

La transformation de Fisz pour l'estimation d'images d'intensité Poissonnienne dans le domaine des ondelettes

Jalal FADILI¹, Jérôme MATHIEU¹, Michel DESVIGNES²

¹GREYC CNRS UMR 6072
ENSICAEN 6, Bd du Maréchal Juin, 14050 Caen

²LIS CNRS UMR 5083
961, rue de la Houille Blanche, BP 46, 38402 St. Martin d'Hères
Jalal.Fadili@greyc.ismra.fr, Michel.Desvignes@lis.inpg.fr

Résumé –

Nous présentons un nouvel estimateur d'images d'intensité Poissonnienne dans le domaine des ondelettes. Cette méthode est basée sur la normalité asymptotique d'une fonction non-linéaire des coefficients de détail et d'échelle de la transformée de Haar, appelée la transformée de **Fisz**. Nous exposons quelques résultats asymptotiques, tels que la normalité et la décorrélation des pixels de l'image transformée. Fort de ces résultats, l'image originale bruitée par un processus de Poisson, peut être considérée après transformation de Fisz comme étant contaminée par un bruit Gaussien additif blanc. Ainsi, les débruiteurs classiques s'appliquent directement. Plus exactement, nous appliquons dans le cadre de ce papier un estimateur Bayésien que nous avons récemment développé, utilisant comme a priori une nouvelle classe de distributions, les *formes K de Bessel* (FKB). Les simulations menées montrent que la transformation de Fisz offre des performances au moins aussi bonnes que les transformations stabilisatrices pour des images d'intensité régulière ou constante par morceaux. Elle dépasse clairement ces approches lorsque le taux de comptage faible. Combiner la transformation de Fisz avec le débruiteur Bayésien FKB offre les meilleurs résultats.

Abstract –

A novel wavelet-based Poisson-intensity estimator of images is presented. This method is based on the asymptotic normality of a certain function of the Haar wavelet and scaling coefficients called the *Fisz* transformation. Some asymptotic results such as normality and decorrelation of the transformed image samples are extended to the 2D case. This Fisz-transformed image is then treated as if it corrupted with an additive Gaussian white noise. Classical denoisers can be applied. More specifically, we apply a novel Bayesian denoiser that we have recently developed. In the latter, a prior model is imposed on the wavelet coefficients designed to capture the sparseness of the wavelet expansion. Seeking probability models for the marginal densities of the wavelet coefficients, the new family of *Bessel K forms* (BKF) densities are used. From simulation studies, the Fisz transformation compares very favorably to variance stabilizing transformation methods in both smooth and piece-wise constant intensities. It clearly outperforms the other "Gaussianising" methods in the low-count setting. Combining the Fisz transformation and the BKF prior, the Bayesian denoiser yields the best results.

1 Introduction

La régression non-paramétrique dans le domaine des ondelettes est un outil fondamental en analyse des signaux et des images. Le but est d'estimer une fonction (nD) g à partir de ses mesures bruitées. Seules quelques hypothèses sont imposées sur g , e.g. appartenance à un espace de fonctions donné (Sobolev, Besov, etc). Plusieurs débruiteurs basés sur la théorie statistique ont ainsi vu le jour aussi bien dans un contexte classique que Bayésien, voir [1] pour un état de l'art détaillé.

Si la plupart des débruiteurs dans le domaine des ondelettes existants s'attaquent à l'estimation d'une composante déterministe noyée dans un bruit additif (souvent Gaussien), le débruitage en présence d'un bruit Poissonnien pose lui des problèmes spécifiques. Ce dernier cas a déjà fait l'objet de quelques travaux dans la littérature [2]. L'approche usuelle consiste à utiliser une transformation stabilisatrice de la variance, telle que la transformation d'Anscombe. L'estimation est ensuite effectuée considérant le bruit ainsi transformé comme additif blanc Gaussien. Cependant, cette transformation atteint clairement ses limites à faible comptage, où l'on s'éloigne des conditions du théorème central limite. L'approche de Kolaczyk [3] consiste à ajuster les seuils

directement lors du débruitage mais seule la base de Haar peut être utilisée. Ainsi, cette méthode n'est pas adaptée pour des images d'intensité Poissonnienne régulière.

En nous inspirant des travaux de [4] en 1D, nous présentons un estimateur d'images d'intensité Poissonnienne dans le domaine des ondelettes basé sur la normalité asymptotique d'une fonction non-linéaire des coefficients de détail et d'échelle de la transformée de Haar, appelée la transformée de Fisz. Nous montrons quelques propriétés statistiques de cette transformée notamment la décorrélation et la normalité du bruit dans l'image transformée. Exploitant ces propriétés, les estimateurs classiques destinés à un bruit additif Gaussien peuvent directement s'appliquer. Plus spécifiquement, nous mettons à profit un débruiteur Bayésien que nous avons introduit récemment, et qui utilise une nouvelle famille de distributions a priori appelées les formes K de Bessel (FKB) [6].

2 Le modèle a priori FKB

Dans l'approche Bayésienne, un modèle a priori est imposé sur les coefficients de détail de la transformée d'ondelettes or-

thonormale discrète (TOD) de l'image g . Compte tenu du caractère creux de la TOD, les densités de probabilité de ces coefficients sont connues pour être généralement symétrique, leptokurtique et à queues relevées. Le simple modèle a priori Gaussien se révèle ainsi inefficace. Plusieurs choix ont été proposés dans la littérature dont le modèle des Gaussiennes généralisées (GGD) et le modèle α -stable. Chacun présente ses avantages et inconvénients mais aucun des deux ne possède une forme analytique simple pour le débruiteur, nécessitant ainsi une intégration numérique. Nous avons mis en oeuvre une nouvelle famille de distributions a priori à deux paramètres. Ce modèle a été proposé récemment dans [5] et se révèle très efficace pour modéliser la distribution d'une large classe d'images filtrées par une variété de filtres passe-bandes. Il est évident que la TOD fait partie de cette classe de filtres. Le modèle FKB est alors adapté pourvu que la distribution des coefficients de détail soit unimodale, symétrique et leptokurtique.

La densité de probabilité des FKB est donnée par:

$$f(x; c, p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(p)} \left(\frac{c}{2}\right)^{-\frac{p}{2}-\frac{1}{4}} \left|\frac{x}{2}\right|^{p-\frac{1}{2}} K_{p-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{c}}|x|\right) \quad (1)$$

pour $p > 0, c > 0$, où $K_\nu(x)$ est la fonction de Bessel modifiée. p et c sont respectivement les paramètres de forme et d'échelle. En utilisant cet a priori dans [6], nous avons montré son efficacité pour modéliser la distribution des coefficients d'ondelettes sur une large base d'images. Nous avons par ailleurs mis au point un estimateur des hyperparamètres (p , c et variance du bruit) par une méthode de cumulants. Une expression analytique de l'espérance conditionnelle a posteriori (ECP) a aussi été montrée facilitant l'implémentation du débruiteur.

3 La transformation de Fisz 2D

3.1 Algorithme

Étant donnée une image de comptages y_{mn} , qui est une réalisation d'une variable aléatoire $Y_{mn} \sim \mathcal{P}(\lambda_{mn})$, la transformation de Fisz se décrit de la manière suivante:

1. Appliquer une échelle de décomposition de la transformée d'ondelette de Haar. Cependant, les filtres non normalisés $\{1/2, -1/2\}$ et $\{1/2, 1/2\}$ sont utilisés. Nous notons d_{mn}^o les coefficients de détail à chaque orientation o et localisation (m, n) , et les coefficients d'approximation a_{mn}^{LL} .
2. Modifier les coefficients de détail comme suit:

$$z_{mn}^o = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{m,n}^{LL} = 0 \\ \frac{d_{mn}^o}{\sqrt{a_{m,n}^{LL}}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2)$$

Ces nouveaux coefficients de détail sont ainsi les réalisations d'une variable aléatoire Z_{mn}^o dont la distribution asymptotique est Gaussienne:

Lemme 3.1 Si les Y_{mn} sont des variables indépendantes suivant des lois de Poisson avec des intensités λ_{mn} , alors:

$$Z_{m,n}^o \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1/2) \quad (3)$$

lorsque

$$\text{pour } (i, j) \in \{0, 1\}^2 \quad \lambda_{2m+i, 2n+j} \rightarrow \infty, \\ \frac{\lambda_{2m+1, 2n}}{\lambda_{2m, 2n}} \rightarrow 1, \frac{\lambda_{2m+1, 2n+1}}{\lambda_{2m, 2n+1}} \rightarrow 1, \frac{\lambda_{2m, 2n+1}}{\lambda_{2m, 2n}} \rightarrow 1$$

La preuve de ce lemme découle directement du théorème de Fisz [7] pour des processus de Poisson 1D. Ce résultat signifie que les coefficients de détail modifiés z_{mn}^o tendent en distribution vers une Gaussienne (centrés et de variance $1/2$) lorsque les comptages moyens sont suffisamment grands et proches dans tout voisinage. Des déviations de ces hypothèses induiront un écart de la normalité.

3. Répéter les étapes 1-2 à chaque échelle (jusqu'à $J = \log_2(N)$) en gardant les coefficients d'approximation intacts. Il en découle que les coefficients de détail à toutes les échelles et orientations, ainsi modifiés, sont une version Gaussienne des coefficients originaux.
4. Reconstruire la nouvelle image \mathbf{u} en utilisant la transformée d'ondelette de Haar inverse, avec les filtres non normalisés. Ainsi, on peut écrire:

$$\mathbf{u} = \mathcal{F}\mathbf{y} \quad (4)$$

où \mathcal{F} est l'opérateur de la transformation de Fisz.

3.2 Propriétés

Nous pouvons établir une expression générale de l'opérateur \mathcal{F} . L'opérateur de reconstruction inverse peut aussi être déduit simplement de \mathcal{F} . On peut montrer que cet opérateur conserve la somme des coefficients $\sum_{m,n} u_{mn} = \sum_{m,n} y_{mn}$. Par ailleurs, la transformation de Fisz d'une image \mathbf{y} constante est idempotente, e.g. $\mathcal{F}\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Plus intéressant encore, nous avons montré deux propriétés qui sont des extensions 2D des résultats de [4] pour le cas 1D. Considérons Y_{mn} des variables Poissonniennes iid de moyenne λ , alors les coefficients de l'image transformée \mathbf{u} sont asymptotiquement décorrélés et gaussiens avec une moyenne λ et une variance unitaire. Ces propriétés sont vérifiées à condition que N et l'intensité minimale de l'image $\min \lambda_{mn}$ soient suffisamment grands, et que la moyenne de l'image des intensités originales Λ soit suffisamment petite. En pratique, ces hypothèses sont vérifiées et la transformation de Fisz donne de bons résultats même pour des images d'intensité assez hétérogène.

Considérons comme image d'intensité Λ une image 256×256 8 bits du fantôme de Hoffman. Ce fantôme est couramment utilisé en tomographie à émission de positons où le bruit est Poissonien. La Fig.3 montre les quantiles de $\mathcal{F}\mathbf{y} - \mathcal{F}\Lambda$ en fonction de ceux d'une variable normale ainsi que leur fonction d'auto-corrélation (FAC). Les mêmes graphes pour la transformation d'Anscombe (opérateur \mathcal{A}) sont aussi portés sur cette figure à titre de comparaison. La transformation de Fisz aboutit à une meilleure "normalisation" que la transformation d'Anscombe. Les FACs sont cependant assez proches montrant que la transformation de Fisz n'introduit pas de corrélation supplémentaire. Cette normalité et blancheur du bruit dans l'image transformée nous ramènent naturellement à appliquer les algorithmes de débruitage non-linéaire, notamment en contexte Bayésien en utilisant la nouvelle famille d'a priori des FKB.

3.3 Le débruiteur

De façon générale, pour estimer une image d'intensité Λ à partir de sa version bruitée \mathbf{y} (bruit de Poisson), l'algorithme

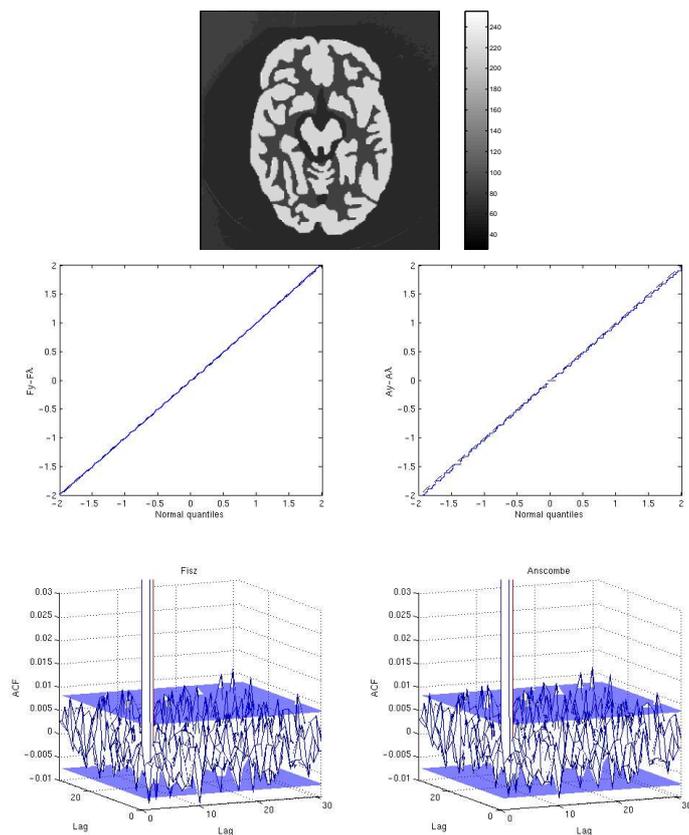


FIG. 1: Comparaison entre les transformations de Fisz et d'Anscombe sur le fantôme de Hoffman. Les graphes des quantiles et les FACS sont sur la 2^{ème} et la 3^{ème} ligne.

de débruitage se décrit comme suit:

1. Calculer la transformée de Fisz $\mathbf{u} = \mathcal{F}\mathbf{y}$ qui est maintenant considérée comme Gaussienne.
2. Estimer les paramètres du modèle FKB et appliquer le débruiteur Bayésien non linéaire dans le domaine des ondelettes sur \mathbf{u} .
3. Appliquer la transformation de Fisz inverse sur l'image débruitée $\hat{\mathbf{u}}$ pour obtenir une estimée $\hat{\mathbf{A}}$.

4 Résultats

Nous comparons tout d'abord, par le biais de simulations, les performances de notre débruiteur en présence de bruit Poissonien en utilisant les transformations de Fisz et d'Anscombe. L'image des intensités est celle du fantôme de Hoffman. Nous utilisons l'ondelette de Daubechies de régularité 4 et l'échelle la plus grossière d'analyse est $\log_2 \log N^2 + 1$ issue de résultats asymptotiques [1].

Les simulations montrent la supériorité de la transformation de Fisz sur celle d'Anscombe (Fig.3). Ces graphes représentent le rapport signal-sur-ruisque (RSR) en dB moyenné sur 100 simulations en fonction du facteur d'échelle des intensités. C'est le facteur par lequel est multipliée l'image des intensités afin de simuler les faibles et les forts taux de comptage. La différence entre les deux transformations est flagrante à faible comptage mais s'amenuise à mesure que les comptages sont grands. En combinant la transformation de Fisz et le débruiteur Bayésien,

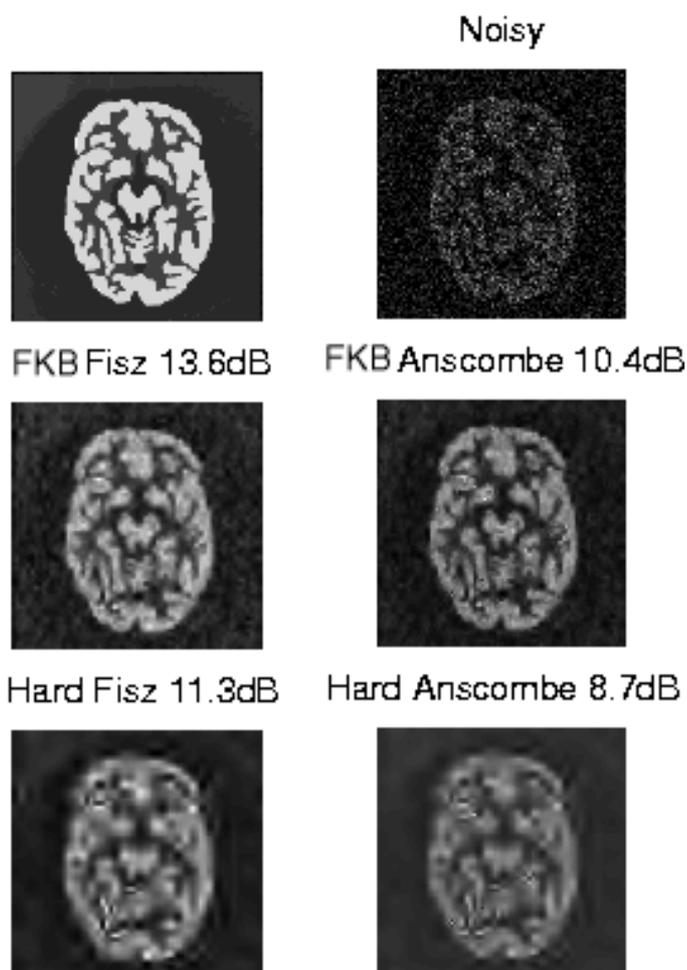


FIG. 2: Exemple d'application des transformées de Fisz d'Anscombe avec les débruiteurs Bayésien FKB et universel avec seuillage dur (Hard). L'image de Hoffman est contaminée par un bruit de Poisson avec un facteur d'échelle de 0.01 (faible comptage).

nous obtenons les meilleurs résultats bien supérieurs aux autres algorithmes de débruitage, résultat confirmé par la Fig.2.

La méthode proposée a finalement été appliquée à des images d'angiographie X. Ces images présentent typiquement un bruit dominant de grenaille photonique suivant une loi de Poisson. Afin d'apprécier la qualité de l'estimation, nous avons analysé les images de différence $\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}$ avant transformation inverse (Fisz ou Anscombe). Idéalement, les résidus de ces images devraient suivre une loi normale conformément à la théorie asymptotique (section 3.2). Nous portons sur la Fig.4 les résidus en fonction des quantiles Gaussiens. Il est clair que le débruiteur Bayésien FKB avec Fisz et Anscombe vérifie cette propriété alors que les erreurs d'estimation des autres méthodes de débruitage utilisées engendrent un départ de la normalité. Ceci est dû d'une part à la normalité asymptotique prévue par les résultats énoncés auparavant, et d'autre part au compromis entre biais et variance d'estimation qui semble mieux atteint par le débruiteur Bayésien FKB avec la transformation de Fisz que par les autres débruiteurs.

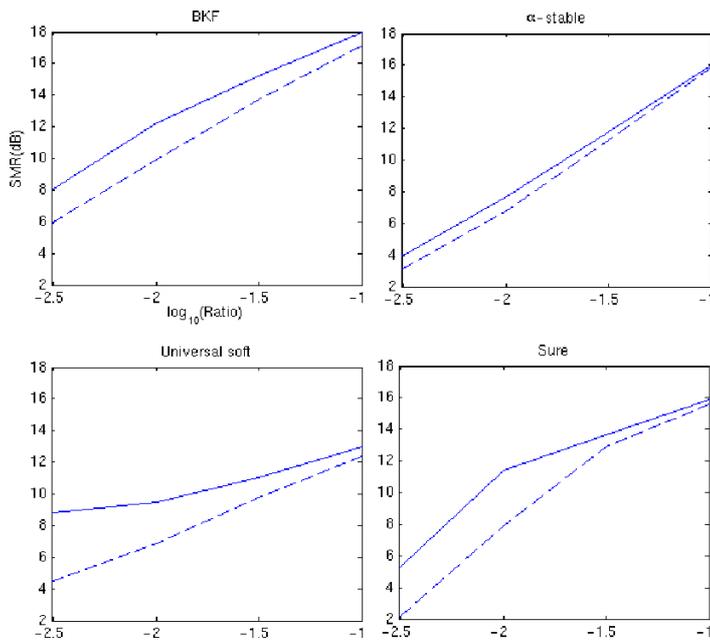


FIG. 3: Rapport signal-sur-risque (RSR) en dB moyenné sur 100 simulations en fonction du rapport d'échelle. Ces graphes comparent les transformations de Fisz (trait continu) et d'Anscombe (trait discontinu) pour chaque débruiteur.

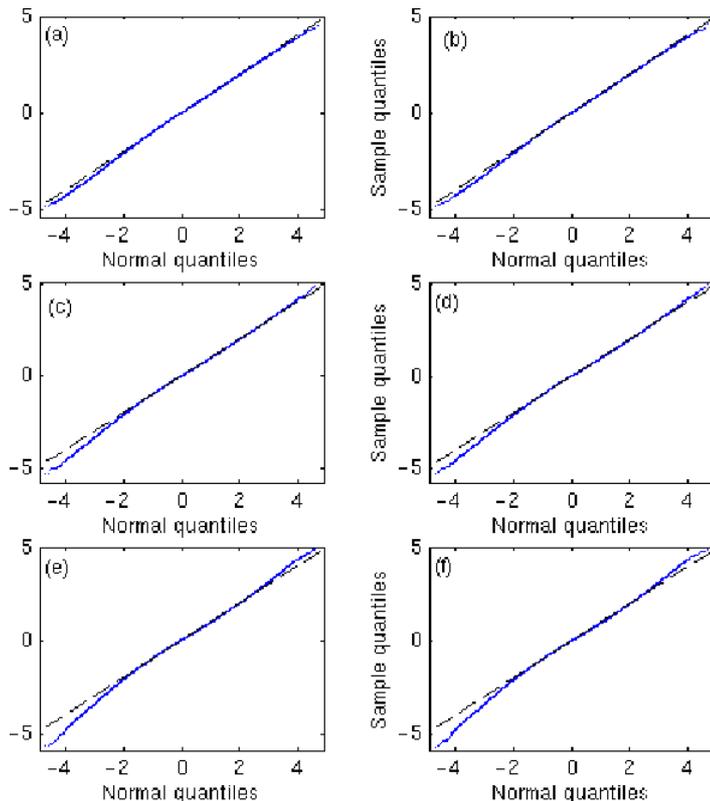


FIG. 4: Résidus vs quantiles (QQ-plot) Gaussiens avant inversion de la transformation (Fisz ou Anscombe). La première image montre le QQ-plot sur l'image bruitée. La colonne 1 (images a,c,e) correspondent aux résidus avec la transformation de Fisz et la colonne 2 (b,d,f) ceux avec la transformation d'Anscombe. (a)-(b) FKB. (c)-(d) α -stable. (e)-(f) seuillage universel dur (hard).

5 Conclusion

Nous avons introduit la transformation de Fisz comme nouvelle transformation "Normalisante" pour l'estimation d'images d'intensité Poissonnienne dans le domaine des ondelettes. Ses propriétés statistiques ainsi que ses performances pratiques ont été établies. Combiner cette transformation avec le débruiteur Bayésien FKB fournit un algorithme puissant d'estimation d'images avec un bruit de Poisson.

Références

- [1] A. Antoniadis, J. Bigot, and T. Sapatinas. *Wavelet estimators in nonparametric regression: A comparative simulation study*. Journal of Statistical Software, 6, pp. , 2001.
- [2] J.-L. Starck and F. Murtagh. *Astronomical image and signal processing looking at noise, information and scale*. IEEE Sig. Proc. Magazine, 18, pp. 30-40, 2001.
- [3] E. Kolaczyk. *Wavelet shrinkage estimation of certain poisson intensity signals using corrected thresholds*. Statistica Sinica, 9, pp. 119-135, 1999.
- [4] P. Fryzlewicz and G. P. Nason. *A wavelet-fisz algorithm for poisson intensity estimation*. Tech. Rep., Department of Mathematics, University of Bristol, 2002.
- [5] U. Grenander and A. Srivastava. *Probability models for clutter in natural images*. IEEE PAMI, 23, pp. 424-429, 2001.
- [6] M.J. Fadili and L. Boubchir. *Analytical form for a Bayesian wavelet estimator of images using the Bessel K forms densities*. IEEE Trans. Image Proc., submitted, 2003.
- [7] M. Fisz. *The limiting distribution function of two independent random variables and its statistical application*. Colloquium Mathematicum, 3, pp. 138-146, 1955.