

Résonance stochastique et performance améliorée par le bruit pour un estimateur optimal

David ROUSSEAU, François CHAPEAU-BLONDEAU

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), FRE CNRS 2656, Université d'Angers,
62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 ANGERS, France.

david.rousseau@univ-angers.fr, chapeau@univ-angers.fr,
<http://www.istia.univ-angers.fr/~chapeau/>

Résumé – Un estimateur optimal peut voir sa performance améliorée par une augmentation du niveau de bruit, une forme de résonance stochastique. Ceci est montré au moyen d'un estimateur bayésien optimal opérant sur un mélange signal-bruit non linéaire avec du bruit non gaussien. Le problème considéré est l'estimation de la fréquence d'un signal périodique pollué par un bruit de phase. L'estimateur bayésien optimal minimisant l'erreur quadratique moyenne d'estimation est explicitement établi. L'existence de conditions où cette erreur minimale diminue lorsque le niveau du bruit augmente est démontrée, à la fois de façon théorique et par simulation Monte-Carlo de l'estimateur optimal.

Abstract – An optimal estimator can have its performance improved by an increase in the level of noise, a form of stochastic resonance. This is established by means of an optimal Bayesian estimator operating on a nonlinear signal-noise mixture with non-Gaussian noise. The addressed problem is the estimation of the frequency of a periodic signal corrupted by a phase noise. The optimal Bayesian estimator minimizing the mean square estimation error is explicitly derived. Conditions where this minimal error decreases when the noise level increases are exhibited, both theoretically and with a Monte Carlo simulation of the optimal estimator.

1 Introduction

La résonance stochastique est un effet non linéaire par lequel le traitement d'un signal peut se voir amélioré grâce à l'action du bruit (voir [1, 2, 3] pour des revues récentes). Cet effet paradoxal a été mis en évidence pour la première fois il y a environ une vingtaine d'années dans le contexte de la physique non linéaire. Il a depuis lors été étendu et observé dans une grande variété de processus non linéaires, incluant des circuits électroniques [4, 5, 6], des dispositifs optiques [7, 8], des systèmes neuronaux [9, 10]. La résonance stochastique peut survenir sous des formes diverses, selon les signaux, selon le système réalisant le couplage signal-bruit non linéaire, et selon la mesure de performance qui est améliorée grâce au bruit.

On a pu ainsi mettre en évidence des processus non linéaires pour lesquels le rapport signal sur bruit en sortie [11, 12], ou l'intercorrélolation entrée-sortie [13, 14], ou l'information mutuelle entrée-sortie [15, 16], ou la probabilité de détection en sortie [17, 18], ou l'erreur d'estimation [19], ou d'autres mesures [20, 21, 22], pouvaient être améliorés par l'augmentation du niveau de bruit.

Pendant longtemps, la résonance stochastique a été mise en évidence uniquement dans des processus ou traitements *sous-optimaux* [23, 24, 25]. Dans chacune des situations où la résonance stochastique a été établie, pour une mesure de performance donnée, une amélioration par augmentation du bruit est montrée possible uniquement pour la performance de dispositifs sous-optimaux; et si le dispositif optimal est introduit, alors sa performance subit une dégradation monotone lorsque le niveau de bruit est augmenté.

Ce n'est que très récemment que la résonance stochastique a été étendue aux traitements optimaux [26, 27]. Il a ainsi été

montré qu'il est possible, en présence de certains mélanges signal-bruit non linéaires et de bruits non gaussiens, d'obtenir des détecteurs optimaux dont la performance s'améliore lorsque le détecteur fonctionne à des niveaux de bruit plus élevés, pour certaines gammes de niveau de bruit.

Ici, nous étendons la possibilité de résonance stochastique dans les traitements optimaux. Nous considérons cette fois un problème d'estimation, et montrons qu'il est possible d'obtenir des estimateurs optimaux dont la performance s'améliore lorsque l'estimateur opère à des niveaux de bruit plus élevés.

2 Estimation bayésienne optimale

Nous nous plaçons dans le cadre classique de l'estimation bayésienne [28]. Un signal observable $x(t)$ dépend d'un paramètre ν dont les valeurs possibles a priori sont distribuées selon la densité de probabilité $p_\nu(u)$. En observant $x(t)$ à N dates distinctes $t_j, j = 1$ à N , on collecte N échantillons $x_j = x(t_j)$. À partir de ces données $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, on souhaite estimer la valeur de ν qui a produit les observations.

Pour un estimateur donné $\hat{\nu}(\mathbf{x})$, l'erreur quadratique moyenne d'estimation est

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[(\nu - \hat{\nu})^2 | \mathbf{x}] = \int [\nu - \hat{\nu}(\mathbf{x})]^2 p(\nu | \mathbf{x}) d\nu, \quad (1)$$

qui peut également être mise sous la forme

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = [\hat{\nu} - \mathbb{E}(\nu | \mathbf{x})]^2 + \text{var}(\nu | \mathbf{x}), \quad (2)$$

avec l'espérance $\mathbb{E}(\nu | \mathbf{x}) = \int \nu p(\nu | \mathbf{x}) d\nu$ et la variance $\text{var}(\nu | \mathbf{x}) = \int [\nu - \mathbb{E}(\nu | \mathbf{x})]^2 p(\nu | \mathbf{x}) d\nu$.

Comme $\text{var}(\nu | \mathbf{x})$ de l'Éq. (2) est non négative et indépendante de $\hat{\nu}$, l'estimateur bayésien optimal qui minimise l'erreur $\mathcal{E}(\mathbf{x})$,

pour toute observation \mathbf{x} donnée, se déduit comme

$$\hat{\nu}_B(\mathbf{x}) = E(\nu|\mathbf{x}) = \int \nu p(\nu|\mathbf{x}) d\nu. \quad (3)$$

L'estimateur $\hat{\nu}_B(\mathbf{x})$ de l'Éq. (3) atteint l'erreur minimale

$$\mathcal{E}_B(\mathbf{x}) = \text{var}(\nu|\mathbf{x}) = \int [\nu - E(\nu|\mathbf{x})]^2 p(\nu|\mathbf{x}) d\nu, \quad (4)$$

pour toute observation \mathbf{x} donnée. Par conséquent, $\hat{\nu}_B(\mathbf{x})$ atteint aussi le minimum

$$\bar{\mathcal{E}}_B = \int \mathcal{E}_B(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5)$$

de l'erreur d'estimation moyennée sur toutes les observations \mathbf{x} possibles, où $\int \cdot d\mathbf{x}$ représente l'intégrale N -dimensionnelle $\int \dots \int \cdot dx_1 \dots dx_N$.

Un modèle du processus produisant l'observation $x(t)$ à partir du paramètre ν (et du bruit polluant l'observation), permet d'établir la densité de probabilité conditionnelle $p(\mathbf{x}|\nu)$, puis la formule de Bayes permet d'obtenir la densité a posteriori $p(\nu|\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\nu)p_\nu(\nu)/p(\mathbf{x})$, où $p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}|\nu)p_\nu(\nu)d\nu$, donnant accès à l'estimateur optimal $\hat{\nu}_B$ de l'Éq. (3) et à sa performance mesurée par l'Éq. (4) ou l'Éq. (5).

En général, lorsque l'observation $x(t)$ incorpore l'effet d'un bruit polluant, dans les conditions usuelles (i.e. mélange signal-bruit additif, bruit gaussien), l'estimateur optimal $\hat{\nu}_B$ de l'Éq. (3) possède une performance mesurée par l'Éq. (4) ou l'Éq. (5), qui se dégrade de façon monotone à mesure que le niveau du bruit augmente. Nous montrons ici, avec un mélange signal-bruit non linéaire et du bruit non gaussien, qu'il est possible d'obtenir un estimateur optimal dont la performance peut s'améliorer lorsque le niveau du bruit augmente.

3 Un mélange signal-bruit non linéaire

Le processus considéré est constitué par une onde périodique $w(\nu t)$ de fréquence ν (inconnue, à estimer), où $w(t)$ est une onde "mère" de période unité, par exemple $w(t) = \sin(2\pi t)$ ou autre. Un bruit $\eta(t)$ pollue la phase de l'onde de façon à produire le signal observable

$$x(t) = w[\nu t + \eta(t)]. \quad (6)$$

Une concrétisation simple de $x(t)$ de l'Éq. (6) est fournie par une onde plane se propageant dans un milieu fluctuant, ou bien rayonnée ou captée par un transducteur animé d'un mouvement aléatoire.

Nous considérons les échantillons de bruit $\eta(t_j)$ statistiquement indépendants pour des t_j distincts, si bien que la densité conditionnelle $p(\mathbf{x}|\nu)$ se factorise en $p(\mathbf{x}|\nu) = \prod_{j=1}^N p(x_j|\nu)$. Également, les échantillons $\eta(t_j)$ sont identiquement distribués, de fonction de répartition $F_\eta(u)$ et de densité de probabilité $f_\eta(u) = dF_\eta/du$.

Afin de permettre un traitement analytique complet de l'estimateur optimal, nous considérons le cas simple où $w(t)$ est un signal carré de période 1 avec $w(t) = 1$ si $t \in [0, 1/2[$ et $w(t) = -1$ si $t \in [1/2, 1[$. Nous avons alors la densité conditionnelle

$$p(x_j|\nu) = \Pr\{x_j = -1|\nu\}\delta(x_j+1) + \Pr\{x_j = 1|\nu\}\delta(x_j-1), \quad (7)$$

avec la probabilité

$$\Pr\{x_j = 1|\nu\} = \Pr\{w[\nu t_j + \eta(t_j)] = 1\} \quad (8)$$

$$= \Pr\left\{\nu t_j + \eta(t_j) \in \bigcup_{\ell} [\ell, \ell + 1/2[\right\} \quad (9)$$

$$= \Pr\left\{\eta(t_j) \in \bigcup_{\ell} [\ell - \nu t_j, \ell - \nu t_j + 1/2[\right\} \quad (10)$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int_{\ell - \nu t_j}^{\ell - \nu t_j + 1/2} f_\eta(u) du \quad (11)$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} [F_\eta(\ell - \nu t_j + 1/2) - F_\eta(\ell - \nu t_j)], \quad (12)$$

ℓ entier, et

$$\Pr\{x_j = -1|\nu\} = 1 - \Pr\{x_j = 1|\nu\}. \quad (13)$$

La densité $p(\mathbf{x}|\nu) = \prod_{j=1}^N p(x_j|\nu)$ incorpore, selon l'Éq. (7), des produits de quantités de la forme $\Pr\{x_j = \pm 1|\nu\}\delta(x_j \mp 1)$. La densité a posteriori découle alors comme

$$p(\nu|\mathbf{x}) = \frac{p_\nu(\nu) \prod_{j=1}^N \Pr\{x_j|\nu\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_\nu(\nu) \prod_{j=1}^N \Pr\{x_j|\nu\} d\nu}, \quad (14)$$

où le vecteur d'observations $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ est limité aux 2^N états possibles de la forme $(x_1 = \pm 1, \dots, x_N = \pm 1)$.

Les Éqs. (12) et (13) permettent une évaluation explicite des probabilités $\Pr\{x_j|\nu\}$ pour $x_j = \pm 1$, en fonction des propriétés du bruit $\eta(t)$ véhiculées par $F_\eta(u)$. Ces probabilités $\Pr\{x_j|\nu\}$ constituent tout ce qu'il faut pour accéder à la densité conditionnelle $p(\nu|\mathbf{x})$ de l'Éq. (14), qui ouvre la voie pour le calcul explicite (éventuellement par intégration numérique) de l'estimateur bayésien optimal de l'Éq. (3), et de sa performance mesurée par les Éqs. (4) ou (5).

Explicitement, $\mathcal{E}_B(\mathbf{x})$ de l'Éq. (4), une fonction de l'observation \mathbf{x} , est calculable comme

$$\mathcal{E}_B(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 p(\nu|\mathbf{x}) d\nu - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \nu p(\nu|\mathbf{x}) d\nu \right]^2, \quad (15)$$

et sa moyenne $\bar{\mathcal{E}}_B$ selon \mathbf{x} de l'Éq. (5) découle comme

$$\bar{\mathcal{E}}_B = \sum_{x_1 \in \{-1, 1\}} \dots \sum_{x_N \in \{-1, 1\}} \mathcal{E}_B(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^{+\infty} p_\nu(\nu) \prod_{j=1}^N \Pr\{x_j|\nu\} d\nu, \quad (16)$$

la somme multiple courant sur les 2^N états possibles pour le vecteur d'observation \mathbf{x} .

4 Performance améliorée par le bruit

Pour illustration de la possibilité d'améliorer la performance de l'estimateur bayésien optimal $\hat{\nu}_B(\mathbf{x})$ en élevant le niveau

du bruit, nous considérons pour le bruit $\eta(t)$ les mélanges bi-gaussiens, définis par la densité standardisée ($0 \leq m < 1$)

$$f_{gm}(u) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-m^2}} \left\{ \exp\left[-\frac{(u+m)^2}{2(1-m^2)}\right] + \exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2(1-m^2)}\right] \right\}, \quad (17)$$

associée à la fonction de répartition

$$F_{gm}(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{u+m}{\sqrt{2}\sqrt{1-m^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{u-m}{\sqrt{2}\sqrt{1-m^2}}\right) \right]. \quad (18)$$

Avec $f_\eta(u) = f_{gm}(u/\sigma_\eta)/\sigma_\eta$ et $F_\eta(u) = F_{gm}(u/\sigma_\eta)$, la Fig. 1 représente l'erreur efficace $\bar{\mathcal{E}}_B^{1/2}$ de l'estimateur bayésien optimal, en fonction de l'amplitude efficace σ_η du bruit $\eta(t)$.

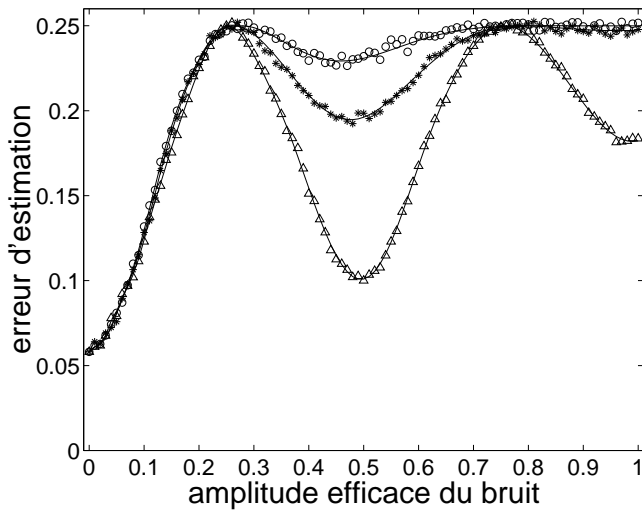


FIG. 1 – Erreur efficace $\bar{\mathcal{E}}_B^{1/2}$ de l'estimateur bayésien optimal, en fonction de l'amplitude efficace σ_η du bruit $\eta(t)$ choisi comme un mélange bi-gaussien de paramètre de mélange m . Les traits pleins représentent $\bar{\mathcal{E}}_B^{1/2}$ de la théorie de l'Éq. (16); les jeux de points discrets représentent $\bar{\mathcal{E}}_B^{1/2}$ évaluée numériquement par simulation Monte-Carlo de l'estimateur optimal de l'Éq. (3); avec $m = 0.9$ (\circ), $m = 0.95$ ($*$), $m = 0.99$ (\triangle). La densité a priori $p_\nu(u)$ est gaussienne de moyenne $m_\nu = 1$ et d'écart-type $\sigma_\nu = 0.25$, avec $N = 6$ mesures équiréparties au pas temporel 0.2 de $t_1 = 0$ à $t_6 = 1$.

Les évolutions de la Fig. 1 confrontent les résultats théoriques établis ci-avant, avec une évaluation Monte-Carlo de la performance de l'estimateur optimal, l'ensemble montrant un "parfait" accord, vu que la théorie est exacte. La Fig. 1 montre aussi clairement l'effet de résonance stochastique : sur certaines gammes du niveau de bruit σ_η , l'erreur d'estimation $\bar{\mathcal{E}}_B^{1/2}$ de l'estimateur optimal se met à décroître lorsque le niveau de bruit croît.

D'autres distributions du bruit $\eta(t)$ permettent d'obtenir un effet similaire de résonance stochastique. Le modèle théorique développé ici permet de tester des distributions quelconques du bruit. Il est possible de vérifier que le bruit uniforme permet

l'effet de résonance stochastique. Toutefois, dans les conditions explorées avec le présent modèle sur un signal carré $s(t)$, nous avons observé que le bruit gaussien ne permet pas un effet de résonance stochastique : l'erreur d'estimation augmente de façon monotone lorsque l'amplitude efficace σ_η du bruit gaussien croît. C'est le comportement limite extrapolable à partir de la Fig. 1 lorsque $m \rightarrow 1$.

5 Conclusion

La résonance stochastique en estimation optimale décrite ici présente un large parallélisme avec la résonance stochastique en détection optimale introduite dans [26, 27]. Ces avancées récentes étendent l'inventaire et l'investigation des propriétés et des potentialités de la résonance stochastique. Il est possible que d'autres processus optimaux se prêtent aussi à un effet de résonance stochastique, au delà des conditions adoptées ici afin d'obtenir une démonstration de faisabilité de principe.

Au plan conceptuel, la résonance stochastique revêt une importance patente, en montrant qu'en non-linéaire le bruit n'est plus nécessairement une nuisance, mais qu'il peut profiter au signal utile en coopérant avec lui. Qui plus est, l'amélioration grâce au bruit peut se produire pour des processus optimaux, comme le confirment les présents résultats. Ces propriétés incitent à poursuivre l'étude des nombreux aspects de la résonance stochastique qui demeurent à explorer pour le traitement non linéaire de l'information.

Dans cette perspective du traitement non linéaire de l'information, il est intéressant d'avoir présent à l'esprit une classe de processus naturels atteignant de remarquables performances dans ce secteur : les processus neuronaux. Ces processus sont intrinsèquement non linéaires et bruités. Ils mettent en jeu un codage en phase de l'information, sous forme de trains d'impulsions stéréotypées (les potentiels d'action) véhiculant l'information via le séquençage temporel des impulsions sur un train, et le séquençage spatial sur plusieurs trains émis en parallèle. De tels trains d'impulsions interagissent avec des entités non linéaires (les neurones) à seuil et saturation. Il a été montré que la résonance stochastique peut opérer sous des formes très variées dans ces processus neuronaux [9, 10], offrant une propriété non linéaire spécifique pour contribuer à la performance globale en traitement du signal et de l'information.

L'étude de tels processus de traitement non linéaire du signal et de l'information, incluant la résonance stochastique, demeure encore largement ouverte pour l'exploration, et présente des enjeux intéressants à la fois la connaissance fondamentale et les applications.

Références

- [1] G. P. Harmer, B. R. Davis, D. Abbott, "A review of stochastic resonance : Circuits and measurement", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 51, pp. 299–309, 2002.
- [2] B. Andò, S. Graziani, *Stochastic Resonance : Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

- [3] S. Maitai, B. Kosko, "Adaptive stochastic resonance", *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, pp. 2152–2183, 1998.
- [4] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, "Noise-assisted signal transmission in a nonlinear electronic comparator : Experiment and theory", *Signal Processing*, vol. 56, pp. 293–303, 1997.
- [5] X. Godivier, J. Rojas-Varela, F. Chapeau-Blondeau, "Noise-assisted signal transmission via stochastic resonance in a diode nonlinearity", *Electronics Letters*, vol. 33, pp. 1666–1668, 1997.
- [6] D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock, N. G. Stocks, "Stochastic resonance in electrical circuits – I : Conventional stochastic resonance", *IEEE Transactions on Circuits and Systems – II : Analog and Digital Signal Processing*, vol. 46, pp. 1205–1214, 1999.
- [7] M. I. Dykman, G. P. Golubev, I. K. Kaufman, D. G. Luchinsky, P. V. E. McClintock, E. A. Zhukov, "Noise-enhanced optical heterodyning in an all-optical bistable system", *Applied Physics Letters*, vol. 67, pp. 308–310, 1995.
- [8] F. Vaudelle, J. Gazengel, G. Rivoire, X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance and noise-enhanced transmission of spatial signals in optics : The case of scattering", *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 15, pp. 2674–2680, 1998.
- [9] A. Bulsara, E. W. Jacobs, T. Zhou, F. Moss, L. Kiss, "Stochastic resonance in a single neuron model : Theory and analog simulation", *Journal of Theoretical Biology*, vol. 152, pp. 531–555, 1991.
- [10] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier, N. Chambet, "Stochastic resonance in a neuron model that transmits spike trains", *Physical Review E*, vol. 53, pp. 1273–1275, 1996.
- [11] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier, "Theory of stochastic resonance in signal transmission by static nonlinear systems", *Physical Review E*, vol. 55, pp. 1478–1495, 1997.
- [12] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, "Stochastic resonance", *Reviews of Modern Physics*, vol. 70, pp. 223–287, 1998.
- [13] J. J. Collins, C. C. Chow, A. C. Capela, T. T. Imhoff, "Aperiodic stochastic resonance", *Physical Review E*, vol. 54, pp. 5575–5584, 1996.
- [14] F. Chapeau-Blondeau, J. Rojas-Varela, "Nonlinear signal propagation enhanced by noise via stochastic resonance", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 10, pp. 1951–1959, 2000.
- [15] A. R. Bulsara, A. Zador, "Threshold detection of wide-band signals : A noise-controlled maximum in the mutual information", *Physical Review E*, vol. 54, pp. R2185–R2188, 1996.
- [16] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance in the information capacity of a nonlinear dynamic system", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 8, pp. 581–590, 1998.
- [17] M. E. Inchiosa, A. R. Bulsara, "Signal detection statistics of stochastic resonators", *Physical Review E*, vol. 53, pp. R2021–R2024, 1996.
- [18] V. Galdi, V. Pierro, I. M. Pinto, "Evaluation of stochastic-resonance-based detectors of weak harmonic signals in additive white Gaussian noise", *Physical Review E*, vol. 57, pp. 6470–6479, 1998.
- [19] D. Rousseau, G. V. Anand, F. Chapeau-Blondeau, "Non-linear estimation from quantized signals : Quantizer optimization and stochastic resonance.", in *Proceedings 3rd International Symposium on Physics in Signal and Image Processing*, Grenoble, France, 28–31 Jan. 2003.
- [20] F. Chapeau-Blondeau, "Input–output gains for signal in noise in stochastic resonance", *Physics Letters A*, vol. 232, pp. 41–48, 1997.
- [21] P. O. Amblard, S. Zozor, "Cyclostationarity and stochastic resonance in threshold devices", *Physical Review E*, vol. 59, pp. 5009–5020, 1999.
- [22] D. Rousseau, J. Rojas Varela, F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance for nonlinear sensors with saturation", *Physical Review E*, vol. 67, pp. 021102,1–6, 2003.
- [23] F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance and optimal detection of pulse trains by threshold devices", *Digital Signal Processing*, vol. 9, pp. 162–177, 1999.
- [24] S. Kay, "Can detectability be improved by adding noise ?", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 7, pp. 8–10, 2000.
- [25] S. Zozor, P. O. Amblard, "On the use of stochastic resonance in sine detection", *Signal Processing*, vol. 82, pp. 353–367, 2002.
- [26] F. Chapeau-Blondeau, "Résonance stochastique dans un détecteur bayésien optimal", in *Proceedings 18è Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Toulouse, France, 2001, pp. 439–442.
- [27] F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance for an optimal detector with phase noise", *Signal Processing*, vol. 83, pp. 665–670, 2003.
- [28] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993. ■