

# Détection autodidacte pour des systèmes à accès multiple basée sur l'analyse PARAFAC

Alexandre DE BAYNAST<sup>1</sup>, Lieven DE LATHAUWER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ECE Department, Rice University  
6100 Main Street, 77005 Houston, Texas, Etats-Unis

<sup>2</sup>Laboratoire ETIS - ENSEA  
6 avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise, France  
debaynas@ece.rice.edu, delathau@ensea.fr

**Résumé** – Nous présentons un nouvel algorithme d'égalisation/identification autodidacte pour les canaux à accès multiple en présence de diversité spatiale à la réception. Cet algorithme se base sur la généralisation de l'analyse PARAFAC ([Sidiropoulos, IEEE Tr. on Sig. Proc. '00]) : nous montrons que la décomposition canonique (CANDECOMP) généralisée du tenseur du troisième ordre des observations est unique en l'absence de bruit, permettant de recouvrer les trois jeux de paramètres : les symboles, les coefficients des réponses impulsionnelles des canaux de transmission et les séquences d'étalement. Ni l'orthogonalité algébrique ni l'indépendance entre les sources n'est requise. En présence de bruit additif, nous proposons un algorithme simple, l'algorithme des moindres carrés alternés dont les performances sont proches de la borne de Cramér-Rao.

**Abstract** – In this paper, we present a new blind receiver for multiple access channels with multiple receive antennas. The proposed receiver fully exploits the spectral and the spatial diversities. This algorithm relies on a generalization of *parallel factor analysis* (PARAFAC analysis, [Sidiropoulos, IEEE Tr. on Sig. Proc. '00] for instance): we show that a generalized canonical decomposition (CANDECOMP) of the 3D data tensor is unique under mild assumptions without noise. By performing this decomposition in rank  $(L_h, L_h, 1)$  terms, we retrieve the three sets of parameters: the symbols, the channel fadings and the spreading sequences. Neither algebraic orthogonality nor independence between the sources is needed. In a noisy context, we propose a simple algorithm of the alternating least squares (ALS) type, which yields a performance close to the Zero-Forcing receiver (which requires knowledge of the channel).

## 1 Introduction

La plupart des méthodes d'égalisation autodidacte nécessitent l'estimation des statistiques des observations (en général, seules les statistiques du deuxième et du quatrième ordre sont utilisées). Afin d'obtenir une estimation consistante, il faut au moins 200 échantillons pour les cumulants du deuxième ordre et 500 pour le quatrième ordre. Lorsque le canal varie rapidement, ces méthodes ne sont plus applicables.

Dans ce papier, nous proposons un algorithme pour l'égalisation autodidacte de tels canaux en présence de diversités spectrale, spatiale et temporelle. Cet algorithme se fonde sur l'analyse PARAFAC (*parallel factor*, [6]), appelée aussi décomposition canonique des tenseurs d'ordres supérieurs (une matrice est un tenseur d'ordre deux). La première étape consiste à relier le problème d'estimation et l'analyse PARAFAC. Ceci a déjà été réalisé par Sidiropoulos dans le cas d'un mélange instantané ([6]). Cette approche s'appuie sur le théorème d'identifiabilité garantissant en l'absence de bruit l'unicité de la décomposition tensorielle [4]. Le but de ce papier est de généraliser cette approche au cas de canaux sélectifs en fréquence.

Tout d'abord, nous modélisons les observations comme étant une décomposition canonique — généralisée — par rapport aux paramètres à estimer. Ensuite, nous présentons le théorème d'identifiabilité pour la décomposition canonique du tenseur

des observations. Enfin, nous proposons un algorithme simple à mettre en œuvre dont les performances sont proches de la solution du maximum de vraisemblance.

## 2 Modélisation

La figure 1 montre le système à accès multiple considéré en présence de diversité spectrale induite à l'émission et spatiale en réception. Ce schéma inclut le système à accès multiple par répartition par codes (CDMA).

Chaque trame synchrone ou asynchrone transmise  $\mathbf{s}'_m$ ,  $1 \leq m \leq N_u$ ,  $N_u$  le nombre d'utilisateurs, résulte de l'étalement de la trame d'information utile de longueur  $N$ ,  $\mathbf{s}_m = [s_m[1] s_m[2] \dots s_m[N]]^T$ ,  $1 \leq m \leq N_u$ , par la séquence directe  $\mathbf{c}_m$  de longueur  $S_F$ ,  $S_F$  étant le factor d'étalement. Nous définissons la fonction de transfert globale entre le  $m^e$  utilisateur et le  $k^e$  capteur,  $k = 1, \dots, N_r$  incluant l'étalement, l'asynchronisme et les filtres de transmission par  $\mathbf{h}_m^{(k)}(z)$ . Sous l'hypothèse que les sources sont à bande étroite par rapport aux antennes de réception ce qui est vérifié dans le cas des standards GSM et UMTS [5], la réponse impulsionnelle du canal de transmission  $\mathbf{h}_m^{(k)}(z)$  s'écrit alors :  $\mathbf{h}_m^{(k)}(z) = \alpha_m^{(k)} \mathbf{h}_m(z)$ , où  $\alpha_m^{(k)}$  est le gain d'antenne complexe  $\alpha_m^{(k)}$  du  $k^e$  capteur pour le  $m^e$  utilisateur. Nous supposons dans la suite que les réponses impulsionnelles des canaux de transmission  $\mathbf{h}_m(z)$  sont de même degré  $L_h$ .

\* A. de Baynast est financé par une bourse DGA/EGIDE.

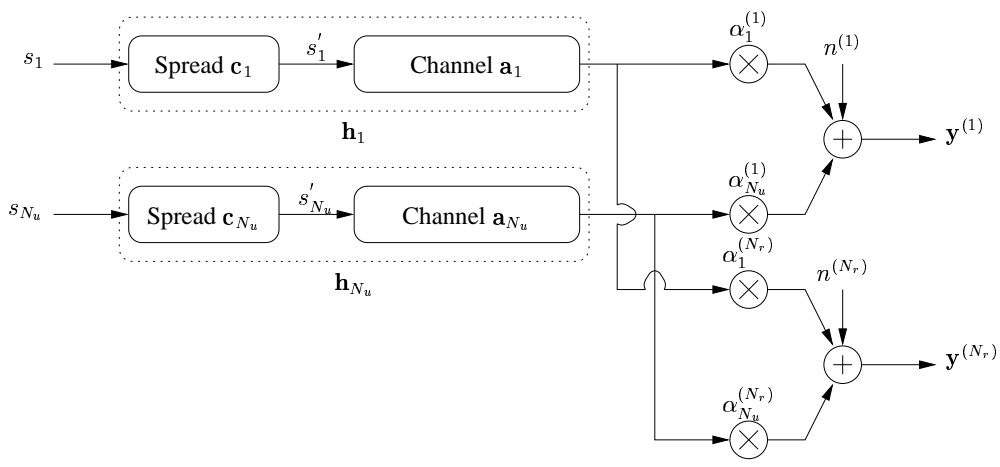


FIG. 1 – Modèle de transmission CDMA pour la liaison montante. La diversité spectrale est induite à l'émission (étalement par séquences directes) et la diversité spatiale est obtenue au niveau du récepteur par un réseau de capteurs.

L'échantillon d'observation reçu sur le  $k^e$  capteur à l'instant  $n + lS_F$  suit le modèle :  
 $y^{(k,n)}[l] = \sum_{m=1}^{N_u} \alpha_m^{(k)} h_m^{(n)} * s_m[l] + n^{(k,n)}[l]$ . Comme l'indique la figure 2, en stockant les échantillons suivant les trois dimensions correspondant aux trois types de diversité, nous obtenons un tenseur du troisième ordre  $\mathcal{Y}$  de dimension  $S_F \times N_r \times N$ . En prenant chaque « tranche » du tenseur  $\mathcal{Y}$  suivant la troisième dimension, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$Y_k = \sum_{m=1}^{N_u} \alpha_m^{(k)} H_m \mathcal{T}(s_m) + N_k$$

$$= \mathbf{H} \left( \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \otimes I_{LN_u} \right) \mathcal{S}(\mathbf{s}) + N_k, 1 \leq k \leq N_r. \quad (1)$$

Les matrices  $Y_k$ ,  $1 \leq k \leq N_r$ , sont de dimension  $S_F \times N$ . Les matrices  $\mathcal{T}(s_m)$ ,  $1 \leq m \leq N_u$ , sont de dimension  $L_h \times N$  et possèdent une structure de « Toeplitz », définie par leur première ligne égale à  $\mathbf{s}_m^T$  et par leur première colonne égale à  $[s_m[1] \ 0 \dots \ 0]^T$ . La matrice  $\mathcal{S}(\mathbf{s})$ , de dimension  $L_h N_u \times N$ , résulte de la concaténation des matrices  $\mathcal{T}(s_m)$ ,  $1 \leq m \leq N_u$ . Elle possède une structure de Sylvester générée par la matrice  $\mathcal{S}$  contenant tous les symboles transmis :  $\mathcal{S} = [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \dots \ \mathbf{s}_{N_u}]$ .  $H_m = [\mathbf{h}[1] \ \mathbf{h}[2] \ \dots \ \mathbf{h}[L_h]]$ ,  $1 \leq m \leq N_u$ , avec  $\mathbf{h}_m[l] = [h_m^{(1)}[l] \ \dots \ h_m^{(S_F)}[l]]^T$ ,  $1 \leq l \leq L_h$  est de dimension  $S_F \times L_h$ . La matrice  $\mathbf{H}$  de dimension  $S_F \times L_h N_u$  résulte de la concaténation de toutes les matrices  $H_m$ ,  $m = 1, \dots, N_u$ . Enfin, le vecteur  $\boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ ,  $1 \leq k \leq N_r$  contient les gains complexes du  $k^e$  capteur associé à chaque utilisateur, i.e.  $\boldsymbol{\alpha}^{(k)} = [\alpha_1^{(k)} \ \dots \ \alpha_{N_u}^{(k)}]^T$ ,  $0 \leq k \leq N_r$ . La matrice  $A$  de dimension  $N_u \times N_r$  est égale à :  $A = [\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \ \dots \ \boldsymbol{\alpha}^{(N_r)}]$ .  $I_{LN_u}$  est la matrice identité de dimension  $LN_u \times LN_u$  et  $\otimes$  est le produit de Kronecker.

### 3 Identifiabilité

En l'absence de bruit, nous nous intéressons à la décomposition du tenseur du troisième ordre des observations en la somme de termes résultant d'un produit extérieur entre un vecteur et une matrice, elle-même formée à partir du produit de deux matrices, comme le montre la figure 2. Les

deux définitions suivantes nous permettent de caractériser l'indépendance entre les vecteurs-colonne d'une matrice  $M$  pour la première et l'indépendance entre les ensembles de vecteurs-colonne formant les sous-matrices  $M_1, \dots, M_L$  d'une matrice-bloc  $\mathbf{M}$  pour la seconde.

**Définition 1 (k-rang d'une matrice  $M$ , [4] p. 115)** Soit une matrice  $M \in \mathbb{C}^{J \times K}$ , le nombre  $k_M$  est le nombre maximale de colonnes de la matrice  $M$  tel que chaque ensemble constitué de  $k_M$  colonnes de la matrice  $M$  constitue un ensemble linéairement indépendant. Par définition, nous avons :  $k_M \leq \text{Rank}(M)$ .

**Définition 2 (k'-rank d'une matrice-bloc  $\mathbf{M}$ )** Soit une matrice-bloc  $\mathbf{M} = (M_1 \ M_2 \ \dots \ M_L)$ ,  $M_l \in \mathbb{C}^{J \times K}$ ,  $1 \leq l \leq L$ , le nombre  $k'_M$  est égal au nombre maximal de sous-matrices telles qu'une quelconque matrice  $(M_{l_1}, \dots, M_{l_{k'}})$  formée de  $k'_M$  sous-matrices soit de rang colonne plein.

Sous l'hypothèse que le système équations 1,  $k = 1, \dots, N_r$  est vérifié, nous énonçons le théorème fondamental d'identifiabilité pour un mélange convolutif.

**Théorème 1** Soit l'ensemble des matrices  $\{Y_k\}_{k=1, \dots, N_r}$  définies par le système d'équations 1,  $k = 1, \dots, N_r$  en absence de bruit. Nous supposons que les matrices  $A$  et  $\mathcal{S}$  sont de k-rang plein, la matrice  $\mathbf{H}$  est de k' - rang plein et que la matrice de Sylvester  $\mathcal{S}$  associée à la matrice  $\mathcal{S}$  est aussi de k-rang plein (ce qui est toujours vérifié en pratique).

$$\text{Si } k_A + k'_H + k_{S^T} \geq 2(N_u + 1) \quad (2)$$

alors les matrices  $A \in \mathbb{C}^{N_r \times N_u}$  et  $S \in \mathbb{C}^{N_u \times N}$  sont uniques à une matrice de permutation et une matrice diagonale près, et la matrice  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{S_F L_h \times N_u}$  est unique à une matrice de permutation diagonale bloc et à une matrice diagonale près. Plus précisément, cela signifie que tout ensemble de matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{\mathbf{H}}$  et  $\bar{S}$  vérifiant le système d'équations 1 est relié à l'ensemble des matrices  $A$ ,  $\mathbf{H}$  et  $S$  via :

$$\bar{A} = A\Pi\Delta_1, \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(\Pi\Delta_2 \otimes I), \bar{S} = S\Pi\Delta_3 \quad (3)$$

où  $\Pi$  est une matrice de permutation et  $\{\Delta_i\}_{i=1,2,3}$  sont des matrices diagonales telles que  $\Delta_1\Delta_2\Delta_3 = I$ .

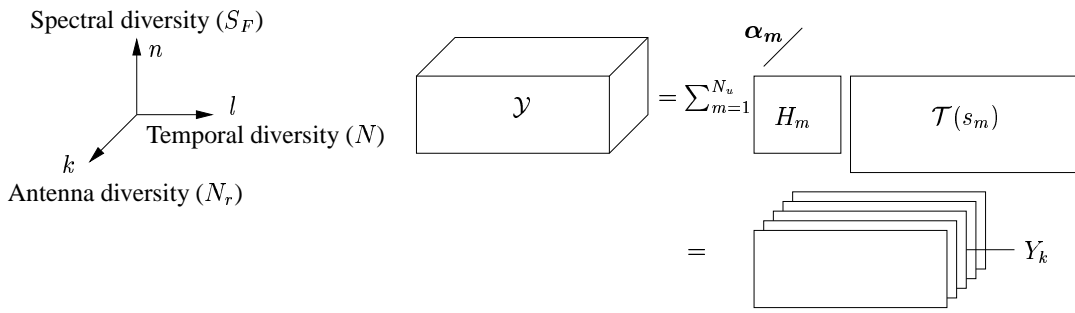


FIG. 2 – Tenseur des observations du troisième ordre dont les trois dimensions correspondent aux diversités spectrale, spatiale et temporelle.

La démonstration repose sur le théorème suivant dont la démonstration est donnée dans [2].

**Théorème 2 (Théorème d’identifiabilité généralisé)** Soit un tenseur du troisième ordre  $\mathcal{X}$  de dimension  $L_a \times L_b \times L_c$  dont l’ensemble des matrices correspondant aux « tranches »  $\{Y_i\}_{i=1, \dots, L_a}$  suivant la direction (a) s’écrit de la façon suivante :

$$Y_i = \sum_{l=1}^L a_l^{(i)} B_l C_l^T, \forall i, 1 \leq i \leq L_a \quad (4)$$

où  $a_l^{(i)}$ ,  $\forall l, 1 \leq l \leq L$ ,  $\forall i, 1 \leq i \leq L_a$  sont des coefficients scalaires à valeur complexe. Les matrices  $B_l$  et  $C_l$ ,  $\forall l, 1 \leq l \leq L$  sont à valeurs complexes et de dimensions respectives  $L_b \times J$  et  $L_c \times K$ . On définit la matrice  $A$  de dimension  $L_a \times L$  et les matrices blocs  $\mathbf{B}$  de dimension  $L_b \times JL$  et  $\mathbf{C}$  de dimension

$$L_c \times KL \text{ de la façon suivante : } A = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_L^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(L_a)} & \dots & a_L^{(L_a)} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{B} = (B_1 B_2 \dots B_L)$ ,  $\mathbf{C} = (C_1 C_2 \dots C_L)$ . Nous supposons que les matrices  $A$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont de rang plein (ce qui est toujours vérifié en pratique).

$$\text{Si } k_A + k_B + k_{C^T} \geq 2(L+1) \quad (5)$$

alors tout ensemble de matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  et  $\bar{C}$  vérifiant les équations 4,  $\forall i, 1 \leq i \leq L_a$  est relié à l’ensemble des matrices  $A$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  via :  $\bar{A} = A\Pi\Delta$ ,  $\bar{B} = \mathbf{B}(\Pi \otimes I)\tilde{T}_{\text{bloc}}$ ,  $\bar{C} = \mathbf{C}(\Pi \otimes I)\tilde{T}_{\text{bloc}}$ , où la matrice  $\Pi$  est une matrice de permutation, la matrice  $\Delta$  une matrice diagonale et les matrices  $T_{\text{bloc}}$  et  $\tilde{T}_{\text{bloc}}$  des matrices diagonales blocs non singulières. Le  $l^{\text{e}}$  coefficient  $\delta_l$ ,  $1 \leq l \leq L$  de la matrice diagonale  $\Delta$  et les  $l^{\text{e}}$  blocs  $T_l$  et  $\tilde{T}_l$  des matrices  $T_{\text{bloc}}$  et  $\tilde{T}_{\text{bloc}}$  vérifient la relation suivante :  $\delta_l T_l \tilde{T}_l = I$ ,  $1 \leq l \leq L$ . Les matrices  $T_l$ ,  $1 \leq l \leq L$  sont donc les matrices inverses des matrices  $\tilde{T}_l$ ,  $1 \leq l \leq L$  à un coefficient scalaire près.

Ce théorème ne garantit toutefois pas l’unicité des trois matrices. Toutefois si les matrices  $C_l$ ,  $\forall l, 1 \leq l \leq L$  possèdent une structure de Toeplitz, i.e. que  $C_l = \mathcal{T}(c_l)$  avec comme première ligne  $c_l^T = [c_l[1] \ c_l[1] \ \dots \ c_l[L_c]]$  et première colonne  $[c_l[1] \ 0 \ \dots \ 0]^T$ , l’ambiguïté due à la présence des matrices non singulières  $T_l$  est alors levée. En effet, le système d’équations devient :  $\tilde{T}_l C_l = \mathcal{T}(c_l)$  ce qui fixe de manière unique la matrice  $\tilde{T}_l$ . Soit la matrice  $C'$  de dimension  $L \times L_c$  définie par :  $C' = [c'_1 \ \dots \ c'_L]$ .

Les matrices  $A$  et  $C'$  sont définies à une matrice de permutation et une matrice diagonale près et la matrice  $\mathbf{B}$  est définie à une matrice de permutation bloc et à une matrice diagonale près. De plus, on peut montrer que  $k_{C^T} = k_{C'^T}$  ([2]). La relation 5 devient :  $k_A + k_B + k_{C'^T} \geq 2(L+1)$ .

## 4 Algorithme des moindres carrés alternés (ALS)

Dans la section précédente, nous avons montré qu’en l’absence de bruit, les paramètres à estimer correspondent précisément aux facteurs de la décomposition canonique du tenseur des observations qui est unique. En présence d’un bruit blanc additif et gaussien, l’algorithme de détection/identification conjointe au sens du maximum de vraisemblance revient à minimiser la fonction de coût :

$$J_{\text{PARAFAC}}(A, H, S) = \sum_{k,n,l} \left\| \sum_{m=1}^{N_u} \alpha_m^{(k)} h_m^{(n)} * s_m[l] \right\|_2^2 \quad (6)$$

La complexité d’un tel algorithme étant rédhibitoire, nous proposons d’utiliser l’algorithme des moindres carrés alternés ([3, 1]) qui consiste à estimer itérativement chaque jeu de paramètres (symboles, réponse impulsionnelle des canaux de transmission, gains d’antennes) conditionnellement aux deux autres : nous nous ramenons alors à un problème conditionnel linéaire.

L’algorithme prend la forme suivante.

**initialisation** : Initialisation des deux des trois matrices aléatoirement, par exemple  $A = A^{(0)}$  et  $H^{(0)}$  (une meilleure initialisation peut être obtenue si les séquences d’étalement sont connues),

**$i^{\text{e}}$  étape** :

$$A^{(i-1)}, \mathbf{H}^{(i-1)} \rightarrow S^{(i)}$$

$$A^{(i-1)}, S^{(i)} \rightarrow \mathbf{H}^{(i)}$$

$$\mathbf{H}^{(i)}, S^{(i)} \rightarrow A^{(i)}$$

**Fin** : lorsque  $\left\| \hat{S}^{(i+1)} - \hat{S}^{(i)} \right\|_2 \leq \epsilon$ , nous déclarons que l’algorithme a convergé.

## 5 Simulations

Nous comparons les performances de l’algorithme ALS avec la borne de Cramér-Rao et les performances de l’algorithme

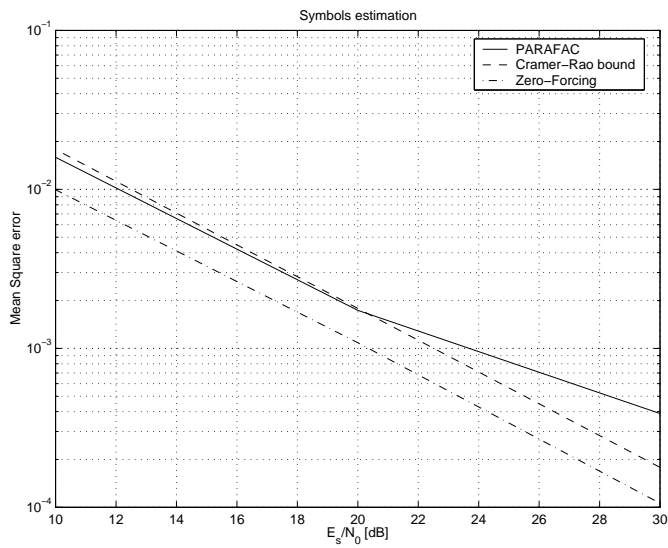


FIG. 3 – Taux d’erreur binaire vs.  $E_s/N_0$  [dB] - Comparai- son des performances de l’algorithme ALS avec la borne de Cramér-Rao -  $N_u = 2$ ,  $N_r = 2$ ,  $S_F = 2$ ,  $L = 2$ ,  $N = 20$ .

des moindres carrés à canal connu. La charge est fixée à l’unité avec 2 utilisateurs ( $S_F = 2$ ) en présence de deux capteurs au niveau de la réception. Le nombre de trajets multiples est égal à 2. Nous remarquons que les performances de l’algorithme sont proches de la borne de Cramér-Rao jusqu’à un rapport signal utile à bruit d’une dizaine de décibels.

## 6 Conclusion

Dans ce papier, nous avons généralisé l’approche proposée dans [6] au cas d’un mélange convolutif. Celle-ci repose sur le lemme d’identifiabilité généralisé dont la démonstration est développée dans l’article [2] : en absence de bruit, nous avons montré que la décomposition canonique généralisée du tenseur des observations en termes de rang  $(L_h, L_h, 1)$  est unique sous des conditions faibles.

Dans le cas d’observations bruitées, nous avons proposé un algorithme d’égalisation/identification, l’algorithme des moindres carrés alternés qui ne requiert ni la connaissance des canaux des transmissions ni les séquences d’étalement. De plus, ni l’orthogonalité algébrique ni l’indépendance entre les sources n’est nécessaire. dont les performances sont proches de l’algorithme des moindres carrés à canal connu même pour des longueurs de trame très courtes (10 – 20 symboles). Par simulation, nous avons montré que les performances de l’algorithme proposé sont proches de l’algorithme des moindres carrés à canal connu même pour des longueurs de trame très courtes (10 – 20 symboles) tant que le rapport signal utile à bruit est suffisamment élevé ( $E_s/N_0 \geq 10$  [dB]). Il est possible d’étendre la méthode à d’autres schémas de transmission : antennes multiples au niveau de l’émission, transmissions asyn- chronnes, *etc.*

## Références

[1] J.D. Carroll and J.J. Chang. Analysis of individual dif- ferences in multidimensional scaling *via n*-way genera-

lization of Eckart-Young decomposition. *Psychometrika*, 35(3) :283–319, September 1970.

- [2] L. De Lathauwer and A. de Baynast. A PARAFAC Generalization and Applications in DS-CDMA. to be submitted, 2002.
- [3] R.A. Harshman. Foundations of the PARAFAC procedure : model and conditions for an explanatory multi-mode factor analysis. *UCLA Working Papers Phonetics*, 16 :1–84, Dec. 1970.
- [4] J.B. Kruskal. Three-way arrays : Rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics. *Linear Algebra Applications*, 18 :95–138, 1977.
- [5] S. Marcos. *Les méthodes à haute rsolution (traitement d’antenne et analyse spectrale)*. Hermès edition, 1998.
- [6] N.D. Sidiropoulos, G.B. Giannakis, and R. Bro. Blind PA- RAFAC Receivers for DS-CDMA Systems. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 48(3) :810–823, March 2000.