

Synthèse de bancs de filtres modulés orthogonaux à nombre de sous-bandes arbitrairement grand

Didier PINCHON¹, Cyrille SICLET², Pierre SIOHAN³

¹Université Paul Sabatier, Laboratoire MIP
31062 Toulouse Cedex, France

²Université catholique de Louvain, Laboratoire de télécommunications et télédétection
2 place du Levant, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique

³IRISA-INRIA, Projet Temics
Campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France
pinchon@cict.fr, siclet@tele.ucl.ac.be, pierre.siohan@irisa.fr

Résumé – Nous proposons une méthode de synthèse des bancs de filtres modulés orthogonaux qui s’applique dans le cas d’un nombre de sous-bandes arbitrairement grand. Une fonction dite prototype, définie sur un intervalle réel et dont l’orthogonalité est assurée par construction, est optimisée selon un critère d’énergie. Par un échantillonnage uniforme, dépendant du nombre de sous-bandes, elle produit ensuite des filtres prototypes discrets parfaitement orthogonaux dont la qualité est illustrée par des résultats de synthèse.

Abstract – We propose a design method for orthogonal modulated filter banks that can be used for an arbitrarily high number of subbands. A function, named prototype, defined over a real interval and being orthogonal by construction, is optimized according to an energy criterion. By a uniform sampling, depending upon the number of subbands, we get afterwards perfectly orthogonal prototype filters, the quality of which is illustrated by design examples.

1 Introduction

Parmi les différents bancs de filtres décrits dans la littérature, les bancs modulés à décimation critique orthogonaux se distinguent par le fait qu’ils peuvent être implémentés à l’aide d’algorithmes rapides et que leur synthèse se réduit à l’optimisation d’un seul filtre discret $h_d[n]$, appelé filtre prototype, que nous supposons réel et symétrique. Ce prototype peut être utilisé dans différents contextes, comme celui du codage en sous-bandes (bancs à base de transformée en cosinus ou de transformée de Fourier discrète modifiée (MDFT) [6, 4]) ou des modulations multiporteuses [10], les conditions d’orthogonalité étant les mêmes dans chaque cas. Nous nous placerons ici dans le contexte de bancs modulés utilisant une transformée en cosinus discrète de type IV (DCT-IV).

On notera N le nombre de sous-bandes d’un tel banc et $L = 2mN$ la longueur des filtres supposée être multiple de deux fois le nombre de sous-bandes. Les N filtres d’analyse et de synthèse sont respectivement donnés par [6]

$$h_k[n] = 2h_d[n] \cos \left[(2k+1) \frac{\pi}{2N} \left(n - \frac{L-1}{2} \right) + \theta_k \right], \quad (1)$$

$$f_k[n] = 2h_d[n] \cos \left[(2k+1) \frac{\pi}{2N} \left(n - \frac{L-1}{2} \right) - \theta_k \right], \quad (2)$$

avec $\theta_k = (-1)^k \frac{\pi}{4}$ et pour $0 \leq n \leq L-1$, $0 \leq k \leq N-1$.

Pour aboutir à une transformation parfaitement orthogonale les coefficients $h_d[n]$ doivent vérifier des conditions de reconstruction parfaite [6]. De ce fait, les critères usuels pour leur optimisation conduisent à des problèmes non-linéaires qui ne

peuvent être résolus simplement. C’est pourquoi, s’il existe des techniques efficaces dans le cas de longueurs relativement réduites (cf. par exemple [1, 3]), il est difficile de fournir des prototypes orthogonaux de très grandes longueurs. Récemment, une méthode décrite dans [8] a néanmoins permis d’atteindre jusqu’à 2048 sous-bandes et 16384 coefficients. Néanmoins, la complexité opératoire de cette méthode, qui reste liée à l’évaluation du critère d’optimisation, croît évidemment quand la longueur des filtres augmente, et en particulier lorsque le nombre de sous-bandes augmente. C’est pourquoi nous proposons ici une méthode qui évite cet écueil et permet d’optimiser des filtres pour un nombre de sous-bandes arbitrairement grand, sans dégradation des performances. Nous l’illustrerons dans le cas où le critère choisi est la maximisation de l’énergie pondérée du filtre prototype $H_d(z)$ mesurée par l’expression

$$J_{W_d}(h_d) = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H_d(e^{j2\pi\nu})|^2 W_d(\nu) d\nu}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H_d(e^{j2\pi\nu})|^2 d\nu}, \quad (3)$$

où $W_d(\nu)$ est une fonction de pondération positive à support dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et donc nulle en dehors de cet intervalle. On notera que le terme du dénominateur est une constante qui permet simplement d’obtenir une mesure d’énergie indépendante de la normalisation en amplitude des filtres.

2 Fonctions prototypes

2.1 Définition et propriété

Pour un entier $m \geq 1$, on désigne par \mathbf{E}_m l'ensemble des fonctions h sur l'intervalle réel $]-m, +m[$ telles que sur chaque sous-intervalle de $]-m, +m[$ de la forme $]\frac{l}{2}, \frac{l+1}{2}[$, avec $l = -2m, -2m+1, \dots, 2m-1$, la restriction de h est continue et h admet des limites aux bornes du sous-intervalle. Dans toute la suite, nous dirons qu'une fonction de \mathbf{E}_m est une *fonction prototype*¹ de paramètre m . Pour h dans \mathbf{E}_m et N un entier pair ≥ 2 , on désigne par $H_N(z)$ le filtre de longueur $2mN$ dont les coefficients transversaux $h_N[n]$ sont donnés par

$$h_N[n] = h\left(\frac{2n+1-2mN}{2N}\right), \quad n = 0, \dots, 2mN-1, \quad (4)$$

et l'on dira que $H_N(z)$ est engendré par h . Les points en lesquels sont ainsi calculées les valeurs de la fonction h ne sont jamais des demi-entiers et forment une subdivision régulière de l'intervalle $]-m, +m[$. Si la fonction h est paire (respectivement impaire), les filtres $H_N(z)$ sont symétriques (respectivement antisymétriques).

Nous introduisons ensuite une fonction de pondération $W(\nu)$, réelle, symétrique et positive, *i.e.* $W(\nu) \geq 0, \forall \nu \in]-\infty, \infty[$, et admettant une transformée de Fourier inverse notée $w(t)$. Nous prenons ensuite le cas d'un filtre prototype tel que $h_d[n] = h_N[n]$ et nous posons $W_d(\nu) = W_N(\nu) = W(N\nu)$. Nous désignons par $J_{W_N}(h_N)$ l'énergie pondérée de ce filtre $h_N[n]$.

Théorème 1.– L'énergie pondérée du filtre $H_N(z)$ engendré par la fonction prototype $h(t)$ admet une limite lorsque N tend vers l'infini, notée $J_W(h)$ et donnée par

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_{W_N}(h_N) = J_W(h) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 W(f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} \quad (5)$$

$$= \frac{\int_{-m}^{+m} \int_{-m}^{+m} h(t)h(u)w(t-u) dt du}{\int_{-m}^{+m} h^2(t) dt}, \quad (6)$$

où $H(f)$ est la transformée de Fourier de $h(t)$ donnée par

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (7)$$

Démonstration.– Le dénominateur de l'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H_N(e^{j2\pi\nu})|^2 d\nu = \sum_{n=0}^{2mN-1} h^2\left(\frac{2n+1-2mN}{2N}\right). \quad (8)$$

La fonction h est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[-m, +m]$ car c'est une fonction avec en tout point une limite à gauche et une limite à droite et un nombre fini de points de discontinuité. La dernière expression dans (8) est donc équivalente à $N \int_{-m}^{+m} h^2(t) dt$. Le numérateur de $J_{W_N}(h_N)$ est égal à

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H_N(e^{j2\pi\nu})|^2 W_N(\nu) d\nu \\ &= \frac{1}{N} \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |H_N(e^{j2\pi\frac{f}{N}})|^2 W(f) df. \quad (9) \end{aligned}$$

¹On veillera à bien distinguer les fonctions prototypes des filtres prototypes, les premières étant continues et les seconds discrets.

L'expression de $H_N(z)$ permet de considérer $H_N(e^{j2\pi\frac{f}{N}})$ à nouveau comme une somme de Riemann et l'on a

$$H_N(e^{j2\pi\frac{f}{N}}) \sim N e^{j2\pi f(m-\frac{1}{2N})} \int_{-m}^{+m} h(t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (10)$$

Puisque h est réelle, on obtient également la relation conjuguée et le numérateur de $J_{W_N}(h_N)$ est équivalent à

$$N \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |H(f)|^2 W(f) df. \quad (11)$$

Le passage à la limite donne (5).

Le numérateur de (5) est égal à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-m}^{+m} h(t)e^{j2\pi ft} dt \int_{-m}^{+m} h(u)e^{-j2\pi fu} du \right) W(f) df$$

et peut également s'écrire

$$\int_{-m}^{+m} \int_{-m}^{+m} h(t)h(u)w(t-u) dt du. \quad (12)$$

Cette propriété montre que, lorsque le nombre de sous-bandes est suffisamment important, il est possible de maximiser l'énergie pondérée $J_W(h)$ de la fonction prototype plutôt que celle des filtres prototypes engendrés $H_N(z)$.

2.2 Fonction prototype orthogonale

Définition. – On dira qu'une fonction prototype h est orthogonale si, pour tout N , le filtre $H_N(z)$ est un filtre prototype symétrique orthogonal.

Théorème 2.– Soit $h \in \mathbf{E}_m$ une fonction prototype de paramètre m . On note $G(t, z) = \sum_{n=0}^{m-1} h(-m+2n+t)z^{-n}$, pour $0 < t < \frac{1}{2}$. Alors h est une fonction prototype orthogonale si et seulement si h est symétrique et s'il existe m fonctions $\theta_i(t)$, $0 \leq i \leq m-1$, continues sur $[0, \frac{1}{2}]$ telles que pour $0 < t < \frac{1}{2}$, $G(t, z)$ et $G(t+1, z)$ vérifient l'égalité matricielle

$$\begin{aligned} [G(t, z) \ G(t+1, z)] &= \\ [G^{\text{init}}(t, z) \ G^{\text{init}}(t+1, z)] & \prod_{i=1}^{m-1} \Lambda(z) \Theta(\theta_i(t)) \quad (13) \end{aligned}$$

avec

$$\Lambda(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}, \quad \Theta(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

et

$$[G^{\text{init}}(t, z) \ G^{\text{init}}(t+1, z)] = \alpha [\cos \theta_0(t) \ \sin \theta_0(t)] \quad (15)$$

où α est une constante non nulle. Lorsque $\alpha = 1$, nous avons également $\int_{-m}^{+m} h^2(t) dt = 1$.

La démonstration résulte directement de la définition des fonctions prototypes orthogonales et de la propriété de factorisation en treillis des filtres prototypes orthogonaux associés aux bancs modulés en cosinus, cf. par exemple [6].

3 Optimisation des fonctions prototypes

3.1 Calcul de l'énergie

Intéressons-nous maintenant au calcul numérique de l'énergie pondérée de la fonction prototype h . Elle s'obtient à partir

de la quantité

$$E_W(h) = \int_{-m}^{+m} \int_{-m}^{+m} h(t)h(u)w(t-u) du. \quad (16)$$

Pour calculer numériquement l'intégrale (16), on découpe le carré d'intégration en carrés de côtés $\frac{1}{2}$ ayant des extrémités demi-entières. Sur chacun de ces $16m^2$ petits carrés, on calcule l'intégrale par le schéma d'intégration de Gauss-Legendre d'ordre n , avec n fixé, sur chacune des deux directions u et t .

Rappelons que le schéma de Gauss-Legendre d'ordre n permet d'évaluer la valeur numérique de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[-1, +1]$ par la formule [2] :

$$\int_{-1}^{+1} f(t) dt \approx \sum_{k=1}^n p_k f(x_k), \quad (17)$$

où les x_k , $k = 1, \dots, n$ sont les n racines du polynôme de Legendre de degré n , noté $P_n(x)$, et p_k , $k = 1, \dots, n$ des poids calculés par la formule

$$p_k = \frac{2(1-x_k^2)}{n^2 P_{n-1}^2(x_k)}. \quad (18)$$

Avec un tel choix des abscisses et des poids, l'évaluation de l'intégrale de f est exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n - 1$. Dans la pratique, on choisit $n = 6$ ou $n = 10$.

Après avoir légèrement transformé la formule (17) pour l'adapter à un intervalle de longueur $\frac{1}{2}$, et grâce à la symétrie, l'intégrale se met sous la forme

$$E_W(h) \approx \sum_{i=0}^{2mn-1} \sum_{j=0}^{2mn-1} h(u_i)h(u_j)w_{i,j} \quad (19)$$

où les $w_{i,j}$ sont les coefficients d'une matrice symétrique \mathbf{W} d'ordre $2mn$ qui ne dépend pas de h mais seulement de n et de la fonction poids W . On évalue donc une fois pour toute la valeur de ses coefficients avant d'optimiser la fonction coût. Le vecteur $\mathbf{V} = (h(u_0), h(u_1), \dots, h(u_{2mn-1}))$ de longueur $2mn$ est évalué pour des valeurs données des paramètres du problème d'optimisation et la fonction $E_W(h)$ s'écrit :

$$E_W(h) \approx \mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{V}. \quad (20)$$

3.2 Optimisation de l'énergie

Nous imposons ensuite les conditions d'orthogonalité définies par le théorème 2 et nous exprimons la fonction prototype à l'aide de m fonctions $\theta_i(t)$ choisies telles que

$$\theta_i(t) = \sum_{l=0}^{K-1} \theta_{i,l} t^l, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (21)$$

où $K - 1$ est le degré considéré du polynôme interpolateur et $\theta_{i,l}$, $l = 0, \dots, K - 1$ les K coefficients correspondants. On notera que cette formulation est l'équivalent en temps continu de la représentation dite compacte que nous avons présentée en [8] dans le cas discret. Le problème d'optimisation consiste ensuite à déterminer les coefficients $\theta_{i,l}$ minimisant l'énergie à la limite, *i.e.*

$$\min_{\theta_{i,l}} \mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{V} \quad (22)$$

C'est un problème d'optimisation non linéaire que nous résolvons avec la méthode dite "feasible sequential quadratic programming (CFSQP)" décrite dans la référence [5] et en prenant soin de choisir différents points d'initialisation.

m	J_∞	J_{128}	ε
1	1.898334×10^{-2}	1.898132×10^{-2}	1.10×10^{-10}
2	2.037405×10^{-3}	2.037340×10^{-3}	2.37×10^{-11}
3	3.183674×10^{-4}	3.182363×10^{-4}	8.01×10^{-6}
4	8.636129×10^{-5}	8.634476×10^{-5}	5.46×10^{-6}
5	1.344354×10^{-5}	1.380102×10^{-5}	7.60×10^{-4}
6	2.927395×10^{-6}	3.018592×10^{-6}	1.48×10^{-2}
7	1.229321×10^{-6}	1.373668×10^{-6}	4.70×10^{-3}
8	2.773781×10^{-7}	2.739358×10^{-7}	4.54×10^{-3}

TAB. 1 – Optimisation de l'énergie hors-bande pour des fonctions prototypes orthogonales de paramètre m , avec un facteur de retombée $\rho = 1$ et $K = 6$.

3.3 Gain en complexité

Un calcul direct de $J_{W_N}(h_N)$ impose mN évaluations des coefficients $h_N[n]$ à partir de paramètres angulaires dont l'expression est similaire à celle donnée en (21) [8], et l'utilisation de transformées de Fourier rapides de longueur supérieure à $4mN$.

Le passage à la limite permet de s'affranchir de l'accroissement de complexité avec N . En effet seulement $2mn$ évaluations de la fonction prototype à l'aide des relations (21) et (13) sont nécessaires, tandis que le calcul de la fonction quadratique donnant $E_W(h)$ a une complexité arithmétique en $\mathcal{O}(m^2n^2)$.

4 Évaluation de la méthode

Nous avons appliqué notre technique d'optimisation au calcul de fonctions prototypes produisant des filtres prototypes passe-bas de fréquence de coupure $f_{c,N} = \frac{1+\rho}{4N}$ avec ρ un facteur de retombée (« roll-off » en anglais) compris entre 0 et 1. La fonction W retenue est donc définie par

$$W(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |\nu| < f_c = \frac{1+\rho}{4} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (23)$$

Pour ces systèmes à N sous-bandes les résultats optimaux obtenus pour $\rho = 1$ et $K = 6$ sont donnés dans le tableau 1 où $J_\infty = 1 - J_W(h)$ désigne l'énergie hors-bande optimale pour la fonction prototype et J_{128} l'énergie hors-bande qui en résulte pour les filtres engendrés avec $N = 128$ sous-bandes.

En effet la connaissance d'une fonction prototype orthogonale $h(t)$ optimisée permet de calculer de manière instantanée, par simple échantillonnage, les filtres prototypes $H_N(z)$ pour n'importe quel nombre de sous-bandes N . On constate que la valeur de l'énergie hors-bande des filtres engendrés est alors très proche de la valeur limite J_∞ dès que $N \geq 128$.

Pour $N = 128$ une nouvelle optimisation est ensuite effectuée à l'aide de la méthode présentée en [8] et avec comme point de départ les filtres obtenus par échantillonnage. L'optimum J_{128}^* ainsi trouvé procure un gain d'énergie relatif $\varepsilon = (J_{128} - J_{128}^*)/J_{128}$ reporté dans la dernière colonne du tableau 1. Les très faibles valeurs de ε montrent la quasi-optimalité des résultats obtenus par échantillonnage.

La figure 1 donne une représentation de J_∞ , en fonction du paramètre ρ , pour différentes valeurs du paramètre m de la fonction prototype. L'optimisation de la fonction prototype

pour $m = 4$ et $\rho = 1$ produit le résultat représenté aux figures 2 et 3. Sur la partie positive de l'axe des temps on notera la présence des discontinuités aux instants $t = 5/2$ et $t = 7/2$. La représentation fréquentielle de la figure 3 montre le résultat de la maximisation de l'énergie de la fonction prototype dans l'intervalle fréquentiel $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

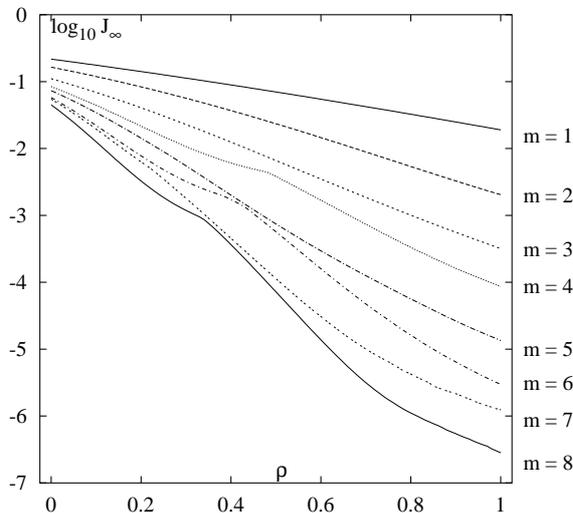


FIG. 1 – Meilleure énergie hors-bande en fonction de ρ et pour différentes valeurs du paramètre m de la fonction prototype.

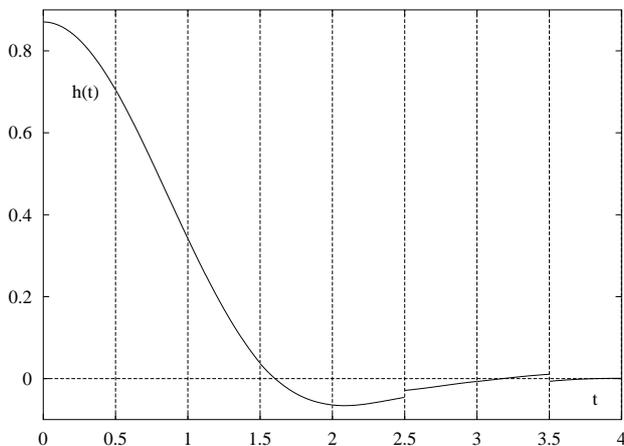


FIG. 2 – Réponse en temps de la fonction prototype pour $m = 4$ et $f_c = \frac{1}{2}$.

5 Conclusion

Nous avons présenté une méthode de synthèse de bancs de filtres modulés pour des systèmes ayant un nombre arbitrairement élevé de sous-bandes. Elle s'applique également dans le cas de systèmes biorthogonaux [7, 9].

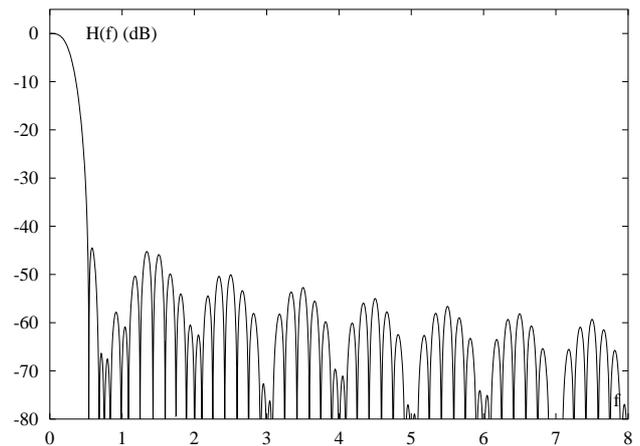


FIG. 3 – Réponse en fréquence de la fonction prototype pour $m = 4$ et $f_c = \frac{1}{2}$.

Références

- [1] Robert BREGOVIĆ et Tapio SARAMÄKI. « A systematic technique for designing prototype filters for perfect reconstruction cosine modulated and modified DFT filter banks ». Dans *IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS'01*, pages 33–36, Sidney, Australie, mai 2001.
- [2] P. J. DAVIS et P. RABINOWITZ. *Methods of numerical integration*. Academic Press, 1984.
- [3] Rima HLEISS. « Conception et égalisation de nouvelles structures de modulations multiporteuses ». Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Télécommunications de Paris, 2000.
- [4] Tanja KARP et Norbert J. FLIEGE. « Modified DFT filter banks with perfect reconstruction ». *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, 46(11):1404–1414, novembre 1999.
- [5] C. LAWRENCE, J. L. ZHOU, et A. L. TITS. « User's Guide for CFSQP Version 2.5: A C code for solving (large scale) constrained nonlinear (minimax) optimization problems, generating iterates satisfying all inequality constraints ». Rapport Technique TR-94-16r1, University of Maryland, 1998.
- [6] Truong Q. NGUYEN et R. David KOILPILLAI. « The theory and design of arbitrary-length cosine-modulated filter banks and wavelets, satisfying perfect reconstruction ». *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(3):473–483, mars 1996.
- [7] Didier PINCHON, Pierre SIOHAN, et Cyrille SICLET. Procédé de détermination de coefficients de filtrage d'un banc de filtres modulé, terminal et application correspondants. Brevet FR 01 10665, déposé le 9 août 2001.
- [8] Didier PINCHON, Pierre SIOHAN, et Cyrille SICLET. « A fast design method for orthogonal modulated filter banks ». Dans *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'02*, Orlando, USA, mai 2002.
- [9] Cyrille SICLET. « Application de la théorie des bancs de filtres à l'analyse et à la conception de modulations multiporteuses orthogonales et biorthogonales ». Thèse de doctorat, Université de Rennes I, 2002.
- [10] Pierre SIOHAN, Cyrille SICLET, et Nicolas LACAILLE. « Analysis and Design of OFDM/OQAM Systems Based on Filterbank Theory ». *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(5):1170–1183, mai 2002.