

RELATIONS ENTRE LES CRITÈRES DU MODULE CONSTANT ET DE WIENER

R. SUYAMA¹, R. R. F. ATTUX¹, J. M. T. ROMANO¹, M. BELLANGER²

¹DSPCOM – FEEC – UNICAMP, C.P. 6101, CEP. 13083-970 - Campinas, SP - Brésil

²CNAM – Electronique – 292, rue Saint-Martin 76141 – Paris Cedex 03 - France

{rsuyama, romisri, romano}@decom.fee.unicamp.br, bellanger@cnam.fr

Résumé – Dans cet article nous présentons une nouvelle approche pour étudier la conjecture sur les relations entre les critères de Wiener et du module constant (CM). Notre proposition comprend l'établissement d'une limite supérieure pour la fonction de coût CM, à partir d'un critère supervisé, et la dérivation d'un rapport entre les minima des critères de Wiener et CM. Les résultats sont évalués par des simulations.

Abstract – In this paper we propose a new approach to deal with the longstanding conjecture about the relations between Wiener and constant modulus criteria (CM). It involves the development of an upperbound for the CM cost function, composed by functions of a supervised equalization criterion, and the derivation of an expression that relate the Wiener and CM minima. The results are verified through simulations.

1. Introduction

Les techniques d'égalisation aveugle ou autodidacte ont fait l'objet d'un grand effort de recherche par la communauté de traitement du signal et des communications au cours des dernières années. Plusieurs approches ont été proposées et analysées, ce qui a permis l'établissement d'une base théorique pour le filtrage adaptative non supervisé.

Parmi les critères d'égalisation aveugle, il est particulièrement important celui proposé par Godard [1], dit aussi du module constant (CM). Cette technique a fait l'objet d'une vaste littérature, bien qu'il en reste certains aspects qui demeurent au niveau des conjectures.

Un problème ouvert consiste à établir d'une façon plus définitive les relations entre le critère CM et les solutions basées sur des critères supervisés, caractérisés par des principes théoriques solides et déjà consacrés. C'est dans cette direction que l'on envisage de contribuer dans le présent travail.

Dans ce sens on utilise deux critères supervisés assez similaires : le critère de Wiener et celui dit du MFE (*Mean fourth error*), à partir duquel l'algorithme LMF (*Least Mean Fourth*) a été proposé dans [2]. Deux résultats principaux sont obtenus avec notre approche : une limite supérieure pour le coût CM, dérivée du critère MFE, et un rapport entre les minima des critères supervisés et CM. Les expressions obtenues sont analysées par des¹ simulations.

2. Egalisation adaptative

La Fig. 1 illustre le schéma classique de l'égalisation où un signal transmis s_k subit les effets de bruit et de distorsion du canal de sorte à produire le signal x_k à sa sortie. Ce signal est appliqué à l'entrée d'un égaliseur linéaire qui fournit la sortie y_k la plus proche possible du message d'origine.

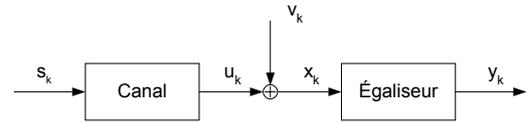


FIG. 1 : SCHEMA DE BASE D'UN SYSTEME DE COMMUNICATION

Etant donnée l'analyse envisagée dans la suite du travail, on suppose toutes les grandeurs réelles et que les symboles de transmission $\{+1, -1\}$ sont équiprobables. L'effet du bruit n'est pas pris en compte.

La sortie de l'égaliseur est donnée par

$$y_k = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{x}_k \quad (1)$$

où

$$\mathbf{w}^T = [w_0 \quad w_1 \quad \dots \quad w_L] \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_k^T = [x_k \quad x_{k-1} \quad \dots \quad x_{k-L}] \quad (3)$$

sont les vecteur des coefficients du filtre et de son signal d'entrée. Dans un contexte adaptatif, les coefficients sont mis à jour à chaque nouvelle donnée reçue de façon à minimiser l'écart entre l'information transmise et reçue, en accord avec un certain critère.

2.1 Critères pour l'égalisation supervisée

La grande majorité des algorithmes adaptatifs supervisés sont établis sur le critère de Wiener, soit de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (*MMSE*, *Minimum Mean Square Error*) :

$$J_{Wiener}(\mathbf{w}, d) = E\left\{\left(\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{x}_k - s_{k-d}\right)^2\right\} \quad (4)$$

¹ Ce travail reçoit un financement de la FAPESP-Brésil.

où d est le retard d'égalisation à être pris en compte dans la séquence d'apprentissage.

Il est bien connu que cette fonction de coût est unimodal pour un certain retard fixé et son minimum est dit *solution de Wiener*. Cependant, **si le retard est considéré comme un paramètre d'optimisation, il y aura plusieurs solutions chacune avec des performances correspondantes.**

À partir de l'équation (1) il vient:

$$J_{Wiener}(\mathbf{w}, d) = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{p}_d + 1 \quad (5)$$

où

$$\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_k^T\} \quad (6)$$

$$\mathbf{p}_d = E\{\mathbf{x}_k \cdot s_{k-d}\} \quad (7)$$

expriment les corrélations entre les signaux correspondants. La minimisation de (5) pour un certain d conduit à:

$$\mathbf{w}_{Wiener,d} = \mathbf{R}_x^{-1} \cdot \mathbf{p}_d \quad (8)$$

Cette solution est à la base de nombreux algorithmes supervisés comme le LMS et d'autres [3].

Le critère MFE est basé sur la minimisation de la fonction de coût :

$$J_F(\mathbf{w}, d) = E\{(\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{x}_k - s_{k-d})^4\} \quad (9)$$

qui donne l'origine à l'algorithme LMF proposé dans [2].

Les critères (4) et (9) sont tous les deux unimodales pour un retard fixé. La référence [4] montre que les filtres issus de ces critères ne sont pas équivalents, bien que ses performances s'approchent.

2.2 Critère du module constant

Pour les critères aveugles ou autodidactes, on ne dispose pas d'une séquence d'apprentissage pour procéder à l'optimisation de l'égaliseur. C'est le cas du critère CM qui fait l'objet de cet article. Sa fonction de coût est donnée par :

$$J_{CM}(\mathbf{w}) = E\left\{\left(|y_k|^2 - R_2\right)^2\right\} \quad (10)$$

avec la constante

$$R_2 = \frac{E\{|s_k|^4\}}{E\{|s_k|^2\}} \quad (11)$$

L'étude de la fonction de coût CM a toujours montré que cette fonction est multimodale dans la majorité des cas d'intérêt [5]. Cela est vu normalement comme un handicap du critère CM si comparé à celui de Wiener. Néanmoins, si l'on considère la variable d comme un degré de liberté dans l'optimisation, on ouvre des perspectives distinctes pour l'étude des relations entre les deux critères. Ces relations ont déjà fait l'objet d'autres références dont par exemple [6,7].

Dans la suite, étant fait un rappel des techniques plus fondamentales dans 2.1 et 2.2, on passe à notre approche pour l'établissement de nouveaux rapports entre les critères supervisés et non supervisés ainsi que les analyses correspondantes, qui constituent les contributions du présent travail.

3. La fonction de coût CM vue comme une composition de fonctions issues des critères supervisés

Ayant en vue les hypothèses de travail, la fonction de coût CM peut être réécrite telle que :

$$J_{CM}(\mathbf{w}) = E\{(y_k^2 - 1)^2\} = E\{(y_k - s_{k-d})^2 (y_k + s_{k+d})^2\} \quad (12)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz [8], soit

$$E\{ab\}^2 \leq E\{a^2\}E\{b^2\} \quad (13)$$

on peut écrire :

$$J_{CM}(\mathbf{w})^2 \leq E\{(y_k - s_{k-d})^4\} \cdot E\{(y_k + s_{k-d})^4\} \quad (14)$$

Comme $J_{CM} \geq 0$, il vient alors :

$$J_{CM}(\mathbf{w}) \leq \sqrt{E\{(y_k - s_{k-d})^4\} \cdot E\{(y_k + s_{k-d})^4\}} \quad (15)$$

L'équation (13) établit une limite supérieure pour la fonction de coût CM, donnée par des fonctions issues du critère MFE. Il est intéressant de noter que le résultat obtenu explicite une association entre les différents retards d'égalisation et le critère CM. Il s'agit donc d'un lien bien défini et peu exploité entre une technique supervisée et une autre aveugle.

Une illustration peut être fournie si l'on prend comme exemple un canal :

$$\mathbf{h}_1(z) = 1 + 0.4z^{-1} \quad (16)$$

pour obtenir ensuite les limites correspondantes aux retards donnés par $d = 0, 1$ et 2 (Figs. 2-4).

Dans la Fig. 2, il est montrée la surface de la fonction de coût CM limitée par la limite calculée dans (15) pour un retard $d = 0$. On peut observer que la limite supérieure s'approche du critère CM pour un certain pair de minima. Le même phénomène se vérifie avec $d = 1$, mais pour un autre pair de minima.

Par contre, il est intéressant de noter le résultat pour le retard $d = 2$. Dans ce cas, la limite supérieure est logée au-dessus du maximum de la fonction CM.

Cette illustration des courbes qui représentent les limites supérieures peut aider à comprendre les raisons pour lesquelles seulement quelques solutions de Wiener sont présentes dans la fonction de coût CM. En fait, à partir de l'exemple considéré, on peut établir une limite générale composée par les limites correspondantes aux $d = 0, 1$ et 2 , de sorte à constituer la surface présentée à la Fig. 5.

Il est facile à vérifier que, dans la Fig. 5, on ne trouve plus de traces de la courbe correspondante au retard $d = 2$. Evidemment les surfaces correspondantes aux cas $d = 0$ et 1 représentent des limites plus restrictives pour J_{CM} . Il n'est donc pas surprenant que les minima associés au retard d'égalisation égal à 2 ne soient pas présentes dans le critère CM.

Finalement il vaut remarquer que la Fig. 5 peut être vue comme une approximation de J_{CM} , soit la meilleure approximation obtenue à partir de la limite obtenue dans (15).

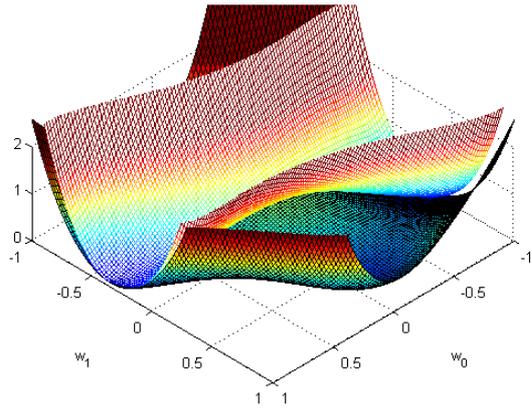


FIG. 2 : SURFACE LIMITE POUR UN RETARD $d = 0$

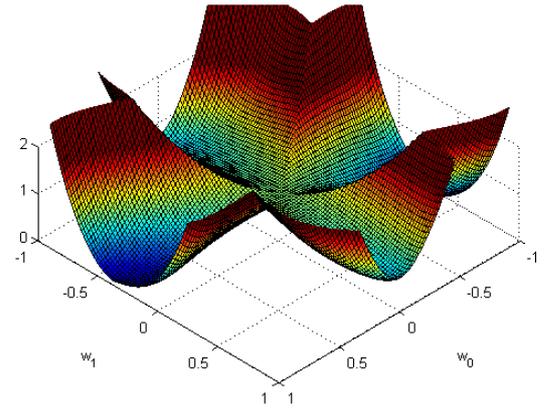


FIG. 5 : LIMITE OBTENUES PAR LES SURFACES CORRESPONDENTES AUX CAS $d = 0, 1$ ET 2 .

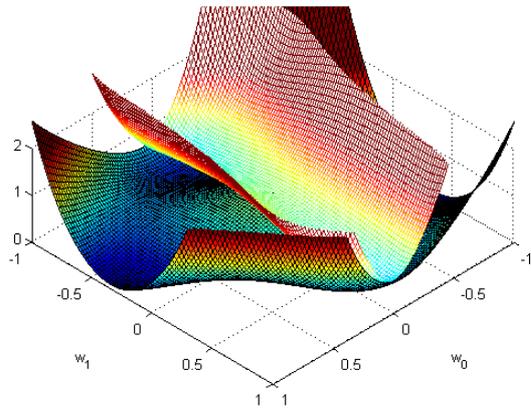


FIG. 3 : SURFACE LIMITE POUR UN RETARD $d = 1$

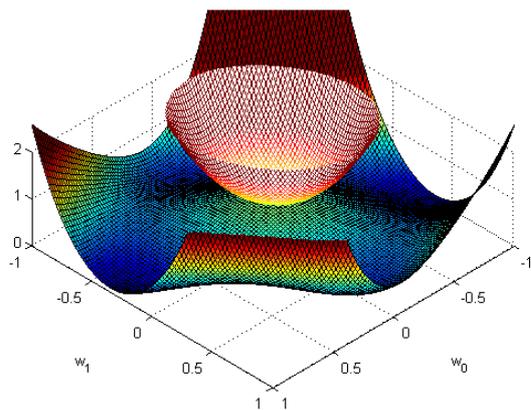


FIG. 4 : SURFACE LIMITE POUR UN RETARD $d = 2$

3.1 Relations entre les minima

Etant donné l'intérêt dans la localisation des minima des critères, il est important de vérifier la qualité de la limite obtenue dans les régions au tour de ces points spécifiques.

Dans une situation idéale, où il est possible d'attendre l'inversion parfaite du canal (la condition dit du forçage à zéro ou ZF), l'expression (15) devient une égalité pour le cas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{ZF}$ (égaliseur ZF), ce qui montre que les surfaces se touchent exactement aux points de minimum.

Pour les autres points, il y aura toujours une séparation entre les surfaces. D'autre part, les distances seront d'autant moins importantes à la mesure que l'on s'approche aux régions qui mènent à des bonnes conditions d'égalisation. Les courbes s'écartent pour les solutions mauvaises, soit les cas normalement associés à la condition d'œil fermé.

On considère alors une situation de travail proche à la condition ZF. Dans ce cas la fonction de coût pour la région au voisinage du minimum CM peut être approchée par:

$$J_{CM}(\mathbf{w}) \cong \sqrt{E\{(y_k - s_{k-d})^4\} \cdot E\{(y_k + s_{k-d})^4\}} \quad (17)$$

Cette fonction par contre peut être divisée dans deux parties : celle associée au minimum \mathbf{w}_1 , et l'autre associée à son symétrique, $-\mathbf{w}_1$. Alors le premier terme à la droite de (15) est dominant dans la détermination de J_{CM} si l'on considère des régions proches de \mathbf{w}_1 . Par contre le deuxième terme domine l'obtention de la fonction de coût pour les régions au voisinage de $-\mathbf{w}_1$. Finalement, en prenant en compte que dans ces deux régions considérées la fonction de coût J_{CM} attendent des valeurs peu significatives, l'approximation suivante peut être faite:

$$E\{(y_k \pm s_{k-d})^4\} \cong E\{(y_k \pm s_{k-d})^2\}^2 \quad (18)$$

où l'égalité demeure quand il est possible d'atteindre la condition ZF. Alors, en appliquant ce résultat à l'expression (15), il vient:

$$J_{CM}(\mathbf{w}) \cong E\{(y_k - s_{k-d})^2\} \cdot E\{(y_k + s_{k-d})^2\} \quad (19)$$

ou encore

$$J_{CM}(\mathbf{w}) \cong J_{Wiener}(\mathbf{w}, d) \cdot J_{Wiener}(-\mathbf{w}, d) \quad (20)$$

L'équation (20) propose une relation directe entre les fonctions de coût CM et celle de Wiener, de façon à établir un lien mieux défini entre ces deux critères. Il est encore possible d'obtenir quelques propriétés à partir de cette expression.

Il est bien connu qu'une condition pour un point de minimum est l'annulation du gradient de la fonction. En remplaçant l'équation (5) dans (20), et en appliquant l'opérateur gradient, il peut être obtenu l'expression:

$$\frac{\partial J_{CM}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}^T} = \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{w}(\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{w} - 2\mathbf{p}_d \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{p}_d \quad (21)$$

Si l'on suppose que \mathbf{w} est un minimum du critère CM, et en multipliant par \mathbf{R}_x^{-1} à gauche, la condition suivante est atteinte:

$$\mathbf{w}_{CM}(\mathbf{w}_{CM}^T \cdot \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{w}_{CM}) + \mathbf{w}_{CM} - 2\mathbf{w}_{Wiener,d} \mathbf{w}_{CM}^T \cdot \mathbf{p}_d = 0 \quad (22)$$

Alors il vient l'expression ci-dessus pour $\mathbf{w}_{Wiener,d}$:

$$\mathbf{w}_{Wiener,d} \cong \frac{\mathbf{w}_{CM}(\mathbf{w}_{CM}^T \cdot \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{w}_{CM} + 1)}{2\mathbf{w}_{CM}^T \cdot \mathbf{p}_d} \quad (23)$$

Cette expression fournit de façon explicite un minimum de Wiener à partir d'une solution CM, tout en exprimant le chemin inverse de façon implicite. Il est intéressant de noter que (23) suppose des solutions colinéaires, ce qui vient en accord avec des résultats donnés dans d'autres travaux [5,6].

En ayant comme exemple le canal dans (16), on a obtenu les égaliseurs CM à deux coefficients par l'estimation du gradient de la fonction de coût. Avec ces résultats et l'application de l'équation (20), la Table 1 a été obtenue. On peut donc observer dans cet exemple la qualité de l'estimation de \mathbf{w}_{Wiener} .

En faisant alors la même procédure pour le canal :

$$\mathbf{h}_2(z) = 1 + 0.6z^{-1} + 0.4z^{-2} \quad (24)$$

et avec un égaliseur à trois coefficients, on obtient les résultats présentés à la Table 2.

Ces deux résultats obtenus à titre d'illustration confirment la validité des approximations considérées, car les estimations pour les filtres de Wiener correspondants sont assez proches des valeurs exactes. Cela met en évidence l'intérêt de l'approche proposée dans le présent travail et la solidité des relations établies entre les deux critères

TABLE 1 : ESTIMATION DE L'EGALISEUR DE WIENER A PARTIR DE \mathbf{w}_{CM} POUR LE CANAL \mathbf{h}_1 – EGALISEUR AVEC 2 COEFICIENTS

\mathbf{w}_{CM}	\mathbf{w}_{Wiener}	EQM	\mathbf{w}_{Wiener} dado \mathbf{w}_{CM}
[0.9497 -0.3282]	[0.9784 -0.3374]	0.14694	[0.9609 -0.3321]
[0.0399 0.7515]	[0.0540 0.8435]	0.36736	[0.0437 0.8230]

TABLE 2 : ESTIMATION DE L'EGALISEUR DE WIENER A PARTIR DE \mathbf{w}_{CM} POUR LE CANAL \mathbf{h}_2 – EGALISEUR AVEC 3 COEFICIENTS

\mathbf{w}_{CM}	\mathbf{w}_{Wiener}	EQM	\mathbf{w}_{Wiener} dado \mathbf{w}_{CM}
[0.8945 -0.5256 0.0532]	[0.9507 -0.5573 0.0578]	0.22209	[0.9208 -0.54107 0.0547]
[0.0111 0.8821 -0.4932]	[0.0131 0.9395 -0.5226]	0.22948	[0.0115 0.9100 -0.5088]

4. Conclusion

Les relations entre les critères CM et de Wiener, en utilisant aussi le critère supervisé dit du MFE, ont été investiguées dans le présent article.

Une limite supérieure a été établie pour la fonction de coût J_{CM} à partir de la fonction MFE. Cette limite a permis d'obtenir une approximation de la fonction J_{CM} tout en considérant plusieurs cas de retards d'égalisation. Finalement il a été aussi établi un rapport entre les minima CM et de Wiener.

Bien qu'assez simples, les exemples considérés ont confirmé la validité des proposition du travail, dont les contributions envisagent surtout d'ouvrir des nouvelles perspectives d'étude des liens entre les critères d'égalisation supervisée et autodidacte.

Références

- [1] D. N. Godard. *Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems*. IEEE Transactions on Communications, 28(11), 1867-1875, 1980.
- [2] E. Walach et B. Widrow. *The Least Mean Fourth (LMF) Adaptive Algorithm and Its Family*. IEEE Transactions on Information Theory, IT-30(2), 275-283, 1984.
- [3] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory* (3th edition). Prentice-Hall, 1996.
- [4] S. C. Pei et C. C. Tseng. *Least P-Power Error Criterion for Adaptive FIR Filter*. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 12(9), 1540-1547, 1994.
- [5] Z. Ding, C. R. Johnson Jr. et A. Kennedy. *On the (Non) Existence of Undesirable Equilibria of Godard Blind Equalizers*. IEEE Transactions on Signal Processing, 40(10), 2425-2432, 1992.
- [6] H. H. Zeng, L. Tong et C. R. Johnson Jr. *An Analysis of Constant Modulus Receivers*. IEEE Transactions on Signal Processing, 47(11), 2990-2999, 1999.
- [7] P. Schniter et C. R. Johnson Jr. *Bounds for the MSE Performance of Constant Modulus Estimators*. IEEE Transactions on Information Theory, 46(7), 2544-2560, 2000.
- [8] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* (3th edition). McGraw-Hill, 1991.