; et \; c_0 = 1, \; pour \;\; |k| \leq n,$$

- La matrice de Toëplitz $T_n(c) = (c_{i-j})_{0\leq i,\, j\leq n}$ est définie strictement positive (les valeurs propres de la matrice sont strictement positives).

On considère l'ensemble $\mathcal{F}_{2n}(c,\ \cdot)$ de suites finies:

$$(c,\ \beta) = \left\{\overline{\beta}_{2n},\ \cdots,\ \overline{\beta}_{n+1},\ \overline{c}_n,\ \cdots,\ \overline{c}_1,\ c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_n,\ \beta_{n+1},\ \cdots,\ \beta_{2n}\right\}$$

où la suite $(c_l)_{0\leq l\leq n}$ (définie ci-dessus) est fixée et $(\beta_l)_{n+1\leq l\leq 2n}$ est un multi-paramètre. A tout élément $(c,\ \beta)$ de $\mathcal{F}_{2n}(c,\ \cdot)$ on associe la matrice $T_{2n}(c,\ \beta) = (d_{i-j})_{0\leq i,\, j\leq 2n}$ avec $d_{i-j} = c_{i-j}$ si $|i-j| \leq n$ et $d_{|i-j|} = \beta_{i-j}$ si $|i-j| > n$.

Soit $\mathcal{F}^+_{2n}(c,\ \cdot) \subset \mathcal{F}_{2n}(c,\ \cdot)$ le sous-ensemble de suites de type positif caractérisé par

$$(c,\ \beta) \in \mathcal{F}^+_{2n}(c,\ \cdot) \Longleftrightarrow T_{2n}(c,\ \beta) \textit{ est définie strictement positive.}$$

On observe que $\mathcal{F}^+_{2n}(c,\ \cdot)$ est un ensemble convexe.

Soit Ψ une fonction entière définie dans le voisinage de 1, $\Psi(x) = \sum_{s\geq 0} b_s(x-1)^s$, avec un rayon de convergence positif. On définit à l'aide du calcul symbolique les opérateurs $\Psi(T_{2n}(c,\ \beta)) = \sum_{s\geq 0} b_s(T_{2n}(c,\ \beta) - I)^s$, où I est l'identité, de sorte que la norme $\|T_{2n}(c,\ \beta) - I\|$ soit inférieure au rayon spectral de la série ci-dessus. Soit une fonctionnelle d'entropie sur $\mathcal{F}^+_{2n}(c,\ \cdot)$ par:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^+_{2n}(c,\ \cdot) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (c,\ \beta) & \longrightarrow & \mathcal{E}_\psi(c,\ \beta) = \dfrac{1}{2n+1} Tr\left[\Psi(T_{2n}(c,\ \beta)\right] \end{array}$$

où $Tr[A]$ est la trace de la matrice A.

3 Résultat

Nous avons défini précédemment le cadre mathématique et nous donnons le résultat attendu. Soit $(p_s)_{s\geq 0}$ et $(q_s)_{s\geq 0}$ une double suite de polynômes orthogonaux associés à une extension optimale de la suite donnée $\{c_0,\ \cdots,\ c_n\}$ et $(\gamma_s)_{s\geq 0}$ la suite des coefficients de réflexion associés et subordonnés au poids m. Alors, nous donnons une caractérisation de l'extension à un pas en nous appuyant sur l'algorithme de *Levinson* (voir *Landau [7]*).

Theorem 1 *Nous avons les assertions suivantes:*

♦ *(i) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une extension à un pas relativement au poids m est*

$$|\gamma_{s+1}| = \left|\frac{\langle p_s,\ \chi^{s+1}\rangle_m}{\langle q_s,\ \chi^s\rangle_m}\right| < 1,\ \forall\, s \geq 2n+1,$$

♦ *(ii) si de plus*

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\gamma_s| < \infty$$

alors il existe un polynôme trigonométrique positif de degré inférieur ou égal à 2n, noté P_{2n} tel que:

$$h = \frac{m}{P_{2n}}$$

et

$$\begin{cases} \widehat{h}(l) &= c_l, \ |l| \leq n \\ \widehat{h}(l) &= \beta_{0,l}, \ n+1 \leq |l| \leq 2n. \end{cases} .$$

◀

Remark 1 *Comme nous l'avons dit précedemment les résultats s'étendent au cas de la dimension deux et donc applicables à l'image.*

4 Application

Nous montrons que l'information a priori reflétée par le poids m améliore de façon notable la résolution d'un signal ou d'une image lorsque le contenu spectral est tronqué (hautes fréquence mises à zéro).

Un cas particulier important est constitué par l'information de support dans le domaine de l'image ou du signal est bien décrite par le poids m. Les applications que nous proposerons en version finale du papier traiteront de la superésolution en imagerie médicale et en astronomie.

Références

[1] Ciarlet, P. J., *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Ed. Masson, 1982

[2] Csizar, I., *I-divergence geometry of distributions,* Annals of Probability, Vol. 3, p146, 1975.

[3] Delsartre, Ph., Genin, Y., Kamp, Y., *Schur parametrization of positive definite block-Toëplitz systems*, SIAM J. Appl. Math, Vol. 36, N^{o}1, Fév. 1979.

[4] Drouiche K., Seghier A., "Extension de fonctions de type positif avec poids. cas de la dimension 1", CRAS, Série Mathématiques, Mars 2001.

[5] Drouiche K., "A New Efficient Bit Revrsal Mapping", IEEE, ASSP, Janvier 2001.

[6] Gabardo, J. P., Extension of *positive definite distributions and maximum entropy*, Memoirs of AMS, N^{o}489, Mars 1993.

[7] Landau, H. J., *Maximum Entropy and the Moment Problem*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 16, N^{o}1, pp. 47-77, Janv. 1987.

[8] Grenander U., Szegö, G., Toeplitz forms and their applications, Univesity of California¨Press, Berkely and Los Angeles, 1958.