

# Formes d'échantillonnage adaptées à la gigue

Bernard LACAZE, Corinne MAILHES

Laboratoire IRIT-TéSA  
2 rue Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse Cedex 7, France  
Bernard.Lacaze@tesa.prd.fr, Corinne.Mailhes@tesa.prd.fr

**Résumé** — Cet article s'intéresse à la recherche de la forme optimale de la prise d'échantillons en présence d'un phénomène de gigue, c'est-à-dire d'erreurs sur les instants d'échantillonnage. La fonction d'échantillonnage est recherchée de façon à ce qu'elle minimise la puissance d'erreur de reconstruction du processus à temps continu à partir de la connaissance du processus échantillonné perturbé par la gigue. Sous certaines hypothèses (processus à temps continu respectant la condition d'échantillonnage, gigue modélisée par une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi), on peut ainsi construire la forme d'échantillonnage optimale adaptée à la gigue.

**Abstract** — This paper studies the existence of an optimal sampling function when jitter is present. The sampling function is such that it minimizes the error power of the reconstruction of the continuous-time process when the reconstruction is achieved based on the knowledge of the sampled version of the process, subjected to some jitter. Under some hypotheses (continuous-time process following the sampling condition, modeling of the jitter by a sequence of independent identically distributed random variables), it is possible to construct an optimal sampling function, well-adapted to jitter.

## 1 Introduction

De façon générale, le système utilisé pour réaliser l'échantillonnage de signaux issus de capteurs physiques peut être représenté par un système linéaire invariant dans le temps (SLIT), suivi d'un interrupteur [1]. Ces systèmes sont caractérisés par leur réponse impulsionnelle, que l'on peut aussi qualifier de "fonction d'échantillonnage"  $f$  [2]. Un problème largement étudié dans la littérature sur l'échantillonnage est la présence d'erreurs sur les instants d'échantillonnage, appelées phénomène de gigue ou "jitter". Ce problème a été abordé depuis longtemps : dans [3] et [4], on peut trouver l'expression du spectre de la suite échantillonnée en présence de gigue, en fonction du spectre du processus à temps continu. Plus récemment, des auteurs ont proposé des estimateurs pour pallier le problème de la gigue d'échantillonnage [5], [6]. Le problème de reconstruction en présence de gigue a été étudié dans [7], sans toutefois s'intéresser au problème de reconstruction du signal à temps continu.

Dans cet article, nous nous intéressons à la reconstruction du signal à temps continu à partir de la connaissance de la suite échantillonnée, à temps discret, perturbée par un phénomène de gigue. Plus particulièrement, nous étudions l'existence d'une forme d'échantillonnage optimale permettant de minimiser la puissance d'erreur de reconstruction du signal à temps continu.

Considérons un processus aléatoire stationnaire centré  $\mathbf{Z} = \{Z(t), t \in \mathbb{R}\}$  possédant une densité spectrale  $s_Z(\omega)$  vérifiant la condition de Nyquist sur  $(-\pi, \pi)$  :

$$E[Z(t)] = 0 \quad (1)$$

et

$$E[Z(t)Z^*(t-\tau)] = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega\tau} s_Z(\omega) d\omega. \quad (2)$$

Nous nous intéressons à l'échantillonnage de ce processus aléatoire en présence d'un phénomène de gigue. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que la période d'échantillonnage est égale à l'unité. Les erreurs d'échantillonnage sont modélisées par une suite de variables aléatoires indépendantes  $\mathbf{A}' = \{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$  de même loi et de fonction caractéristique

$$\psi(\omega) = E[e^{i\omega A_n}]. \quad (3)$$

Comme l'échantillonnage est effectué à l'aide d'un SLIT, la suite échantillonnée  $\mathbf{U}' = \{U_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , perturbée par le phénomène de gigue  $\mathbf{A}'$ , est définie par

$$U_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) Z(n - A_n - u) du. \quad (4)$$

A titre d'exemple, l'échantillonneur moyenneur est caractérisé par une fonction d'échantillonnage  $f$  de la forme

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & \text{pour } u \in (-\Delta, +\Delta) \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (5)$$

L'effet d'une largeur d'intégration  $\Delta$  aléatoire a été étudié dans [8]. Le problème étudié dans le présent article est la recherche de la forme  $f$  qui minimise la puissance de l'erreur de reconstruction

$$\sigma^2 = E \left[ \left| Z(t) - \hat{Z}(t) \right|^2 \right] \quad (6)$$

où  $\hat{Z}(t)$  est le meilleur estimateur linéaire de  $Z(t)$ . Il est intéressant de remarquer que, dans le contexte choisi,  $\sigma^2$  est indépendante de  $t$ , ce qui est faux lorsque la condition de Nyquist n'est pas vérifiée. La résolution de ce problème permet de choisir la forme d'échantillonnage optimale liée à la présence de la gigue, ce qui peut aussi être considéré comme un prétraitement préalable à un échantillonnage idéal dans lequel la prise d'échantillon est ponctuelle.

## 2 L'erreur d'interpolation et sa minimisation

Pour une fonction  $f$  fixée, la recherche du meilleur interpolateur linéaire  $\hat{Z}(t)$  minimisant la puissance de l'erreur (6) permet la reconstruction du processus à partir de la suite échantillonnée  $\mathbf{U}'$  donnée par (4). Cet interpolateur est obtenu par projection du processus  $\mathbf{Z}$  sur l'espace de Hilbert engendré par la suite échantillonnée observée  $\mathbf{U}'$  [9],[10]. Des calculs dont les grandes lignes sont données dans l'annexe 1 permettent de montrer que cette reconstruction peut être obtenue comme la sortie d'un filtre linéaire invariant dans le temps dont la fonction de transfert est :

$$H(\omega) = F^*(\omega) \Psi(\omega) \frac{s_Z(\omega)}{|F(\omega) \Psi(\omega)|^2 s_Z(\omega) + \beta} \quad (7)$$

avec

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \quad (8)$$

et

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |F(\omega)|^2 (1 - |\psi(\omega)|^2) s_Z(\omega) d\omega. \quad (9)$$

La puissance de l'erreur de reconstruction correspondante s'écrit alors :

$$\sigma^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\beta s_Z(\omega) d\omega}{\beta + |F(\omega) \psi(\omega)|^2 s_Z(\omega)}. \quad (10)$$

Cette puissance est une fonction de  $s_Z(\omega)$  (le spectre de puissance du processus  $\mathbf{Z}$ ), de  $\psi(\omega)$  (qui caractérise la gigue), et de la forme  $f(t)$  (qui définit le procédé de prise d'échantillon) à travers sa transformée de Fourier  $F(\omega)$ . On cherche à optimiser cette dernière quantité de façon à minimiser  $\sigma^2$ . Le détail de la solution est donné dans l'annexe 2. La résolution de ce problème d'optimisation permet d'aboutir à l'expression de  $|F_0(\omega)|^2$  optimale, donnée par (27) dans l'annexe 2, à condition de vérifier une condition de positivité (28). Mais il est important de noter que  $F_0(\omega)$  est non définie en  $\omega = 0$ . En conséquence, la transformée de Fourier inverse  $f_0(t)$  qui représente le procédé d'échantillonnage optimum n'est pas définie au sens des fonctions, mais pourra être approchée arbitrairement.

## 3 Un exemple

Le problème exposé dans cet article est illustré sur un exemple dans lequel le processus  $\mathbf{Z}$  possède une densité spectrale constante sur  $(-\pi, \pi)$  ( $s_Z(\omega) = 1$ ,  $\omega \in (-\pi, \pi)$ ) et le phénomène de gigue sur l'échantillonnage est caractérisé par

$$\Pr[A_n = a] = \Pr[A_n = -a] = \frac{1}{2}, \quad a > 0. \quad (11)$$

Tout autre exemple de loi des erreurs d'échantillonnage pourrait être considéré : on pourrait supposer ces erreurs uniformément réparties sur un intervalle, ou suivant une loi gaussienne. La solution du problème de la fonction optimale d'échantillonnage est donnée dans l'annexe 2 et pourrait être appliquée dans n'importe quel cas de loi

statistique de la gigue. L'exemple présenté dans ce paragraphe correspond au cas d'un phénomène de gigue observé dans un système dans lequel les différents échantillons proviennent de deux trajets différents. Dans ce cas de gigue, la fonction caractéristique s'écrit :

$$\psi(\omega) = \cos(\omega a) \quad (12)$$

et la fonction optimale d'échantillonnage peut être trouvée pour  $a < 0.25$  en utilisant le résultat (26) donné dans l'annexe 2. On obtient ainsi :

$$F_0(\omega) = \sqrt{-\frac{1}{\cos^2(\omega a)} + \frac{\pi a - a/2 - \tan(\pi a)}{\log(\cos(\pi a)) |\sin(\omega a) \cos(\omega a)|}}. \quad (13)$$

En extrapolant la valeur non définie en  $\omega = 0$ , la transformée de Fourier inverse de  $F_0(\omega)$  peut être calculée et nous permet de visualiser sur la figure 1 la fonction optimale d'échantillonnage adaptée à ce cas de jitter. Il est intéres-

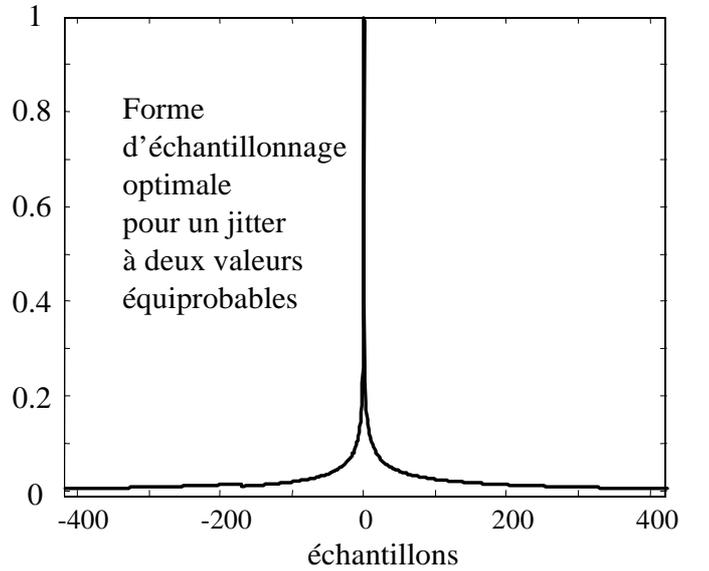


FIG. 1: Forme optimale de fonction d'échantillonnage pour un jitter binaire équiprobable.

sant de remarquer que, pour ce cas de jitter, la forme de la fonction d'échantillonnage évolue très peu en fonction de la valeur de  $a$  : pour  $a$  variant entre 0 et 0.25, les fonctions optimales correspondantes se superposent pratiquement.

Cette fonction optimale d'échantillonnage correspond à une puissance d'erreur de reconstruction minimale (10) qui s'écrit

$$\sigma_0^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{|\tan(\omega a)|}{(1 - 2\pi) |\tan(\omega a)| + \theta} d\omega \quad (14)$$

avec

$$\theta = -\pi a \frac{1 - 2\pi + \frac{2}{a} \tan(\pi a)}{\log[\cos(\pi a)]}. \quad (15)$$

Cette puissance d'erreur de reconstruction optimale est obtenue en combinant une forme d'échantillonnage optimale et un interpolateur optimal. Il est intéressant de comparer cette puissance d'erreur à celle obtenue en ne prenant pas en compte une forme optimale d'échantillonnage. Prenons par exemple le cas d'un échantillonnage ponctuel. Ce type d'échantillonnage idéal est représenté par

une fonction d'échantillonnage  $f(u)$  sous forme d'une impulsion de Dirac et sa transformée de Fourier associée est alors  $F(\omega) = 1$  pour  $\omega \in (-\pi, \pi)$ . En présence d'erreurs sur les instants d'échantillonnage, définies par (11), l'utilisation du meilleur interpolateur (minimisant la puissance d'erreur de reconstruction du processus à temps continu) conduit à une puissance d'erreur dont l'expression peut être calculée à partir de (10) :

$$\sigma_{ponct.}^2 = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}} \text{Arctg} \left( \sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}} \tan(a\pi) \right) \quad (16)$$

avec  $\beta = \frac{1}{2}(1 - \text{sinc}(2\pi a))$  défini dans (9). De plus, on peut aussi comparer ces deux puissances d'erreur  $\sigma_0^2$  et  $\sigma_{ponct.}^2$  à celle obtenue dans le cas où on ne se préoccupe ni de la forme d'échantillonnage optimale, ni de la présence d'erreurs sur l'échantillonnage. Ainsi, dans le cas d'un échantillonnage ponctuel, en présence de la gigue définie par (11), on pourrait utiliser l'interpolateur classique de Shannon [9], [10] pour reconstruire le processus à temps continu :

$$\hat{Z}_{Shan.}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sinc}(\pi(t-n)) U_n. \quad (17)$$

Dans ce cas, la puissance de l'erreur obtenue est

$$\sigma_{Shan.}^2 = 4\pi(1 - \text{sinc}(a\pi)). \quad (18)$$

La figure 2 présente l'évolution de ces trois puissances d'erreur en fonction de  $a$ , paramètre caractérisant la gigue. L'intérêt de prendre en compte la gigue à la fois pour

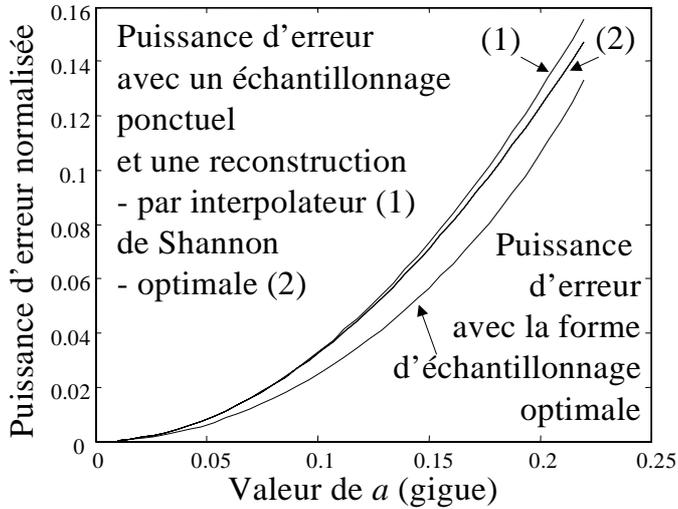


FIG. 2: Evolution des différentes puissances d'erreurs en fonction du paramètre du jitter.

construire l'interpolateur linéaire et pour concevoir un pré-traitement préalable à l'échantillonnage apparaît clairement. Il est aussi intéressant de remarquer que l'apport de la forme optimale d'échantillonnage est maximal pour des giges faibles comme l'illustre la figure 3, présentant le rapport  $\sigma_{ponct.}^2 / \sigma_0^2$  en fonction du paramètre de gigue.

## 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons montré qu'il est possible de construire une fonction d'échantillonnage adaptée à la

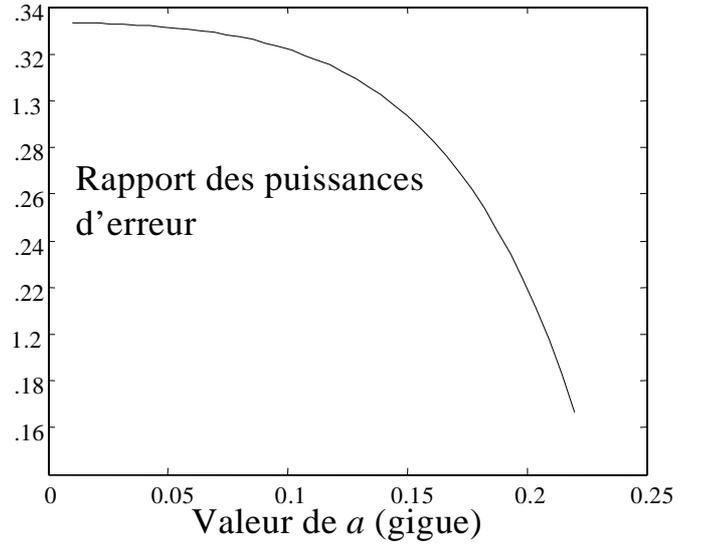


FIG. 3: Rapport des puissances d'erreurs en fonction du paramètre du jitter.

présence d'erreurs sur les instants d'échantillonnage (phénomène de gigue ou "jitter"). Nous donnons la façon de calculer cette fonction de manière à minimiser la puissance d'erreur de reconstruction du processus aléatoire à temps continu à partir de l'observation du processus échantillonné, perturbé par le phénomène de gigue. Toutefois, la solution n'est valable qu'à condition de vérifier une contrainte de positivité puisque le calcul conduit à l'expression du module carré de la transformée de Fourier de la fonction d'échantillonnage. Dans la mesure où cette contrainte est vérifiée, il est nécessaire d'extrapoler la valeur de cette fonction en  $\omega = 0$  car elle n'est pas définie en ce point. Ceci permet ensuite de calculer la fonction d'échantillonnage optimale. Dans l'exemple présenté, nous avons mis en évidence l'intérêt de cette fonction d'échantillonnage en comparant les puissances d'erreur de reconstruction obtenues respectivement avec cette fonction d'échantillonnage optimale et avec une fonction d'échantillonnage ponctuel.

## 5 Annexe 1 : estimateur $\hat{Z}(t)$

L'estimateur  $\hat{Z}(t)$  qui minimise la puissance de l'erreur (6) est tel que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad E \left[ \left( Z(t) - \hat{Z}(t) \right) U^*(n) \right] = 0. \quad (19)$$

Dans l'isométrie  $I_U$  reliant les espaces de Hilbert engendrés respectivement par la suite échantillonnée  $U(n)$  et par son spectre de puissance  $s_U(\omega)$ , on a les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} U(n) &\xleftrightarrow{I_U} e^{i\omega n} \\ \hat{Z}(t) &\xleftrightarrow{I_U} \mu_t(\omega). \end{aligned}$$

Alors,

$$E \left[ \hat{Z}(t) U^*(n) \right] = \int_{-\pi}^{+\pi} \mu_t(\omega) e^{-i\omega n} s_U(\omega) d\omega. \quad (20)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & E [Z(t) U^*(n)] \\ &= E \left[ E \left[ \begin{array}{c} Z(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(u) Z^*(n - a_n - u) du \\ | A_n = a_n \end{array} \right] \right], \end{aligned} \quad (21)$$

expression dans laquelle  $E[\cdot | \cdot]$  note l'espérance conditionnelle. En faisant intervenir l'isométrie sur  $Z(t)$  et en utilisant (8), on obtient

$$E [Z(t) U^*(n)] = E \left[ \int_{-\pi}^{+\pi} F^*(\omega) e^{i\omega A_n} e^{i\omega(t-n)} s_Z(\omega) d\omega \right]. \quad (22)$$

Ainsi, en prenant en compte (20) et (22), l'équation (19) conduit à

$$\mu_t(\omega) = F^*(\omega) \Psi(\omega) \frac{s_Z(\omega)}{s_U(\omega)} e^{i\omega t} = H(\omega) e^{i\omega t} \quad (23)$$

ce qui montre que l'estimateur  $\hat{Z}(t)$  est obtenu comme la sortie d'un filtre linéaire invariant dans le temps, de transmittance  $H(\omega)$ . Afin de trouver l'expression de  $s_U(\omega)$ , la fonction d'autocorrélation de la suite  $\mathbf{U}'$  est calculée, suivant la méthode utilisée pour (21)

$$E [U(n) U^*(n-m)] = \int_{-\pi}^{+\pi} |F(\omega)|^2 \Phi(\omega, m) s_Z(\omega) e^{i\omega m} d\omega$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, m) &= E \left[ e^{i\omega[A_{n-m} - A_n]} \right] \\ &= |\Psi(\omega)|^2 + \delta(m) \left( 1 - |\Psi(\omega)|^2 \right) \end{aligned}$$

$\delta(m)$  notant le symbole de Kronecker. Ceci permet d'aboutir à l'expression de  $s_U(\omega)$  et donc de la transmittance donnée dans (7).

## 6 Annexe 2 : Minimisation de $\sigma^2$

En remarquant que la puissance  $\sigma^2$  ne change pas si on remplace  $F(\omega)$  par  $kF(\omega)$ , quelle que soit la constante réelle  $k$ , on peut imposer une contrainte de normalisation sur  $F(\omega)$ . Ainsi, le problème revient à déterminer  $G_0(\omega)$  extremum de

$$I(G) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\omega}{c(\omega) + G(\omega)} \quad (24)$$

sous les contraintes d'égalité et d'inégalité suivantes

$$\int_{-\pi}^{\pi} b(\omega) G(\omega) d\omega = 1 \quad \text{et} \quad G(\omega) \geq 0. \quad (25)$$

où  $c(\omega)$ ,  $b(\omega)$ ,  $G(\omega)$  sont définis par

$$\begin{cases} c(\omega) = 1/s_Z(\omega) \\ b(\omega) = \frac{1 - |\psi(\omega)|^2}{|\psi(\omega)|^2} s_Z(\omega) \\ G(\omega) = |F(\omega) \psi(\omega)|^2. \end{cases}$$

La contrainte d'égalité de (25) correspond à la contrainte de normalisation de  $F(\omega)$  évoquée quelques lignes au-dessus. La minimisation de  $I(G)$  conduit à la solution suivante :

$$G_0(\omega) = -c(\omega) + \frac{1}{\lambda \sqrt{b(\omega)}} \quad (26)$$

avec

$$\lambda = \frac{\int \sqrt{b(\omega)} d\omega}{1 + \int c(\omega) b(\omega) d\omega}.$$

Ainsi, la puissance d'erreur  $\sigma^2$  de (6) est minimale pour une fonction d'échantillonnage telle que :

$$|F_0(\omega)|^2 = \frac{1}{|\psi(\omega)|^2} G_0(\omega) \quad (27)$$

à condition de vérifier que  $G_0(\omega)$  donné par (26) est une fonction positive :

$$G_0(\omega) \geq 0. \quad (28)$$

Il est important de noter que cette solution  $|F_0(\omega)|^2$  est fonction de  $\frac{1}{\sqrt{b(\omega)}}$ . Or  $b(0) = 0$ , ce qui rend  $F_0(\omega)$  non définie en  $\omega = 0$ . De plus, la valeur minimale de (24) est donnée par

$$I(G_0) = \int_{-\pi}^{+\pi} \lambda \sqrt{b(\omega)} d\omega.$$

## Références

- [1] J. Max, J-L. Lacoume, *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, tome 1*. Masson, Paris, 1996.
- [2] T. Hurt, "Spectral effects of sampling a continuous-scan Fourier transform spectrometer with a capacitive transimpedance amplifier", *Optical Engineering*, vol. 40, no. 7, pp. 1415-1417, 2001.
- [3] A.V. Balakrishnan, "On the problem of time jitter in sampling", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 8, pp. 226-236, 1962.
- [4] H. Akaike, "Effect of timing-error on the power spectrum of sampled data", *Ann. Inst. Statist. Math.*, vol. 11, no. 3, 1960.
- [5] T. M. Souders, D. R. Flach, C. Hagwood, G. L. Yang, "The effect of timing jitter in sampling systems", *IEEE Trans Instrum. Meas.*, vol 39, pp. 80-85, Feb. 1990.
- [6] G. Tong, T. M. Souders, "Compensation of Markov estimator error in time-jittered sampling of nonmonotonic signals", *IEEE Trans Instrum. Meas.*, vol 42, pp. 931-935, Oct. 1993.
- [7] P. Marziliano, M. Vetterli, "Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations", *IEEE Trans Signal Processing*, vol 48, pp. 3462-3471, Dec. 2000.
- [8] B. Lacaze, C. Mailhes, "Influence of a random integration width on periodic sampling", in *Proc. IEEE ICASSP-02*, pp. II.1189-II.1192, 2002.
- [9] B. Lacaze, *Processus aléatoires pour les communications numériques*. Hermès, 2000.
- [10] A. M. Yaglom, *Theory of random functions*. Prentice Hall, 1962.