

# Sur la décomposition modale empirique

Patrick FLANDRIN<sup>1</sup>, Paulo GONÇALVÈS<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CNRS — Laboratoire de Physique (UMR 5672)

École Normale Supérieure de Lyon  
46 allée d’Italie, 69364 Lyon Cedex 07

<sup>2</sup>INRIA Rhône-Alpes — Projet IS2

655 avenue de l’Europe, 38334 St Ismier Cedex

flandrin@ens-lyon.fr, Paulo.Goncalves@inria.fr

**Résumé** – On cherche ici à mieux comprendre une technique récente de décomposition locale et auto-adaptative de signaux appelée Décomposition Modale Empirique (ou EMD, pour “Empirical Mode Decomposition”). On se base sur des simulations numériques extensives permettant de mettre en évidence des comportements typiques de la méthode et d’en quantifier les performances dans des cas simples et contrôlés. On donne une interprétation spectrale de la méthode et on souligne ses ressemblances et différences avec des techniques de décomposition multirésolution à base d’ondelettes.

**Abstract** – This paper is intended to give new insights into a recent technique of local and data-dependent signal decomposition, referred to as “Empirical Mode Decomposition” (EMD). The study relies heavily on numerical simulations which allow for evidencing typical characteristics of the method and for quantifying performance in simple well-controlled situations. A spectral interpretation of EMD is given, and emphasis is put on its similarities and differences with wavelet-based multiresolution decomposition techniques.

## 1 Introduction

N.E. Huang et ses collaborateurs ont récemment introduit une technique de décomposition de signaux non stationnaires, appelée *Décomposition Modale Empirique* (ou EMD, pour “Empirical Mode Decomposition”) [1]. Si celle-ci possède un caractère très intuitif, elle est restée jusqu’à présent rêtive à une véritable évaluation théorique dans la mesure où sa définition n’est en fait donnée que par l’algorithme de décomposition proposé.

L’EMD a néanmoins été appliquée à un certain nombre de situations réelles (cf., par exemple, [1, 2, 3]), motivant des études systématiques de la méthode dans des conditions contrôlées afin de mieux cerner ses possibilités et limitations.

## 2 Principe de l’EMD

Dans son principe, l’EMD considère les signaux à l’échelle de leurs *oscillations locales*, sans que celles-ci soient nécessairement harmoniques au sens de Fourier. D’une manière plus précise, si l’on cherche à décrire un signal  $x(t)$  entre deux extrema consécutifs (par exemple, deux minima situés aux temps  $t_-$  et  $t_+$ ), on peut définir de façon heuristique une contribution “hautes fréquences” locale  $\{d_1[x](t), t_- \leq t \leq t_+\}$ , ou *détail local*, qui correspond à l’oscillation se terminant aux deux minima considérés et passant par le maximum qui existe nécessairement entre eux. Pour que la description du comportement local soit complète, il suffit d’identifier la contribution “basses fréquences” locale correspondante  $m_1[x](t)$ , ou *tendance locale*, de telle sorte que l’on ait

$$x(t) = m_1[x](t) + d_1[x](t)$$

pour  $t_- \leq t \leq t_+$ . Si ce point de vue est adopté pour l’ensemble des oscillations constituant le signal, la procédure peut alors être appliquée sur le résidu  $m_1[x](t)$  formé par l’ensemble des tendances locales et considéré comme un nouveau signal, conduisant à un nouveau détail  $d_2[x](t)$  et à un nouveau résidu  $m_2[x](t)$ .

On obtient ainsi une décomposition dont les différents *modes* (ou IMF, pour “Intrinsic Mode Functions”)  $d_k[x](t)$  sont extraits itérativement, conduisant à une représentation du type :

$$x(t) = m_K[x](t) + \sum_{k=1}^K d_k[x](t)$$

pour une profondeur de décomposition  $K$ . On pourra trouver dans [1, 4] davantage de détails sur la méthode, et dans [5] des codes MATLAB pour la mettre en œuvre.

## 3 L’EMD comme filtrage

Pour la simplicité de la présentation, les différents modes et résidus ont été introduits sur des arguments “spectraux”, mais il est bon de noter que leur discrimination “hautes fréquences” vs. “basses fréquences” est essentiellement qualitative (les oscillations ne sont pas nécessairement sinusoïdales), qu’elle ne s’applique que localement et qu’elle ne correspond en aucune façon à un filtrage prédéterminé. La sélection des modes s’apparente davantage à un filtrage non linéaire dépendant du temps, automatique et auto-adaptatif (c’est-à-dire localement dépendant du signal). Néanmoins, un des objectifs de cette communication est de justifier que, dans des cas idéalisés et bien contrôlés, l’EMD réalise de manière automatique une décomposition en sous-bandes très proche de ce que donnerait une analyse mul-

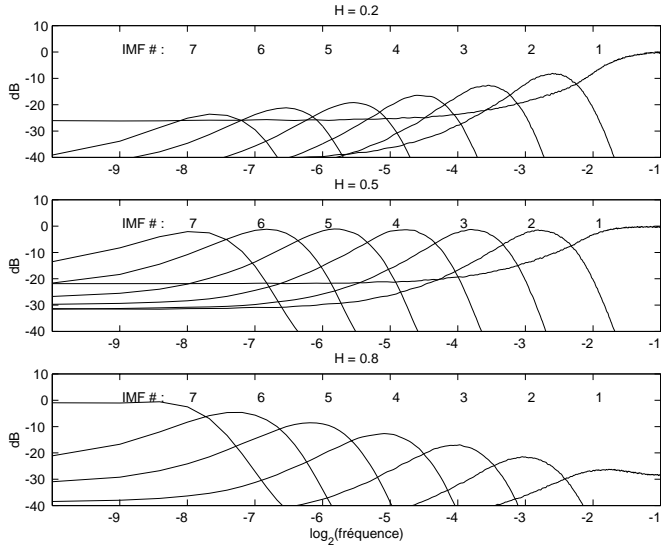


FIG. 1: Filtres équivalents — Dans le cas du bruit gaussien fractionnaire, l’EMD peut s’interpréter comme un banc de filtres passe-bande pour les modes d’indices  $k \geq 2$ , le mode #1 correspondant essentiellement à un filtre passe-haut. Pour chaque valeur de l’exposant de Hurst ( $H = 0.2, 0.5$  et  $0.8$ ), on a simulé 5000 séries indépendantes de 512 points chacune, et on a tracé dans un diagramme log-log le spectre moyen des 7 premières IMF en fonction de la fréquence normalisée.

tirésolution de type ondelettes. Pour ce faire, on s’appuie ici sur la conduite de deux types d’expériences numériques.

### 3.1 Approche spectrale

Dans le premier cas, on aborde la question de la décomposition d’un bruit large bande en s’intéressant au comportement statistique de l’EMD lorsqu’on l’applique au modèle très général du bruit gaussien fractionnaire [8].

Rappelons que le bruit gaussien fractionnaire (fGn) est défini comme le processus des accroissements du mouvement brownien fractionnaire (fBm) [6]. À temps discret, le fGn est une série  $\{g_H[n], n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ , indexée par un paramètre réel  $0 < H < 1$  (son exposant de Hurst), et telle que sa séquence d’autocorrélation

$$r_{g_H}[k] := \mathbb{E}\{g_H[n]g_H[n+k]\}$$

s’écrit:

$$r_{g_H}[k] = \frac{\sigma^2}{2} (|k-1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k+1|^{2H}).$$

Le cas particulier  $H = 1/2$  se réduit à celui du bruit blanc (donc, décorréolé), alors que les autres valeurs de  $H$  introduisent des corrélations non nulles pouvant être, soit négatives quand  $0 < H < 1/2$ , soit positives quand  $1/2 < H < 1$  (longue mémoire).

Partant de ce modèle, nous avons conduit des simulations numériques extensives pour des valeurs de  $H$  allant de 0.1 à 0.9. La longueur typique des séries étudiées était de  $N = 512$  points et, pour chaque valeur de  $H$ , 5000 réalisations indépendantes de fGn ont été générées par l’algorithme de Wood et Chan [7] (on ne donnera pas davantage de détails ici sur la mise en œuvre effective de l’EMD, mais les codes Matlab utilisés pour les simulations sont disponibles [5]).

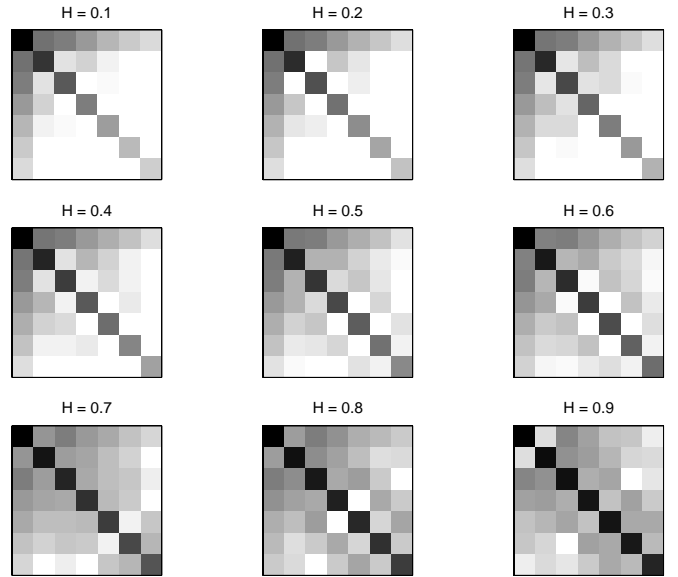


FIG. 2: Variance-covariance — Dans le cas du bruit gaussien fractionnaire, la variance des IMF suit une loi de puissance liée simplement à l’exposant de Hurst, les IMF étant de plus approximativement décorréolés entre eux. Pour chaque valeur de l’exposant de Hurst ( $H = 0.1$  à  $0.9$ ), on a simulé 100 séries indépendantes de 2048 points chacune, et on a tracé la matrice de variance-covariance moyenne relative aux 7 premières IMF (codage logarithmique en niveaux de gris, dynamique de 35 dB).

**Banc de filtres** — Le résultat central de ces simulations est donné à la Figure 1 qui représente, mode par mode, les estimées des densités spectrales

$$\Gamma_k[g_H](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{d_k[g_H](t)d_k[g_H](t+\tau)\} e^{-i2\pi f\tau} d\tau,$$

mettant en évidence une organisation *spontanée* de type banc de filtres à surtension constante (des résultats de même nature ont depuis été obtenus indépendamment [9], quoique dans le cas du seul bruit blanc).

**Variance-covariance** — La nature quasi-dyadique de ces bancs de filtres a été justifiée dans [8], où l’on a de plus montré comment la puissance spectrale se répartissait exponentiellement dans les différents IMF, de telle sorte que cette répartition permet en théorie une estimation de  $H$ . Afin de préciser plus avant la pertinence de cette approche, en particulier lorsqu’on ne dispose que d’une réalisation, nous avons complété l’étude présentée en [8] en évaluant le lien statistique pouvant exister entre modes. À cette fin nous avons estimé la matrice de variance-covariance

$$C_H[m, n] = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T d_m[g_H](t)d_n[g_H](t) dt\right\}$$

sur la base de 100 réalisations indépendantes, pour une taille de données de  $N = 2048$  points et  $m$  et  $n$  variant de 1 à 7. La Figure 2 présente le résultat normalisé  $C_H[m, n]/C_H[1, 1]$ . Comme attendu, on y observe sur la diagonale principale (soit,  $m = n$ ) le comportement

$$C_H[m, m] = \text{var } d_m[g_H](t) \propto \rho_H^{2(H-1)m},$$

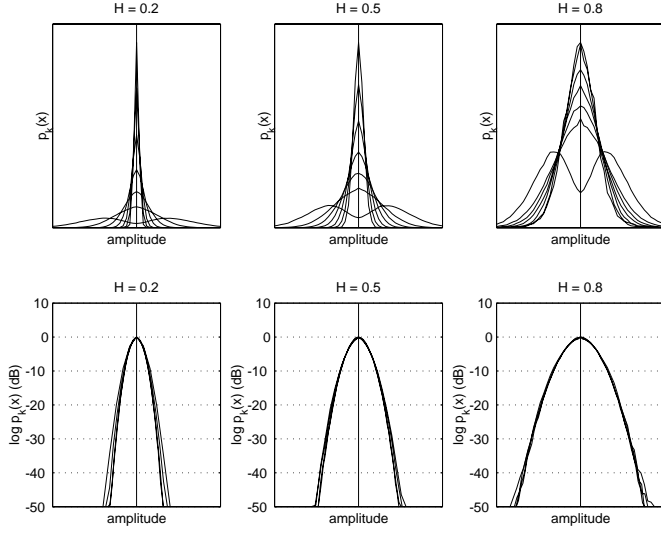


FIG. 3: Statistiques marginales des IMF — Hormis pour l’IMF 1 qui est bimodale, les densités de probabilité marginales  $\{p_k(x), k = 2, \dots, 5\}$  des IMF du fGn (calculées ici sur 500 réalisations de  $N = 512$  points) sont approximativement gaussiennes et réductibles à un gabarit unique moyennant une renormalisation bien choisie (diagrammes du bas : superposition des  $\log p_k(x)$  renormalisées).

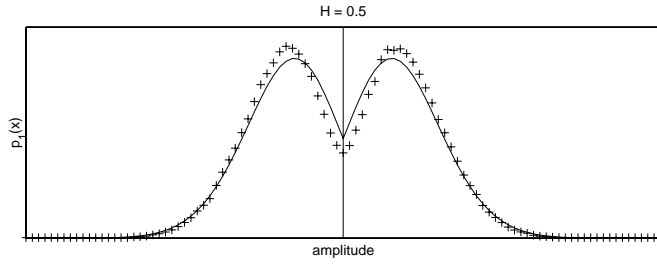


FIG. 4: Densité de probabilité de l’IMF 1 — Dans le cas  $H = 0.5$ , la densité de probabilité  $p_1(x)$  de l’IMF 1 (calculée ici sur 500 réalisations de  $N = 512$  points et représentée par les croix) est très proche de celle prédite pour les maxima positifs et les minima négatifs d’un bruit blanc gaussien à temps discret (trait continu).

avec  $\rho_H \approx 2$  [8]. Ce que l’on observe de façon additionnelle, c’est un effet global de décorrélation effective entre modes, à l’exception cependant du mode 1 dont la contribution spectrale non négligeable dans la moitié inférieure du spectre (cf. Figure 1) maintient des liens forts avec les autres modes.

**Statistiques marginales** — Afin d’aller au-delà de l’ordre 2, il est intéressant d’évaluer les densités de probabilité marginales des IMF. La Figure 3 révèle à cet égard le caractère approximativement gaussien des IMF de rang au moins 2. Ces densités de probabilité gaussiennes  $p_k(x)$  sont de plus renormalisables au sens où elles se superposent toutes sur un gabarit unique moyennant la transformation

$$p_k(x) \mapsto \frac{1}{\beta} p_k\left(\frac{x}{\beta}\right)$$

lorsque l’on choisit  $\beta := 2^{-(H-1)k}$ .

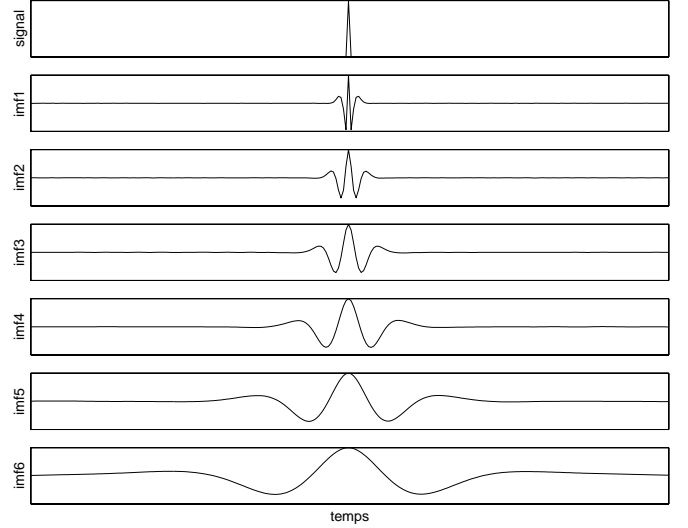


FIG. 5: Réponse impulsionnelle — La réponse impulsionnelle équivalente de l’EMD peut être obtenue en moyennant mode par mode un grand nombre de décompositions calculées sur une impulsion faiblement bruitée. Dans le cas présent, on a simulé 5000 réalisations indépendantes de 256 points chacune et on a tracé (sous le signal moyen) la moyenne d’ensemble, normalisée en amplitude mode par mode, des 6 premières IMF.

L’IMF 1 s’écarte du cas gaussien en possédant une densité de probabilité bimodale, cohérente avec sa nature de bruit filtré passe-haut (cf. Figure 1). En effet, dans le cas ( $H = 0.5$ ) du bruit blanc gaussien à temps discret, un calcul simple montre que les densités de probabilité  $p_+(x)$  et  $p_-(x)$  des maxima et des minima s’écrivent :

$$p_{\pm}(x) = \left[ \frac{1}{2} \pm \left( \frac{1}{2} - \operatorname{erf}(x) \right) \right]^2 \gamma(x),$$

avec

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

et

$$\operatorname{erf}(x) := \int_x^{+\infty} \gamma(\theta) d\theta.$$

L’EMD ne retenant, par construction, que les maxima positifs et les minima négatifs, on constate alors (cf. Figure 4) que la densité de probabilité  $p_*(x) := \max(p_-(x), p_+(x))$  de ces derniers est très proche de celle observée pour l’IMF 1, en cohérence avec son interprétation en termes de bruit blanc filtré passe-haut.

## 3.2 Approche temporelle

Une vue duale du comportement qui vient d’être décrit peut être obtenue par une approche de type réponse impulsionnelle en évaluant la collection des détails moyens

$$\overline{d_k[\delta]}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} \{ d_k[\delta + \varepsilon b](t) \},$$

où  $\delta(t)$  est une impulsion et  $b(t)$  un bruit additif dont le rôle est de garantir l’existence d’extrema permettant d’appliquer

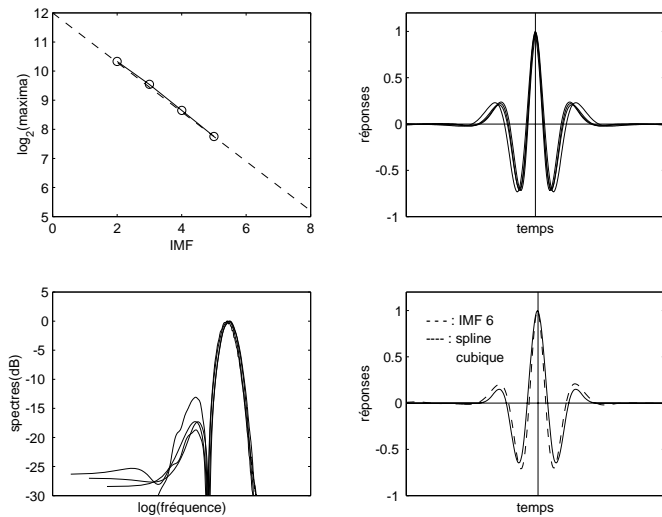


FIG. 6: Auto-similarité — Le logarithme de l’amplitude maximale des modes 2 à 5 de la Figure 5 varie linéairement en fonction de l’indice des modes (en haut, à gauche). Renormaliser de façon couplée ces modes, soit en temps (en haut, à droite), soit en fréquence (en bas, à gauche) fournit un gabarit unique. La “réponse impulsionnelle” ainsi identifiée peut être comparée avec profit à une ondelette de type spline cubique (en bas, à droite).

l’EMD. On obtient là encore (cf. Figure 5) une signature caractéristique directement évocatrice de ce que donnerait une analyse en ondelettes dans une situation analogue.

Pour préciser ce point plus avant, on peut — tout comme on l’avait fait dans l’approche spectrale [8] — chercher dans la décomposition obtenue une signature éventuelle d’auto-similarité qui ramènerait la collection des modes à un motif unique moyennant une renormalisation judicieusement choisie.

La figure 6 montre qu’il en est bien ainsi. Dans un premier temps, le tracé de l’amplitude maximale des modes en fonction de leur indice permet d’identifier une loi exponentielle du type :

$$\log_2 \overline{d_k[\delta]}(0) = C - pk,$$

avec  $p \approx 0.85$ . On montre alors que le choix concomitant d’un facteur de dilatation  $\alpha = 2^p \approx 1.80$  permet de superposer les gabarits temporels et spectraux des différents IMF, justifiant une relation de la forme :

$$\overline{d_k[\delta]}(t) = \frac{1}{\alpha^k} \psi \left( \frac{t}{\alpha^k} \right),$$

où  $\psi(t)$  est une forme d’onde de référence (analogue à une ondelette-mère dans une analyse multirésolution). Dans le cas considéré ici, la procédure d’interpolation utilisée par l’EMD repose sur des splines cubiques [1, 4, 5], et il est intéressant de constater que le motif  $\psi(t)$  obtenu est très proche de l’ondelette spline cubique obtenue comme troisième puissance de convolution de l’ondelette de Haar.

## 4 Conclusion

La décomposition modale empirique (ou “EMD”) est une méthode d’analyse des signaux qui est à la fois attractive et

problématique. Attractive, car intuitive, flexible, non paramétrique et auto-adaptative; mais problématique aussi car fortement non linéaire, d’interprétation délicate et définie seulement par un algorithme difficilement réductible à l’analyse.

À mi-chemin entre l’application d’une méthode encore mal comprise à des données réelles et l’attente d’une théorie bien établie, il nous a semblé nécessaire de recourir à des simulations extensives dans des situations simples et bien contrôlées. Les résultats présentés ici complètent d’autres études conduites dans le même esprit [4, 8], apparentant l’EMD à une méthode multirésolution que l’on pourrait qualifier de “spontanée” dans la mesure où elle repose sur une hiérarchie d’échelles “naturelles” extraites itérativement en fonction du signal analysé. À la différence de méthodes plus classiques à base d’ondelettes (et variations), cette extraction est faite *localement* et de façon fondamentalement *auto-adaptative*, aucun filtre pré-déterminé ne présidant a priori à la décomposition.

Ces premiers éléments nécessitent maintenant de disposer d’une véritable compréhension théorique qui permettrait une utilisation raisonnée de la méthode comme analyse exploratoire de signaux réels.

**Remerciements** — Les auteurs ont plaisir à remercier G. Rilling (ENS Lyon) pour l’aide qu’il leur a apportée dans le développement des algorithmes utilisés dans cette étude.

## Références

- [1] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.L. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung and H.H. Liu, “The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for non-linear and non-stationary time series analysis,” *Proc. Roy. Soc. London A*, Vol. 454, pp. 903–995, 1998.
- [2] E.P. Souza Neto *et al.*, “Assessment of cardiovascular autonomic control by the Empirical Mode Decomposition,” 4th Int. Workshop on Biosignal Interpretation, Como (I), pp. 123-126, 2002.
- [3] R. Fournier, “Analyse stochastique modale du signal stabilométrique. Application à l’étude de l’équilibre chez l’Homme,” Thèse de Doctorat, Univ. Paris XII Val de Marne, 2002.
- [4] G. Rilling, P. Flandrin and P. Gonçalvès, “On Empirical Mode Decomposition and its algorithms,” IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing NSIP-03, Grado (I), 2003.
- [5] [www.ens-lyon.fr/~flandrin/software.html](http://www.ens-lyon.fr/~flandrin/software.html).
- [6] B.B. Mandelbrot and J.W. van Ness, “Fractional Brownian motions, fractional noises and applications,” *SIAM Rev.*, Vol. 10, pp. 422–437, 1968.
- [7] A.T. Wood and G. Chan, “Simulation of stationary processes in  $[0, 1]^d$ ,” *J. Comp. Graph. Stat.*, Vol. 3, pp. 409–432, 1994.
- [8] P. Flandrin, G. Rilling and P. Gonçalvès, “Empirical Mode Decomposition as a filterbank,” *IEEE Sig. Proc. Lett.*, à paraître 2003.
- [9] Z. Wu and N.E. Huang, “A study of the characteristics of white noise using the Empirical Mode Decomposition method,” soumis à *Proc. Roy. Soc. London A*, 2002.