

Reconstruction d'image pour un radiomètre à synthèse d'ouverture : application à la mission spatiale SMOS

Bruno PICARD et Eric ANTERRIEU

CERFACS-URA 1875
Equipe Signal et Image
42, avenue Gaspard Coriolis - 31057 Toulouse - France
Bruno.Picard@cerfacs.fr

Résumé – La mission spatiale SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity, humidité des sols et salinité des océans) est la première tentative d'appliquer le concept d'imagerie par interférométrie à synthèse d'ouverture à la télédétection spatiale. Dans cet article, nous présentons des outils pour la synthèse d'ouverture sur des grilles hexagonales ainsi que deux approches régularisées du problème inverse à résoudre pour lesquelles la propagation des erreurs lors du processus de reconstruction des images est parfaitement contrôlée.

Abstract – The Soil Moisture and Ocean Salinity space mission (SMOS) is the first attempt to apply to remote sensing of the earth's surface from space, the concept of imaging interferometric radiometry by aperture synthesis. In this paper, we introduce tools adapted for synthesis aperture on hexagonal grids as well as two regularized approaches for the inverse problem to be solved that keep under control the propagation of errors during the image reconstruction process.

1 Introduction

L'objectif de la mission spatiale SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity) est de mesurer, depuis l'espace, l'humidité des sols et la salinité des océans [1]. Elle s'inscrit dans le cadre du programme d'exploration de la Terre de l'Agence Spatiale Européenne. Il s'agit de concevoir, pour la première fois, un radiomètre à synthèse d'ouverture dédié à l'observation de la Terre en utilisant une technique imagerie par interférométrie passive micro-ondes (bande L), initialement développée en radio-astronomie.

L'instrument SMOS est composé d'une soixantaine d'antennes élémentaires régulièrement espacées le long des trois bras d'un réseau en forme de Y. Les mesures interférométriques expérimentales, appelées visibilité complexes, sont des mesures de la fonction de cohérence spatiale de la distribution de température de brillance de la scène observée pour certaines fréquences spatiales angulaires. En raison de la géométrie du réseau retenu pour SMOS, ces dernières se trouvent aux nœuds d'une grille d'échantillonnage hexagonale. De plus, comme l'instrument est à bande passante limitée dans la couverture fréquentielle expérimentale, ces fréquences sont ici limitées à une région en forme d'étoile du domaine de FOURIER.

Les travaux présentés ici portent donc d'abord sur le développement d'outils pour la synthèse d'ouverture sur des grilles d'échantillonnage hexagonales, ainsi que sur une régularisation du problème inverse à résoudre pour retrouver la distribution de température de brillance de la scène observée à partir de visibilité complexes expérimentales.

2 Echantillonnage périodique hexagonal

La disposition en Y des bras de l'instrument sur lesquels sont régulièrement positionnées les antennes conduit à un échan-

tillonnage hexagonal de la fonction de cohérence spatiale à l'intérieur de la couverture fréquentielle H de l'instrument, ici en forme d'étoile, comme cela est montré sur la figure 1.

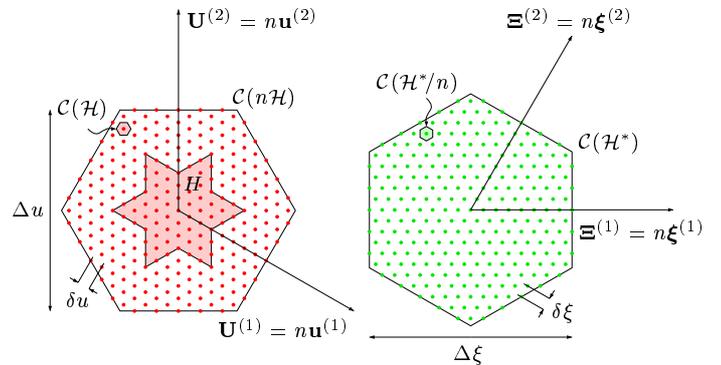


FIG. 1 – Cellules élémentaires des grilles d'échantillonnage hexagonales dans le domaine de FOURIER (en rouge) et dans le domaine spatial (en vert). Les pas d'échantillonnage δu et $\delta \xi$, ainsi que les étendues spatiale $\Delta \xi$ et fréquentielle Δu , sont reliés par la relation: $\Delta \xi \delta u = \Delta u \delta \xi = 2/\sqrt{3}$ avec $\Delta \xi = n \delta \xi$ et $\Delta u = n \delta u$, où n est un entier choisi de telle sorte que les conditions de SHANNON soient respectées. Ici l'instrument est équipé de 3 antennes par bras, de sorte que, pour des raisons d'informatique, $n = 16$.

L'outil de base de la synthèse d'ouverture est bien évidemment la Transformation de FOURIER Discrète (TFD). Comme cela est illustré sur la figure 2, une simple réorganisation des cellules élémentaires hexagonales permet d'utiliser les algorithmes standards de Transformation de FOURIER Rapide (TFR) développés et optimisés pour des grilles cartésiennes [2]. Le développement d'algorithmes dédiés aux grilles hexagonales n'est donc pas nécessaire.

En raison de la coupure fréquentielle abrupte introduite par

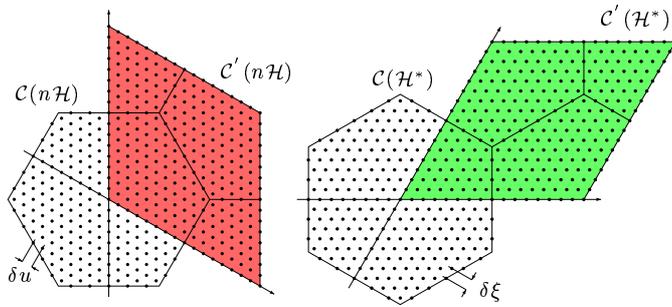


FIG. 2 – Extension périodique hexagonale des grilles de la figure 1 dans le domaine de FOURIER (à gauche) et dans le domaine spatiale (à droite). Le nombre de nœuds est le même dans les cellules hexagonales élémentaires $C(n\mathcal{H})$ et $C(\mathcal{H}^*)$ que dans les cellules $C'(n\mathcal{H})$ et $C'(\mathcal{H}^*)$ pour lesquelles il est naturel d'utiliser un algorithme de TFR développé pour des grilles cartésiennes.

la couverture fréquentielle expérimentale H , il est nécessaire d'introduire des fenêtres d'apodisation pour limiter les effets de cette discontinuité, et notamment les oscillations de GIBBS dans les images reconstruites.

Comme cela est illustré sur la figure 3, les fonctions d'apodisation traditionnelles à une dimension peuvent facilement être adaptées au cas hexagonal en introduisant une variable radiale [2]. Plus précisément, la valeur de la fenêtre \widehat{W} en un point (u, v) de la couverture fréquentielle expérimentale H dépend du rapport entre la distance $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ et le rayon ρ_{max} du cercle circonscrit à H , ici $\rho_{max} = \sqrt{3}L$ où L est la longueur des bras du réseau en Y .

Afin de juger objectivement du meilleur compromis entre la résolution spatiale (liée à la largeur à mi-hauteur de W , notée FWHM pour *Full Width at Half Maximum*) et la sensibilité radiométrique (liée à la hauteur des lobes secondaires de W , notée HSSL pour *Highest Side Lobe Level*), deux qualités importantes pour la mission SMOS, nous définissons un nouveau facteur de mérite: la distance limite de plus courte approche (SACR pour *Side Area Contribution Radius*) [2]. Si l'on considère une scène composée pour moitié d'une température uniforme T_0 et pour l'autre d'une température uniforme T_1 , le SACR est la distance mesurée depuis la ligne de séparation au delà de laquelle l'amplitude des oscillations de GIBBS est inférieure à un pourcentage donné de l'amplitude de la discontinuité $|T_0 - T_1|$. Ce critère, introduit pour étudier des zones de fortes discontinuités (comme au bord des côtes), permet de faire apparaître un minimum lorsqu'il est confronté à la largeur

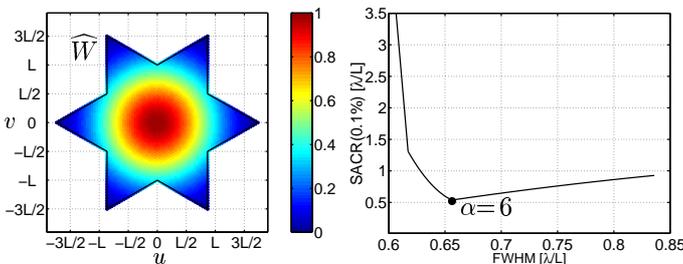


FIG. 3 – Généralisation à 2D des fenêtres d'apodisation. A gauche: la fenêtre de Kaiser pour $\alpha = 6$. Le paramètre ρ_{max} étant constant, notez les valeurs non nulles aux creux de l'étoile. A droite: pour $\alpha = 6$ le SACR est minimal, la sensibilité radiométrique est alors optimale compte tenu de la dégradation de la résolution spatiale.

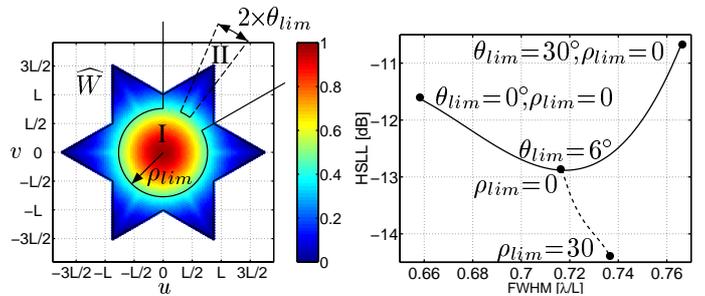


FIG. 4 – A gauche, \widehat{W} , la fenêtre d'apodisation de Kaiser ($\alpha = 6$). La forme de la fenêtre colle à la forme de H dans la zone II alors que ρ_{max} est constant dans la zone I. A droite, variation de la hauteur des lobes secondaires avec la largeur à mi-hauteur de W pour $0^\circ \leq \theta_{lim} \leq 30^\circ$ (ligne continue) et pour $0 \leq \rho_{lim} \leq 30$ (tirets). La hauteur des lobes secondaires peut être diminuée de -3 dB pour $\theta_{lim} = 6^\circ$ et $\rho_{lim} = 30$.

à mi-hauteur de chaque fenêtre, ce qui n'est pas le cas avec les critères habituellement utilisés. Ainsi, la distance limite de plus courte approche des fenêtres de Kaiser qui dépendent d'un paramètre α , permet d'exhiber une valeur optimale $\alpha \approx 6$ pour laquelle la sensibilité radiométrique est optimale compte tenu de la dégradation de la résolution spatiale (voir Fig. 3).

Dans un second temps, nous faisons dépendre ρ_{max} d'une variable angulaire θ pour tenir compte de l'anisotropie de la couverture fréquentielle expérimentale H ici en forme d'étoile [3]. De plus, cette adaptation de \widehat{W} à la géométrie de H peut être circonscrite à une zone délimitée par une valeur angulaire limite θ_{lim} : pour $\theta_{lim} = 30^\circ$, la forme de \widehat{W} colle parfaitement à H , pour $\theta_{lim} = 0^\circ$ on retrouve la fenêtre obtenue avec $\rho_{max} = \sqrt{3}L$. Pour chaque fenêtre d'apodisation, il existe une valeur optimale de θ_{lim} pour laquelle la hauteur des lobes secondaires est minimale et inférieure à la valeur obtenue avec la seule valeur constante de $\rho_{max} = \sqrt{3}L$. Comme cela est montré sur la figure 4, pour $\theta_{lim} = 6^\circ$ (ligne continue), la sensibilité radiométrique est améliorée sans pour autant trop détériorer la résolution spatiale.

Dans un troisième temps, nous faisons dépendre ρ_{max} de la variable radiale ρ afin de délimiter un disque de rayon ρ_{lim} , centré sur la fréquence nulle, à l'intérieur duquel ρ_{max} est maintenu constant. L'adaptation de \widehat{W} à la forme de H à l'aide de la variable angulaire précédente n'est alors opérée que dans le secteur angulaire $\theta_{lim} \leq \theta \leq 30^\circ$ et pour $\rho \geq \rho_{lim}$. Ainsi, comme cela est montré sur la figure 4, pour $\theta_{lim} = 6^\circ$ et $\rho_{lim} = 30$, la hauteur des lobes secondaires peut être diminuée d'environ -3 dB pour un faible coût en terme de résolution spatiale ($+12\%$).

3 Reconstruction d'image

La relation liant la température de brillance $T(\xi)$ de la scène observée à la mesure de la fonction de cohérence spatiale $V(\mathbf{u})$ pour la fréquence \mathbf{u}_{kl} engendrée par une paire d'antennes (k, l) est la suivante:

$$V(\mathbf{u}_{kl}) = \iint_{\|\xi\| \leq 1} F_k(\xi) F_l^*(\xi) T(\xi) \tilde{r}_{kl}\left(\frac{-\mathbf{u}_{kl}\xi}{f_0}\right) \frac{e^{-2j\pi\mathbf{u}_{kl}\xi}}{\sqrt{1 - \|\xi\|^2}} d\xi \quad (1)$$

La température de brillance est ici exprimée dans le repère des cosinus directeurs $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ lié à l'instrument. Ce dernier

est caractérisé par les gains complexes F_k et F_l des antennes k et l et par la fonction $\tilde{r}_{kl}(t)$ qui rend compte des effets de dé-corrélation dus à la largeur de bande non nulle des filtres des récepteurs [4].

Le problème inverse qui consiste à retrouver la distribution de température de brillance de la scène observée à partir de visibilités complexes expérimentales plus ou moins bruitées est un problème mal posé au sens de HADAMARD. En effet, comme l'instrument est à bande-passante limitée dans la couverture fréquentielle expérimentale H , l'information fréquentielle au-delà de H est définitivement perdue. Il est donc illusoire d'espérer reconstruire la distribution de température de brillance à son plus haut niveau de résolution à partir des seules données interférométriques obtenues pour les fréquences spatiales angulaires \mathbf{u}_{kl} . Du point de vue de l'algèbre linéaire, le système linéaire:

$$V = \mathbf{G}T, \quad (2)$$

où \mathbf{G} est la matrice rectangulaire qui traduit sous forme discrète la relation (1), est un problème sous-contraint. Ici les mesures expérimentales V appartiennent à l'espace des données F , tandis que la distribution de température de brillance T appartient à l'espace objet E . La dimension de F (le nombre de visibilités complexes expérimentales) est très inférieur à la dimension de E (le nombre de pixels nécessaires pour discrétiser l'intégrande de (1) tout en respectant les conditions d'échantillonnage de SHANNON). Le problème (2) est donc bien sous-déterminé: il n'existe pas de solution unique, et le problème doit être régularisé.

Une première approche consiste à trouver la solution objet de moindre norme en minimisant le problème d'optimisation avec contrainte:

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|T\|_E^2 \\ \mathbf{G}T = V \end{cases} \quad (3)$$

dont la solution T_r est :

$$T_r = \mathbf{G}^+V, \quad (4)$$

où $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}^*(\mathbf{G}\mathbf{G}^*)^{-1}$ est l'inverse généralisé de \mathbf{G} . Il faut cependant noter que le conditionnement de ce problème est directement lié à la présence de fréquences redondantes dans la couverture fréquentielle. En effet, des visibilités peuvent être mesurées pour des fréquences redondantes puisque deux couples d'antennes différents peuvent engendrer la même fréquence spatiale angulaire: \mathbf{G} est alors de rang déficient si les antennes et les récepteurs de ces couples sont identiques, et le conditionnement de (3) restera élevé même si ces éléments sont différents.

L'approche présentée ici [5] est basée sur une régularisation physique du problème inverse $\mathbf{G}T = V$. L'instrument étant à bande passante limitée, il est naturel de rechercher parmi toutes les solutions possibles celles qui sont à bande passante limitée dans H . Cette solution est la distribution de température minimisant le problème d'optimisation avec contrainte:

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|V - \mathbf{G}T\|_F^2 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}_H)T = 0 \end{cases} \quad (5)$$

où \mathbf{P}_H est le projecteur dans le sous-espace \mathcal{E} de E des fonctions à bande passante limitée dans H . La minimisation de ce problème est équivalent à la minimisation du critère quadratique:

$$\min_{\hat{T} \in \hat{\mathcal{E}}} \|V - \mathbf{A}\hat{T}\|_F^2, \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{U}^*\mathbf{Z} \quad (6)$$

où \hat{T} sont les composantes de FOURIER de T contenues dans H et appartenant au sous espace dual $\hat{\mathcal{E}}$, et où \mathbf{U} est l'opérateur de transformée de FOURIER et \mathbf{Z} l'opérateur de zéro-padding au delà de H .

En raison des redondances évoquées précédemment, la dimension de F (le nombre de visibilités complexes expérimentales) est supérieure à la dimension de $\hat{\mathcal{E}}$ (le nombre de composantes de la transformée de FOURIER de T dans la couverture expérimentale H). Le problème ainsi régularisé est maintenant sur-déterminé. La perte d'information qui conduisait à un problème inverse mal posé est compensée ici par l'apport d'une information a priori en relation directe avec les caractéristiques physiques de l'instrument (résolution angulaire). La solution de (6), et donc de (5), est alors donnée par:

$$T_r = \mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{A}^+V, \quad (7)$$

où $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$ est l'inverse généralisé de \mathbf{A} .

Cette régularisation physique a inspiré dans un deuxième temps une régularisation mathématique. Les décompositions en valeurs singulières de \mathbf{A} et \mathbf{G} , illustrées par la figure 5, nous renseignent sur le conditionnement du problème. Ainsi, le spectre des valeurs singulières de \mathbf{A} est confiné autour de 1, confirmant le bon conditionnement du problème (6). Or, la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{G} fait apparaître, en plus d'un premier groupe dont les valeurs sont proches de celle de \mathbf{A} , un second groupe, nettement séparé du premier, compris entre 10^{-4} et 10^{-2} . On compte autant de valeurs singulières dans le premier groupe que de fréquences dans la couverture fréquentielle expérimentale H et le nombre de valeurs singulières dans le second groupe est égal au nombre de redondances des visibilités.

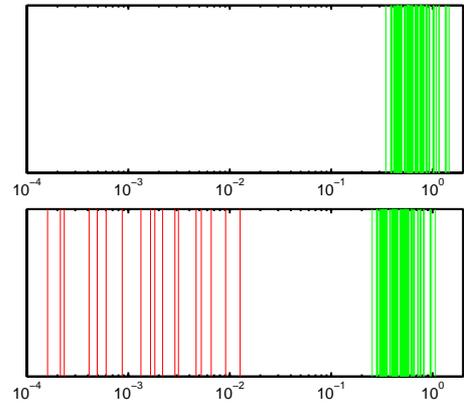


FIG. 5 – Valeurs singulières des matrices \mathbf{A} (en haut) et \mathbf{G} (en bas). Les deux matrices ont le même nombre de valeurs singulières groupées autour de 1 mais \mathbf{G} possède en plus un groupe de valeurs plus petites et en nombre égal aux nombres de visibilités redondantes. Ces petites valeurs sont responsables du mauvais conditionnement du problème (3).

Ainsi, même si la matrice \mathbf{G} est de rang plein au sens mathématique strict du terme, elle ne l'est pas d'un point de vue numérique. La distribution particulière de ces valeurs singulières montre d'une part que le nombre de degrés de liberté du problème est égal au nombre de fréquences dans H et que d'autre part les valeurs singulières du second groupe seront à l'origine d'une large amplification des erreurs lors du processus de reconstruction. En effet, l'analyse standard en algèbre

linéaire fournit l'inégalité suivante :

$$\frac{\|\Delta T_r\|_E}{\|T_r\|_E} \leq \mathcal{C}(\mathbf{G}) \frac{\|\Delta V\|_F}{\|V\|_F}. \quad (8)$$

Ici, $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ est le conditionnement du problème inverse $\mathbf{G}T = V$ correspondant à une perturbation ΔV du second membre. Il représente une borne supérieure du facteur d'amplification des erreurs. Il est donc possible d'améliorer le conditionnement du problème (3) et de maîtriser l'amplification des erreurs en calculant la solution de moindre norme à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières tronquée de \mathbf{G} . Seules les valeurs singulières les plus grandes et en nombre égal au nombre de fréquences dans H sont alors conservées.

Ainsi, les régularisations physique et mathématique conduisent à une même amplification maîtrisée des erreurs. Bien que basées sur deux approches différentes, elles sont toutes deux liées à la prise en compte du nombre de degrés de liberté du problème : le nombre de fréquences dans la couverture fréquentielle expérimentale de cet instrument à bande passante limitée. Notons cependant au bénéfice de l'approche physique qu'elle fournit directement une solution à bande passante limitée dans H alors que la solution de moindre norme conserve des composantes de FOURIER en dehors de l'étoile (même si celles-ci sont relativement faibles). D'autre part, cette approche réduit considérablement les dimensions du problème, ce qui représente un gain important en terme de mémoire et de temps de calcul lors du processus de reconstruction.

L'instrument considéré dans les simulations suivantes est composé de 10 éléments (antennes et récepteurs) tous différents et régulièrement espacés sur les 3 bras d'un Y. La figure 6 présente T_o , la scène observée à son plus haut niveau de résolution, et $T_w = W * T_o$, cette même scène à la résolution de l'instrument et apodisée par la fenêtre de Kaiser ($\alpha = 6$, $\theta_{lim} = 6^\circ$, $\rho_{lim} = 30$ [λ/L]). Les visibilités sont calculées à partir de T_o et les scènes reconstruites sont comparées à T_w .

Dans un premier temps, les deux méthodes sont comparées sur une reconstruction non bruitée. La figure 7 montre les reconstructions effectuées avec \mathbf{G}^+ et \mathbf{A}^+ . En l'absence de bruit, l'erreur systématique est la même pour les deux reconstructions, 0.93 K en moyenne quadratique.

Dans un deuxième temps (voir Fig. 8), les visibilités simulées sont dégradées par un bruit radiométrique gaussien de déviation standard 0.08 K. L'écart quadratique moyen entre T_w et la scène reconstruite par \mathbf{G}^+ est alors de 2.12 K. Cet écart n'est plus que de 0.94 K lorsque la scène est reconstruite par \mathbf{A}^+ ou par une décomposition en valeurs singulières tronquée de \mathbf{G} . En tenant compte de l'erreur systématique, on peut conclure que la propagation du bruit introduit sur les visibilités est 15 fois plus importante dans le cadre d'une reconstruction par \mathbf{G}^+ qu'avec une approche régularisée.

4 Conclusion

La possibilité d'utiliser sur des grilles hexagonales les algorithmes standards de TFR élaborés pour des grilles cartésiennes est démontrée. La distance de plus courte approche est un nouvel outil de diagnostic de la qualité des fenêtres d'apodisation adapté aux exigences de la mission SMOS. La prise en compte des caractéristiques géométriques de la couverture fréquentielle de l'instrument dans la définition de ces

fenêtres conduit à une amélioration de sa sensibilité radiométrique. Enfin, deux types de régularisation du problème inverse à résoudre permettent de maîtriser la propagation des bruits et des erreurs au cours du processus de reconstruction.

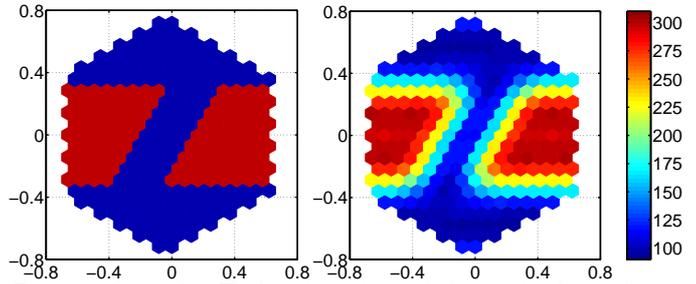


FIG. 6 – À gauche, T_o , la scène observée à son plus haut niveau de résolution, à droite, $T_w = W * T_o$, la scène à la résolution de l'instrument et apodisée par la fenêtre de Kaiser.

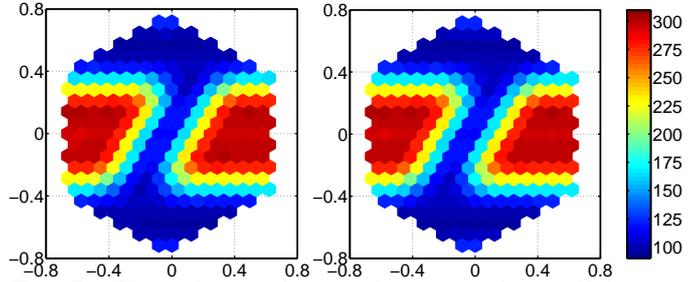


FIG. 7 – Cartes de températures de reconstruites en l'absence de bruit: $Tr = \mathbf{G}^+V$ à gauche et $Tr = \mathbf{U}^* \mathbf{Z} \mathbf{A}^+V$ à droite.

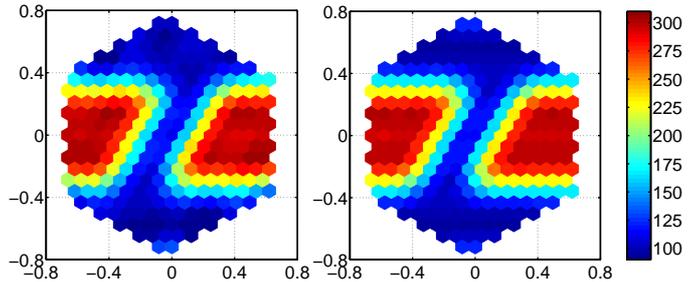


FIG. 8 – Cartes de températures de reconstruites en présence de bruit: $Tr = \mathbf{G}^+V$ à gauche et $Tr = \mathbf{U}^* \mathbf{Z} \mathbf{A}^+V$ à droite.

Références

- [1] Y.H. Kerr, P. Waldteufel, J.-P. Wigneron, J.-M. Martignuzzi, J. Font, and M. Berger, *Soil Moisture Retrieval from Space: The Soil Moisture and Ocean Salinity (SMOS) Mission*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39(8), pp. 1729-1735, 2001.
- [2] E. Anterrieu, P. Waldteufel, and A. Lannes, *Apodization functions for 2D hexagonally sampled SAIR*, IEEE Trans. on Geosc. and Remote Sens., 40(12), 2531-2542, 2002.
- [3] B. Picard, E. Anterrieu, G. Caudal and P. Waldteufel *Improved windowing functions for Y-shaped SAIR*, Proc. of the IGARSS'02 (Toronto, Canada), 2002.
- [4] B. Picard, E. Anterrieu, G. Caudal and P. Waldteufel *Impact of the fringe washing function on the spatial resolution and on the radiometric sensitivity of the SMOS instrument*, Proc. of the IGARSS'03 (Toulouse, France), 2003.
- [5] E. Anterrieu *Stabilized Image Reconstruction Algorithm for SAIR*, Proc. of the IGARSS'02 (Toronto, Canada), 2002.