Estimation de l'Ordre du Modèle AR 3-D

B. AKSASSE[1], Y. STITOU[2], Y. BERTHOUMIEU[3], M. NAJIM[1, 2]

[1]LASIS-UMR 5131 CNRS-TFE, [2]ESI-UMR 5131, [3]IXL-UMR 5818
ENSEIRB- Bordeaux I, BP 99, 33402 Talence Cedex France
Tel: +33 5 56 84 66 74; Fax: + 33 5 56 84 84 06.

{aksasse, berthoumieu}@enseirb.fr, {stitou, najim}@tsi.u-bordeaux.fr

Résumé – La représentation des signaux multidimensionnels (m-D) par la classe des modèles AR m-D suscite deux problèmes : l'estimation des paramètres et la sélection de l'ordre. Dans cet article, nous étudions une nouvelle méthode dédiée à la sélection de l'ordre du modèle AR m-D. Il s'agit de l'estimation du triplet (p_1, p_2, p_3) correspondant à un modèle AR 3-D causal à support quart d'espace. On démontre que l'information sur l'ordre du modèle est implicitement contenue dans le rang d'une matrice convenablement construite. Contrairement aux cas 1- et 2-D, l'extraction de l'ordre implique la résolution d'un système non linéaire par la méthode de Newton – Raphson.

Abstract – Modelling multi-dimensional (m-D) signals by using m-D autoregressive AR models involves two problems which merit being resolved. The first concern the estimation of the model parameters and the other is the selection of model order. Here, we concentre our selves with the problem of the order estimation of 3-D AR model with quarter space region of support. We try to answer to this question by using some well techniques of linear algebra. Finally the problem is reduced to resolve a non linear system via Newton. – Raphson method.

1. Introduction

1. 1 Préliminaires

Dans le domaine du traitement des signaux, qu'ils soient monodimensionnels (1-D) ou multidimensionnels (m-D), le choix du modèle est un problème crucial. Dans le cas des signaux 1-D, 2-D et 3-D différentes applications exploitent la modélisation paramétrique *autorégressive* (AR) et *autorégressive à moyenne ajustée* (ARMA). Ces modélisations supposent généralement la causalité du signal à représenter. Si te n'est pas le cas, d'autres types de modèles non-causaux peuvent être utilisés : modèles de Gibbs, modèle de Markov, etc. Concernant les modèles AR et ARMA, il se pose le double problème fondamental de l'estimation des paramètres et du choix de l'ordre de ces modèles.

Etant donné un volume *M*x*N*x*T* de données 3-D dont chaque pixel (m, n, t) est décrit par un modèle autorégressif tridimensionnel AR 3-D à support quart d'espace (quarter space en anglais) (QS) défini par :

$$y(m,n,t) = -\sum_{\substack{k_1=0 \\ (k_1,k_2,k_3)\neq 0,0,0)}}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} \sum_{k_3=0}^{p_3} a_{k_1,k_2,k_3} y(m-k_1, n-k_2, t-k_3) + e(m,n,t) \quad (1)$$

Les coefficients $\{a_{k_1,k_2,k_3}\}$ sont les paramètres AR 3-D transverses. Le processus générateur $\{e(m,n,t)\}$ est supposé être un processus blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ_e^2. Dans l'équation (1), la valeur du processus au point (m,n,t) est donnée par la somme pondérée des coefficients AR et de ses anciennes valeurs contenues dans le voisinage causal à support QS. L'expression de ce support est caractérisée par le triplet (p_1, p_2, p_3) appelé ordre du modèle. Cette modélisation est utilisée pour l'interpolation des données manquantes dans une séquence d'image [1] ou pour l'analyse et la synthèse des séquences d'images texturées 3-D [2]. Notons que pour que le modèle soit identifiable, la condition de stabilité doit être prise en compte. Dans [3], l'auteur a explicité la condition de stabilité BIBO (entrée bornée – sortie bornée) cf. [3]. Pour l'estimation des paramètres dans les cas 1-D et 2-D, plusieurs méthodes et algorithmes d'estimation ont été développés dans la littérature pour répondre à cette question : moindres carrés, maximum de vraisemblance, méthode de Yule-Walker, etc.

Concernant le problème d'identification des paramètres AR transverses, à notre connaissance, le seul travail traitant de ce problème est présenté dans [4]. En effet, l'auteur a développé un algorithme récursif pour résoudre les équations de Yule – Walker associées à un modèle AR 3-D causal. Pour la sélection de l'ordre du modèle AR 3-D, il n'existe à notre connaissance aucune contribution publiée dans ce domaine.

Pour les modèles mono et bidimensionnels, les méthodes dédiées à l'estimation de l'ordre se scindent en deux familles. La première maximise ou minimise un critère d'information [5]-[8] en balayant une certaine plage de valeur de l'ordre du modèle. La seconde famille s'appuie sur un formalisme algébrique [9]-[11]. Les méthodes utilisant ce formalisme ne nécessitent pas une estimation des paramètres transverses, elles sont fondées sur une restitution du rang de certaines matrices structurées convenablement construites. Cette estimation du rang est généralement obtenue grâce à une décomposition en valeurs singulières (SVD), rang qui est directement lié à l'ordre du modèle.

Dans cet article, nous allons exploiter de type algébrique pour l'estimation de l'ordre (p_1, p_2, p_3) du modèle AR 3-D causal à support QS. Cette méthode est fondée sur les statistiques du second ordre en l'occurrence sur la fonction d'autocorrélation.

Algébriquement pour une matrice, le nombre des valeurs singulières non nulles détermine la valeur de son rang. En pratique compte tenu de différentes sources de bruit et du support limité de l'observation, les valeurs singulières des matrices supposées nulles en fait ne le sont pas, elles prennent des valeurs très petites mais non nulles. L'utilisation des seuils parfois ad hoc pour la distinction entre les valeurs significatives et non significatives permet de s'affranchir cet obstacle.

1.2 Fonction d'Autocorrélation du Modèle AR 3-D

La fonction d'autocorrélation du processus (1) à valeur réelle est définie par

$$r_y(h_1,h_2,h_3) = E[y(m,n,t)y(m-h_1,n-h_2,t-h_3)] \quad (2)$$

L'opérateur $E[.]$ désigne l'espérance mathématique et $(.)^T$ celui de l'opérateur transposé.
$n_i \leftarrow n_j$ signifie que la nouvelle valeur n_j est assignée à n_i.
La fonction d'autocorrélation du processus (1) satisfait l'équation suivante :

$$\sum_{k_1=0}^{p_1}\sum_{k_2=0}^{p_2}\sum_{k_3=0}^{p_3} a_{k_1,k_2,k_3} r_y(h_1-k_1,h_2-k_2,h_3-k_3) = \sigma_e^2\delta(h_1,h_2,h_3) \quad (3)$$

$a_{0,0,0}=1$ et $\delta(h_1,h_2,h_3)$ est la fonction delta de Kronecker. Les équations normales de Yule-Walker 3-D sont construites en explicitant la relation (3) pour $h_1=0,\cdots,p_1$, $h_2=0,\cdots,p_2$ et $h_3=0,\cdots,p_3$.
Pour tout $h_1>0$, $h_2>0$ ou $h_3>0$, la relation (3) devient

$$\sum_{k_1=0}^{p_1}\sum_{k_2=0}^{p_2}\sum_{k_3=0}^{p_3} a_{k_1,k_2,k_3} r_y(h_1-k_1,h_2-k_2,h_3-k_3) = 0 \quad (4)$$

Une forme matricielle de l'équation (4) peut être obtenue en construisant deux vecteurs $\underline{\underline{\underline{\theta}}}$ et $\underline{\underline{\underline{r_\theta}}}$, représentant respectivement l'ensemble des paramètres AR transverses ainsi que l'ensemble des échantillons de la fonction d'autocorrélation qui leur correspondent

$$\underline{\underline{\underline{\theta}}} = \left[\underline{\underline{\theta}}_0;\underline{\underline{\theta}}_1;\cdots;\underline{\underline{\theta}}_{p_1}\right]^T,\ \underline{\underline{\underline{r_\theta}}} = \left[\underline{\underline{r_\theta}}_0;\underline{\underline{r_\theta}}_1;\cdots;\underline{\underline{r_\theta}}_{p_1}\right]^T \quad (5)$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{\theta}}_{k_1} = \left[\underline{\theta}_{k_1,0};\underline{\theta}_{k_1,1};\cdots;\underline{\theta}_{k_1,p_2}\right]^T \\ \underline{\underline{r_\theta}}_{k_1} = \left[\underline{r_\theta}_{k_1,0};\underline{r_\theta}_{k_1,1};\cdots;\underline{r_\theta}_{k_1,p_2}\right]^T \end{cases},\ k_1=0,1,\cdots,p_1 \quad (6)$$

$$\begin{cases} \underline{\theta}_{k_1,k_2} = [a_{k_1,k_2,0};a_{k_1,k_2,1};\cdots;a_{k_1,k_2,p_3}]^{\mathrm{T}} \\ \underline{r_\theta}_{k_1,k_2} = [r_y(h_1-k_1,h_2-k_2,h_3);\cdots;r_y(h_1-k_1,h_2-k_2,h_3-p_3)]^T \end{cases}$$

$$k_1=0,1,\cdots,p_1,\ k_2=0,1,\cdots,p_2 \quad (7)$$

L'expression (4) devient donc

$$r_y(h_1,h_2,h_3) = -\underline{\underline{\underline{\theta}}}^T\,\underline{\underline{\underline{r_\theta}}}. \quad (8)$$

2. Sélection de l'ordre du modèle

Sur la base des échantillons de la fonction d'autocorrélation $r_y(.,.,.)$ nous allons construire une matrice structurée $\mathbf{R}_0$ dont le rang contient explicitement l'information sur l'ordre (p_1,p_2,p_3) du modèle AR 3-D. L'utilisation de l'équation (8) sera le point de départ de la méthode proposée. Soit $\mathbf{R}_0$ la matrice $(m_1m_2m_3)\times(n_1n_2n_3)$ définie par

$$\mathbf{R}_0 = [\,\underline{\underline{\underline{\mathbf{r}}}}_0^{0,0},\cdots,\underline{\underline{\underline{\mathbf{r}}}}_0^{0,n_3-1},\cdots,\underline{\underline{\underline{\mathbf{r}}}}_0^{n_2-1,0},\cdots,\underline{\underline{\underline{\mathbf{r}}}}_0^{n_2-1,n_3-1},\cdots, \underline{\underline{\underline{\mathbf{r}}}}_{n_1-1}^{0,0},\cdots,\underline{\underline{\underline{\mathbf{r}}}}_{n_1-1}^{0,n_3-1},\cdots,\underline{\underline{\underline{\mathbf{r}}}}_{n_1-1}^{n_2-1,0},\cdots,\underline{\underline{\underline{\mathbf{r}}}}_{n_1-1}^{n_2-1,n_3-1}\,] \quad (9)$$

Les relations de contraintes relatives aux indices sont données par :

$$m_1 >> n_1 > p_1+1,\ m_2 >> n_2 > p_2+1,\ m_3 >> n_3 > p_3+1 \quad (10)$$

Pour comprendre ce choix, nous rappelons que l'outil d'estimation est basé sur le rang de la matrice structurée $\mathbf{R}_0$. Le choix de $m_i >> n_i$ pour $i=1,2,3$ est fait pour ne raisonner que sur le nombre des colonnes linéairement indépendantes (LI) de la matrice $\mathbf{R}_0$ lors de la détermination du son rang. La seconde contrainte : $n_i > p_i+1$ pour $i=1,2,3$ a été faite pour s'assurer que lors de la décrémentation de nombre de colonne de n_i à n_i-1, $n_i \leftarrow n_i-1$, $i=1,2,3$, la relation (8) reste toujours vérifiée. En pratique, certaines connaissances a priori sur le signal à modéliser permettent un choix sur des m_i et n_i.

Les $m_1m_2m_3\times 1$ vecteurs colonnes $\underline{\underline{\underline{\mathbf{r}}}}_{h_1}^{h_2,h_3}$ pour $h_1=0,\cdots,n_1-1$, $h_2=0,\cdots,n_2-1$ et $h_3=0,\cdots,n_3-1$ de la matrice $\mathbf{R}_0$ sont donnés par

$$\underline{\underline{\underline{\mathbf{r}}}}_{h_1}^{h_2,h_3} = \left[\underline{\underline{\mathbf{r}}}_0^{h_2,h_3};\underline{\underline{\mathbf{r}}}_1^{h_2,h_3};\cdots;\underline{\underline{\mathbf{r}}}_{m_1-1}^{h_2,h_3}\right]^T \quad (11)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}}_{i_1}^{h_2,h_3} = \left[\underline{\mathbf{r}}_{i_1}^{0,h_3};\underline{\mathbf{r}}_{i_1}^{1,h_3};\cdots;\underline{\mathbf{r}}_{i_1}^{m_2,h_3}\right]^T,\ i_1=0,1,\cdots,m_1-1 \quad (12)$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{i_1}^{i_2,h_3} = \left[r_{i_1}^{i_2,0};r_{i_1}^{i_2,1};\cdots;r_{i_1}^{i_2,m_3-1}\right]^T \quad (13)$$

pour $i_1=0,1,\cdots,m_1-1$ et $i_2=0,1,\cdots,m_2-1$.
L'élément générique de ces vecteurs est donné par les échantillons de la fonction d'autocorrélation de la façon suivante

$$r_{i_1}^{i_2,i_3} = r_y(h_1+i_1,h_2+i_2,h_3+i_3) \quad (14)$$

$i_1=0,1,\cdots,m_1-1$ et $i_2=0,1,\cdots,m_2-1$, $i_3=0,1,\cdots,m_3-1$.
La réécriture compacte de la matrice $\mathbf{R}_0$ conduit à une structure de type $m_1\times n_1$ block Hankel donnée par :

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_0 & \tilde{\mathbf{R}}_1 & \cdots & \tilde{R}_{n_1-1} \\ \tilde{\mathbf{R}}_1 & \tilde{\mathbf{R}}_2 & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{R}}_{m_1-1} & \tilde{\mathbf{R}}_{m_1} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{m_1+n_1-2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

et chaque bloc $\tilde{\mathbf{R}}_k$, $k=0,1,\cdots,m_1+n_1-2$, est une matrice $m_2\times n_2$ type Hankel block Hankel définie par

$$\tilde{\mathbf{R}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_k^0 & \tilde{\mathbf{R}}_k^1 & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_k^{n_2-1} \\ \tilde{\mathbf{R}}_k^1 & \tilde{\mathbf{R}}_k^2 & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_k^{n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{R}}_k^{m_2-1} & \tilde{\mathbf{R}}_k^{m_2} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_k^{m_2+n_2-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

La matrice $\tilde{\mathbf{R}}_k^l$, $k=0,1,\cdots,m_1+n_1-2$, $l=0,1,\cdots,m_2+n_2-2$ est une matrice $m_3\times n_3$ de type Hankel définie par:

$$\widetilde{\mathbf{R}}_k^l = \begin{bmatrix} r_k^{l,0} & r_k^{l,1} & \cdots & r_k^{l,n_3-1} \\ r_k^{l,1} & r_k^{l,2} & \cdots & r_k^{l,n_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_k^{l,m_3-1} & r_k^{l,m_3} & \cdots & r_k^{l,n_2+m_3-2} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

où $r_k^{l,m}$, $m = 0,\cdots,m_3 + n_3 - 2$ sont donnés par (14).

Proposition:

Le rang g_0 de la matrice $\mathbf{R}_0$ est égale à

$$g_0 = (n_1 - p_1)n_2 p_3 + p_1(n_2 - p_2)n_3 + n_1 p_2(n_3 - p_3) + p_1 p_2 p_3 \qquad (18)$$

Preuve

Pour démontrer cette proposition, nous allons déterminer le nombre de vecteurs colonnes de la matrice $\mathbf{R}_0$ LI.

A partir de l'équation (8), les vecteurs colonnes suivants :

$$\{ \underset{\equiv p_1}{\mathbf{r}}^{p_2,p_3},\cdots,\underset{\equiv p_1}{\mathbf{r}}^{p_2,n_3-1},\cdots,\underset{\equiv p_1}{\mathbf{r}}^{n_2-1,p_3},\cdots,\underset{\equiv p_1}{\mathbf{r}}^{n_2-1,n_3-1},\cdots,$$
$$\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{p_2,p_3},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{p_2,n_3-1},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{n_2-1,p_3},\cdots\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{n_2-1,n_3-1} \} \qquad (19)$$

seront des combinaisons linéaires des vecteurs colonnes LI suivants

$$\{ \underset{\equiv 0}{\mathbf{r}}^{0,0},\cdots,\underset{\equiv 0}{\mathbf{r}}^{0,n_3-1},\cdots\underset{\equiv 0}{\mathbf{r}}^{n_2-1,0},\cdots,\underset{\equiv 0}{\mathbf{r}}^{n_2-1,n_3-1},\cdots,\underset{\equiv p_1-1}{\mathbf{r}}^{0,0},\cdots,\underset{\equiv p_1-1}{\mathbf{r}}^{0,n_3-1},$$
$$\cdots,\underset{\equiv p_1-1}{\mathbf{r}}^{n_2-1,0},\cdots,\underset{\equiv p_1-1}{\mathbf{r}}^{n_2-1,n_3-1},\underset{\equiv p_1}{\mathbf{r}}^{0,0},\cdots,\underset{\equiv p_1}{\mathbf{r}}^{0,p_3-1},\cdots,\underset{\equiv p_1}{\mathbf{r}}^{p_2,0},\cdots,\underset{\equiv p_1}{\mathbf{r}}^{p_2,p_3-1}$$
$$,\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{0,0},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{0,p_3-1},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{p_2,0},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{p_2,p_3-1} \} \qquad (20)$$

Donc le rang g_0 de la matrice $\mathbf{R}_0$ sera égal au nombre de ces vecteurs colonnes LI.

$$\begin{aligned} g_0 &= n_1 n_2 n_3 - (n_1 - p_1)(n_2 - p_2)(n_3 - p_3) \\ &= (n_1 - p_1)n_2 p_3 + p_1(n_2 - p_2)n_3 + n_1 p_2(n_3 - p_3) + p_1 p_2 p_3 \end{aligned}$$

CQFD

Nous voyons bien que le rang g_0 de la matrice $\mathbf{R}_0$ contient l'information sur l'ordre (p_1, p_2, p_3) du modèle AR 3-D QS. Dans la suite, nous allons donner un théorème qui établit la relation, non-linéaire, entre l'ordre du modèle et les rangs de quatre matrices.

Théorème:

Soient $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$ trois matrices construites en décrémentant d'une unité les valeurs de $n_1 \leftarrow n_1 - 1$, $n_2 \leftarrow n_2 - 1$ et $n_3 \leftarrow n_3 - 1$ respectivement. Notons par g_1, g_2 et g_3 le rang respectif de chacune des matrices, alors l'ordre (p_1, p_2, p_3) vérifie le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} g_0 - g_1 = n_2 p_3 + n_3 p_2 - p_2 p_3 \\ g_0 - g_2 = n_1 p_3 + n_3 p_1 - p_1 p_3 \\ g_0 - g_3 = n_1 p_2 + n_2 p_1 - p_1 p_2 \end{cases} \qquad (21)$$

Preuve

Pour démontrer ce théorème, on utilise le résultat (18) de la proposition.

Sous la condition que $n_i > p_i + 1$ pour $i = 1, 2, 3$, nous avons : lorsque on décrémente n_1 d'une unité i.e. $n_1 \leftarrow n_1 - 1$, le rang g_1 de la matrice $\mathbf{R}_1$, déduite de $\mathbf{R}_0$ par la suppression des $n_2 n_3$ derniers vecteurs colonnes suivants $\{ \underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{0,0},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{0,n_3-1},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{n2-1,0},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{0,n_3-1} \}$, est donné par la relation

$$\begin{aligned} g_1 &= (n_1 - 1 - p_1)n_2 p_3 + p_1(n_2 - p_2)n_3 + (n_1 - 1)p_2(n_3 - p_3) + p_1 p_2 p_3 \\ &= g_0 - n_2 p_3 - p_2 n_3 + p_2 p_3 \end{aligned}$$

De la même façon lorsque on décrémente n_2 d'une unité i.e. $n_2 \leftarrow n_2 - 1$, le rang g_2 de la matrice $\mathbf{R}_2$, déduite de $\mathbf{R}_0$ par la suppression des $n_1 n_3$ vecteurs colonnes suivants $\{ \underset{\equiv 0}{\mathbf{r}}^{n2-1,0},\cdots,\underset{\equiv 0}{\mathbf{r}}^{n_2-1,n_3-1},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{n2-1,0},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{0,n_3-1} \}$, est donné par

$$\begin{aligned} g_2 &= (n_1 - p_1)(n_2 - 1)p_3 + p_1(n_2 - 1 - p_2)n_3 + n_1 p_2(n_3 - p_3) + p_1 p_2 p_3 \\ &= g_0 - n_1 p_3 - p_1 n_3 + p_1 p_3 \end{aligned}$$

Enfin lorsque on décrémente n_3 d'une unité n_3 à $n_3 - 1$, i.e. $n_3 \leftarrow n_3 - 1$, le rang g_3 de la matrice $\mathbf{R}_3$, déduite de $\mathbf{R}_0$ par la suppression des $n_1 n_2$ vecteurs colonnes suivants $\{ \underset{\equiv 0}{\mathbf{r}}^{0,n_3-1},\cdots,\underset{\equiv 0}{\mathbf{r}}^{n_2-1,n_3-1},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{0,n_3-1},\cdots,\underset{\equiv n_1-1}{\mathbf{r}}^{n_2-1,n_3-1} \}$, est donné par la relation

$$\begin{aligned} g_3 &= (n_1 - p_1)n_2 p_3 + p_1(n_2 - p_2)(n_3 - 1) + n_1 p_2(n_3 - 1 - p_3) + p_1 p_2 p_3 \\ &= g_0 - n_1 p_2 - n_2 p_1 + p_1 p_2 \end{aligned}$$

CQFD

Pour trouver l'ordre du modèle, il faut résoudre le système non linéaire (21) dont le vecteur $p = [p_1, p_2, p_3]^T$ est solution. A cet effet, nous utilisons la méthode de Newton – Raphson pour résoudre l'équation $F(p) = 0$ cf. (21).

Nous avons :

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} - J(p^{(k)})^{-1} F(p^{(k)}) \qquad (22)$$

où $F(p)$ forme le système non linéaire et $J(p)$ est la matrice jacobienne formée des dérivées partielles de F par rapport aux composantes du vecteur p .

La méthode cherche une solution itérativement. Le résultat dépend de l'initialisation. Le problème du minimum local risque de piéger la solution vers une fausse valeur.

Remarques

1) comme notre méthode s'appuie sur les rangs de matrices construites à partir de la fonction d'autocorrélation $\{ r_y(.,.,.) \}$.

En pratique, nous pouvons utiliser une de ses estimations biaisée, non biaisée ou pondérée [12]. Généralement, il est préférable d'utiliser l'estimation non biaisée qui possède une bonne résolution en estimation spectrale par rapport à l'estimation biaisée même si elle a une variance plus grande.

2) Pour déterminer les rangs g_i, $i = 0, 1, 2, 3$ des matrices R_i, on utilise la méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD). En effet, on utilise la SVD et le critère des rapports normalisés (RN) définis par :

$$RN(k) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} s_i^2}{\sum_{i=1}^{n_c} s_i^2}} \quad 1 \le k \le n_c , \qquad (23)$$

où n_c est le nombre de colonnes de la matrice considérée dont s_i^2 $i = 1,\cdots,n_c$ sont ces valeurs singulières. La première valeur de k satisfaisant $RN(k) \ge \xi$ [9] sera sélectionnée comme le rang de la matrice considérée, où ξ est un seuil prédéfini proche mais inférieur à l'unité.

3. Exemple Numérique

Dans ce paragraphe, nous allons tester la méthode développée sur un exemple de simulation. Le modèle AR 3-D est d'ordre $(2,2,1)$. Les paramètres AR du modèle sont donnés dans le tableau ci-dessous

TAB. 1 : paramètres du modèle AR 3-D d'ordre $(2,2,1)$

$a_{0,0,0}$	$a_{0,1,0}$	$a_{0,2,0}$	$a_{1,0,0}$	$a_{1,1,0}$	$a_{1,2,0}$
1	−0.8	0.07	−0.1	0.08	−0.007

$a_{2,0,0}$	$a_{2,1,0}$	$a_{2,2,0}$	$a_{0,0,1}$	$a_{0,1,1}$	$a_{0,2,1}$
−0.2	0.16	−0.014	−0.9	0.72	−0.063

$a_{1,0,1}$	$a_{1,1,1}$	$a_{1,2,1}$	$a_{2,0,1}$	$a_{2,1,1}$	$a_{2,2,1}$
0.09	−0.072	0.0063	0.18	−0.144	0.0126

Les paramètres $m_i = 4$, $n_i = 3$ ont été utilisés pour la construction des matrices R_i. Nous avons généré un bloc de taille $16 \times 16 \times 16$. Le processus générateur est supposé être une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance unité $N(0,1)$. Pour calculer la fréquence d'apparition (en %) des ordres estimés, nous avons effectué 100 essais de type Monte-Carlo. Les résultats sont fournis dans le tableau suivant.

TAB. 2 : fréquences d'apparition des ordres estimés

Ordre	(2,2,0)	(1,1,1)	(1,2,1)	(1,3,1)	(2,1,1)	(2,2,1)
%	2	5	7	3	7	54

Ordre	(2,3,1)	(3,1,1)	(3,2,1)	(3,3,1)	(2,3,2)	(2,2,2)
%	6	5	4	3	1	3

4. Conclusion

Dans cet article, nous avons développé une solution au problème de l'estimation de l'ordre du modèle AR 3-D. Ces modèles permettent de modéliser des blocs de textures 3-D. Dans ce contexte, nous nous sommes limités à la représentation causale autorégressive à support quart d'espace (QS). La qualité de la modélisation dépend du type des données à modéliser : stationnaires, non-stationnaires, gaussiennes, non-gaussiennes. Il conditionne donc l'outil à utiliser pour résoudre le problème. Si dans le cas 1-D et 2-D, la méthode algébrique permet de résoudre ce problème d'une façon linéaire, le passage au 3-D, mène à la résolution d'un système non linéaire. A cet effet, l'utilisation de la méthode de décomposition en valeur singulière (SVD), complétée par la résolution d'un système non linéaire par la méthode de Newton-Raphson conduit à l'estimation l'ordre du modèle.

Comme perspective à ce travail, nous envisageons d'exploiter dans cette méthode d'estimation d'ordre de nouveaux résultats émergents en algèbre multilinéaire [13]. En outre, nous envisageons l'extension de ces résultats pour d'autres types de causalité par exemple Demi-espace Asymétrique (NSHS), et pour la modélisation la plus générale ARMA 3-D.

Références

[1] A. C. Kokaram, R. D. Morris, W. Fitzgerald, and P. J. W. Rayner, *Interpolation of missing data in image sequences.* Proceeding IEEE Trans. Image Processing, vol. 4, pp. 1509-1519, Nov. 1995.

[2] M. Szummer and R. W. Picard, *Temporal texture modeling*. Proceeding IEEE ICIP-96, vol. 3, pp. 823-826, Lausanne Switzerland 1996.

[3] M. G. Strintzis, *Tests of stability of multidimensional filters*. IEEE Trans. Ciruits and Systems, vol. CS-24, pp. 432-437, 1977.

[4] B. S. Choi, *A recursive algorithm for solving 3-D Yule-Walker equations of causal 3-D AR models*. IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47, pp. 2491-2502, 1999.

[5] H. Akaike, *A new look at the statistical model identification*. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-19, pp. 716-723, 1974.

[6] J. Rissanen, *Modeling by shortest data description*. Automatica, vol. 14, pp. 465-471, 1978.

[7] R. L. Kashyap and R. Chellappa, *Estimation and choice of neighbors in spatial-interaction models of images*. IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-29, no. 1, pp. 60-72, Jan. 1983.

[8] B. Aksasse and L. Radouane, *Two-dimensional autoregressive (2-D AR) model order estimation*. IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47, pp. 2072-2077, July 1999.

[9] J. A. Cadzow, *Spectral estimation: an overdetermined rational model equation approach*. *Proc. IEEE vol. 70, pp. 907-938, Sept. 1982.*

[10] X.-D. Zhang and Y.-S. Zhang, *Determination of the MA order of an ARMA process using sample correlations.* IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, no. 6, pp. 2277-2280, June 1993.

[11] B. Aksasse, L. Badidi, and L. Radouane, *A rank test based approach to order estimation-part I: 2-D AR models application*. IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47, pp. 2069-2072, July 1999.

[12] X. Guyon. *Champs Aléatoires sur un Réseau : Modélisations Statistiques et Applications*. Edition Masson Paris, 1993.

[13] L. De Lathauwer. *Signal Processing based on multilinear algebra*, Thèse de Doctorat, Université Catholique de Leuven, Belgique 1997.