

Egaliseur par Réseaux de Filtres de Kalman à retour de décisions pour les canaux linéaires longs.

Rim AMARA BOUJEMÂA¹, Sylvie MARCOS²

¹Unité Signaux et Systèmes, B.P. 37, Belvédère, 1002, Tunis, Tunisie

²Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-Supélec, plateau de Moulon, 91192, Gif/Yvette, France

amararim@yahoo.fr, marcos@lss.supelec.fr

Résumé – Dans ce papier, nous proposons un égaliseur par Réseau de Filtres de Kalman à Retours de Décisions (RFK/RD) pour les canaux linéaires à longue mémoire. L'égaliseur par RFK fut proposé pour l'égalisation de canaux de transmission dans [5]. L'algorithme du RFK/RD est obtenu en partitionnant l'état des symboles à estimer en un état primaire correspondant aux coefficients dominants du canal et en un état secondaire, mis à jour comme un RD, correspondant à la queue du canal ; et en découplant la procédure d'estimation de ces sous-états au niveau de l'algorithme initial du RFK. La procédure de mise à jour du vecteur RD étant très similaire à celle du MAPSD/DF décrite dans [2]. Le fait intéressant est que les deux égaliseurs font intervenir la variance d'erreur d'estimation du RD, fait négligé par la plupart des égaliseurs Bayésiens. Les simulations montrent les bonnes performances du nouvel égaliseur par RFK/RD de complexité réduite par rapport au MAPSD/DF et au DFE Wiener optimal.

Abstract – In this paper, a Network of Kalman Filters with Decision Feedback (NKF/DF) is proposed for long memory linear channel equalization. The NKF was previously proposed for channel equalization in [5]. The NKF/DF algorithm is obtained by partitioning the symbol state to estimate into a primary sub-state corresponding to the dominant channel coefficients, and into a secondary sub-state updated as a DF vector, corresponding to the tail of the channel ; and by decoupling the estimation procedure of these sub-states in the initial NKF algorithm. The updating procedure of the DF vector turns to be very similar to the one proposed in the MAPSD/DF described in [2]. The interesting point is that both of these equalizers take into account the DF estimation error variance, a fact neglected by many Bayesian detection algorithms. Simulations show the good performance of the new equalizer with reduced complexity compared to the MAPSD/DF and the Wiener optimal DFE.

1 Introduction

Le problème d'égalisation de canaux linéaires longs est abordé dans ce papier sous un angle d'estimation Bayésienne des symboles transmis $d(k)$ sachant l'horizon infini et causal d'observations $y^k = \{y(0), \dots, y(k)\}$ où

$$y(k) = \mathbf{C}^T \mathbf{D}(k) + b(k)$$

est l'observation bruitée recueillie à la sortie du canal, \mathbf{C} est un vecteur de longueur M formé des coefficients du canal, $\mathbf{D}(k) = [d(k), \dots, d(k - M + 1)]^T$ désigne le vecteur d'état de symboles à estimer et $b(k)$ est un BBAG $\mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$. Les symboles transmis sont issus d'un alphabet de modulation de cardinal fini $\gamma = \{d_i, 1 \leq i \leq q\}$. En vue d'obtenir des performances optimales en terme de TEB, un bon nombre de détecteurs Bayésiens considérant le problème d'égalisation comme un problème de classification des symboles [4] ou encore comme un problème de détection optimale telle que le MLSE ou encore l'Egaliseur MAP Symbole par symbole optimal (EMAPS) [3][1] ont été proposés. La limitation majeure au niveau de l'efficacité des égaliseurs Bayésiens est certainement leur complexité importante. Par exemple, les traitements du MLSE et de l'EMAPS portent sur des calculs de q^M métriques à chaque instant (des vraisemblances pour le MLSE et des densités de probabilités (ddp) *a posteriori* pour l'EMAPS), lorsque l'état des symboles prend q^M valeurs finies. C'est aussi le cas pour les égaliseurs Bayésiens transverses qui calculent q^{m+M-1} métriques pour réaliser la détection, où m est la longueur de vecteur d'observations utilisé. Il est clair donc que pour des canaux longs

(M grand), cette complexité devient prohibitive. Plusieurs travaux ont suggéré alors de réduire la complexité en déroulant les algorithmes de détection en question sur une partie de l'état des symboles (un sous-état de longueur $L \ll M$) correspondant aux coefficients du canal les plus importants,¹ tout en éliminant des observations la contribution des symboles restant, dont on possède une estimation ; d'où l'appellation structure d'égaliseur à Retour de Décision (RD) [6]. Ici, l'égaliseur par Réseau de Filtres de Kalman (RFK) fournissant l'estimée EQMM récursive des symboles, $\hat{\mathbf{D}}(k) = E\{\mathbf{D}(k)|y^k\}$, est envisagé pour les canaux linéaires à longue mémoire. Afin de diminuer la complexité de l'algorithme correspondant, nous avons procédé en partitionnant l'état des symboles à estimer $\mathbf{D}(k)$ en un sous-état primaire correspondant aux coefficients dominants du canal et en un sous-état secondaire correspondant à la queue du canal ; et en découplant les procédures d'estimation de ces deux sous-états au niveau de l'algorithme initial du RFK-EQMM estimant l'état global $\mathbf{D}(k)$. Il s'avère alors que l'algorithme qui en découle n'est que celui du RFK-EQMM appliqué pour estimer le sous-état primaire en éliminant la contribution du sous-état secondaire, mis à jour comme un vecteur RD, des observations et en tenant compte de la variance de l'erreur d'estimation du RD dans le calcul de celle sur la sortie prédite par chaque filtre de Kalman. Les procédures de mise

1.

$\forall i \in \{0, \dots, L-1\}, \forall j \in \{L, \dots, M-1\}, |c_i| \geq |c_j|.$ (1)

à jour du RD et de sa matrice de covariance sont similaires à celles de l'égaliseur *MAP symbol by Symbol Detector with Decision Feedback (MAPSD/DF)* proposé par Baccarelli *et. al* qui sera référé dans la suite par l'EMAPS/RD. Ces deux égaliseurs sont particulièrement immunisés contre une grave propagation d'erreurs puisqu'ils prennent en compte la consistance du vecteur RD, fait négligé par la plupart des égaliseurs à RD. Dans la section 2, une brève revue du principe de l'égaliseur par RFK est faite. La section 3 montre la procédure de découplage de l'état primaire et l'état secondaire qui aura pour aboutissement l'algorithme de l'égaliseur par RFK à RD. La section 4 compare les simulations comparant les versions souples et dures du RFK/RD à l'EMAPS/RD pour différents ordres de troncature. Enfin, la section 5 donne notre conclusion.

2 Revue de l'égaliseur par RFK

La structure de l'égaliseur par RFK découle d'une procédure d'estimation EQMM d'une séquence finie de symboles $\mathbf{D}(k)$ en se basant sur une formulation d'état d'un système de communications numériques en bande de base comme suit

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{D}(k) + \mathbf{G}d(k+1) \quad (2)$$

$$y(k) = \mathbf{C}^T\mathbf{D}(k) + b(k) \quad (3)$$

où \mathbf{F} est la matrice de transition à un pas et $\mathbf{G} = [1, 0, \dots, 0]^T$. Cette formulation comme on peut le constater est bien linéaire mais à bruit d'état non gaussien, puisque ce bruit est lié aux symboles transmis, issus effectivement d'un processus aléatoire à valeurs discrètes. Ainsi, la ddp *a posteriori* de l'état des symboles, $p(\mathbf{D}(k)|y^k)$, n'est pas gaussienne et l'utilisation d'un filtre de Kalman comme un égaliseur peut causer des dégradations de performances en terme de TEB. En utilisant alors l'approche de Sorenson et Alspach basée sur l'approximation de ddp par une Somme Pondérée de Gaussiennes (SPG), d'abord pour le bruit d'état comme suit

$$p(\mathbf{G}d(k+1)) = \sum_{i=1}^q p_i N(\mathbf{G}d(k+1) - \mathbf{G}d_i, Q_i)$$

avec p_i la probabilité *a priori* d'occurrence du symbole d_i et où les Q_i sont des matrices diagonales très petites pour que les gaussiennes soient bien localisés autour des valeurs prises par le bruit, puis pour la ddp *a posteriori* de l'état

$$p(\mathbf{D}(k)|y^k) = \sum_i \alpha_i(k) N(\mathbf{D}(k) - \hat{\mathbf{D}}_i(k|k), \hat{P}_i(k|k)) \quad (4)$$

où $\hat{\mathbf{D}}_i(k|k)$, $\hat{P}_i(k|k)$ et $\alpha_i(k)$ sont respectivement les états estimés, les matrices de covariance et les innovations correspondantes mis à jour par le $i^{\text{ème}}$ filtre de Kalman conditionné par une moyenne possible du bruit d'état $\mathbf{G}d_i$, un égaliseur par RFK a pu être établi dans [5][1]. L'estimée de l'état des symboles est alors donnée par

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}(k) &= \sum_i \alpha_i(k) \hat{\mathbf{D}}_i(k|k) \\ &= \sum_i \alpha_i(k) \{ \hat{\mathbf{D}}_i(k|k-1) + \mathbf{K}_i(k)(y(k) - \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{D}}_i(k|k-1)) \} \end{aligned} \quad (5)$$

et la covariance d'erreur d'estimation de l'état par

$$\hat{P}(k) = \sum_{i=1}^q \alpha_i(k) \{ \hat{P}_i(k|k) + [\hat{\mathbf{D}}(k) - \hat{\mathbf{D}}_i(k|k)][\hat{\mathbf{D}}(k) - \hat{\mathbf{D}}_i(k|k)]^T \}$$

3 Egaliseur par RFK à RD (Souples ou Dures)

3.1 Récursion directe sur l'état primaire

L'idée est de partitionner le vecteur d'état comme suit

$$\mathbf{D}(k) = [\mathbf{D}_1^T(k) \quad \mathbf{D}_2^T(k)]^T,$$

où $\mathbf{D}_1(k) = [d(k), \dots, d(k-L+1)]^T$ désigne l'état des symboles primaire de longueur L , $0 \leq L \leq M$ et $\mathbf{D}_2(k) = [d(k-L), \dots, d(k-M+1)]^T$ est l'état des symboles secondaire de longueur $N_r = M-L$, ainsi que les coefficients du canal $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1^T \quad \mathbf{C}_2^T]^T$; et d'essayer de dériver une estimation EQMM d'une des composantes du vecteur \mathbf{D}_1 sachant la valeur de \mathbf{D}_2 . En partitionnant de même \mathbf{F} , \mathbf{G} , les gains de Kalman $\mathbf{K}_i(k)$, les covariances Q_i et $\hat{P}(k)$ comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}, Q_i = \begin{bmatrix} Q_{i,1} & 0_{L \times N_r} \\ 0_{N_r \times L} & Q_{i,2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_i(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{i,1}(k) \\ \mathbf{K}_{i,2}(k) \end{bmatrix}, \hat{P}(k) = \begin{bmatrix} \hat{P}_1(k) & \hat{P}_{1,2}(k) \\ \hat{P}_{2,1}(k) & \hat{P}_2(k) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où

- F_1 : matrice de transition à un pas de dimension $L \times L$
- F_4 : matrice de transition à un pas de dimension $N_r \times N_r$
- $F_2 = 0_{L \times N_r}$
- $F_3 = 0_{N_r \times L}$ sauf $F_3[1, L] = 1$
- $\mathbf{G}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ de longueur L et $\mathbf{G}_2 = 0_{N_r \times 1}$.

L'équation de récursion du RFK-EQMM sur l'état global $\hat{\mathbf{D}}(k) = [\hat{\mathbf{D}}_1^T(k) \quad \hat{\mathbf{D}}_2^T(k)]^T$ étant donnée par (5), en partitionnant de même $\hat{\mathbf{D}}_i(k|k-1) = [\hat{\mathbf{D}}_{i,1}^T(k|k-1) \quad \hat{\mathbf{D}}_{i,2}^T(k|k-1)]^T$, nous déduisons la récursion sur $\hat{\mathbf{D}}_1(k)$ comme suit

$$\hat{\mathbf{D}}_1(k) = \sum_{i=1}^q \alpha_i(k) \{ \hat{\mathbf{D}}_{i,1}(k|k-1) + \mathbf{K}_{i,1}(k) \hat{e}_{i,1}(k|k-1) \} \quad (6)$$

où

$$\hat{e}_{i,1}(k|k-1) = y(k) - \mathbf{C}_1^T \hat{\mathbf{D}}_{i,1}(k|k-1) - \mathbf{C}_2^T \tilde{\mathbf{D}}_2(k) \quad (7)$$

avec

$$\hat{\mathbf{D}}_{i,1}(k|k-1) = F_1 \hat{\mathbf{D}}_1(k-1) + \mathbf{G}_1 d_i,$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_2(k) = \hat{\mathbf{D}}_{i,2}(k|k-1) \quad (8)$$

$$= F_4 \hat{\mathbf{D}}_2(k-1) + F_3 \hat{\mathbf{D}}_1(k-1) \quad (9)$$

$$= F_4 \hat{\mathbf{D}}_2(k-1) + \mathbf{G}_4 \hat{d}(k-L|k-1), \quad (10)$$

$\mathbf{G}_4 = [1, 0, \dots, 0]^T$ de dimension N_r et

$$\alpha_i(k) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\hat{\sigma}_{i,1}^2(k|k-1)} (y(k) - \mathbf{C}_1^T \hat{\mathbf{D}}_{i,1}(k|k-1))^2 \right\}$$

Ensuite, la matrice de covariance d'erreur de prédiction du filtre de Kalman $n^o i$ est décomposée comme suit

$$\hat{P}_i(k|k-1) = \begin{bmatrix} \hat{P}_{i,1}(k|k-1) & \hat{P}_{i,12}(k|k-1) \\ \hat{P}_{i,21}(k|k-1) & \hat{P}_{i,2}(k|k-1) \end{bmatrix}$$

en négligeant l'intercovariance entre les erreurs de prédiction des états \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 , on obtient

$$\hat{\sigma}_{i,1}^2(k|k-1) \simeq \mathbf{C}_1^T \hat{P}_{i,1}(k|k-1) \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2^T \tilde{P}_2(k) \mathbf{C}_2 + \sigma_b^2 \quad (11)$$

où

$$\begin{aligned}\hat{P}_{i,1}(k|k-1) &= F_1 \hat{P}_1(k-1) F_1^T + Q_{i,1} \\ \tilde{P}_2(k) &= \hat{P}_{i,2}(k|k-1) \\ &\simeq F_4 \hat{P}_2(k-1) F_4^T + \mathbf{G}_4 \mathbf{G}_4^T \text{cov}[(d(k-L) - \hat{d}(k-L|k-1))^2] + Q_{i,2} \\ &\quad \text{cov}[(d(k-L) - \hat{d}(k-L|k-1))^2] = E\{(d(k-L) - \hat{d}(k-L|k-1))^2 | y^{k-1}\} \text{ étant la covariance d'erreur de prédiction de la } L^{\text{ième}} \text{ composante de } \mathbf{D}(k-1). \text{ En effet, ce terme est donné par } \hat{P}_1(k-1)[L, L]. \text{ De même, le gain de Kalman correspondant à l'état primaire sera approché par}\end{aligned}\tag{12}$$

$$\mathbf{K}_{i,1}(k) \simeq \frac{1}{\hat{\sigma}_{i,1}^2(k|k-1)} \hat{P}_{i,1}(k|k-1) \tag{13}$$

et les matrices de covariances d'erreur d'estimation pour chaque filtre du réseau

$$\hat{P}_{i,1}(k|k) \simeq (I_L - \mathbf{K}_{i,1}(k) \mathbf{C}_1^T) \hat{P}_{i,1}(k|k-1) \tag{14}$$

ainsi, les équations de remise à jour de $\hat{\mathbf{D}}_1(k)$ sont celles d'un RFK-EQMM pour estimer \mathbf{D}_1 en éliminant l'effet du RD des observations (7) et en tenant compte de la contribution de l'état secondaire dans la variance (11). Reste donc à spécifier par quel moyen $\tilde{\mathbf{D}}_2(k)$ et $\tilde{P}_2(k)$ sont mis à jour à moindre coût, ce qui est décrit dans le paragraphe suivant.

3.2 Algorithme du RFK-EQMM/RD

L'idée est d'utiliser les derniers symboles estimés par le RFK-EQMM, $\hat{d}(k-L|k-1) = \hat{\mathbf{D}}_1(k-1)[L]$ pour déterminer la valeur du RD, $\tilde{\mathbf{D}}_2(k)$, selon l'équation de décalage (10). L'algorithme de récursion sur $\hat{\mathbf{D}}_1$ utilisant le retour de décision $\tilde{\mathbf{D}}_2$ est résumé par

- à l'instant $k-1$, nous disposons de $\hat{\mathbf{D}}_1(k-1)$, $\hat{P}_1(k-1)$, $\tilde{\mathbf{D}}_2(k-1)$, $\tilde{P}_2(k-1)$
- mise à jour à l'instant k du vecteur retour en le prédisant comme suit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{D}}_2(k) &= F_4 \tilde{\mathbf{D}}_2(k-1) + \mathbf{G}_4 \hat{\mathbf{D}}_1(k-1)[L] \\ \tilde{P}_2(k) &= F_4 \tilde{P}_2(k-1) F_4^T + \mathbf{G}_4 \mathbf{G}_4^T \hat{P}_1(k-1)[L, L] + Q_{i,2} \end{aligned} \tag{15}$$

$\hat{\mathbf{D}}_2(k-1)$ et $\hat{P}_2(k-1)$ sont remplacées par $\tilde{\mathbf{D}}_2(k-1)$ et $\tilde{P}_2(k-1)$, respectivement, puisque la prédiction et l'estimée filtrée du RD seront confondues.

- équations de l'algorithme du RFK-EQMM appliqué pour estimer \mathbf{D}_1 avec les modifications faites dans (7) et dans (11). La décision est émise avec un retard $D = L - 1$.

L'équation (11) donnant la variance de l'erreur de sortie du canal prédite tient compte clairement de la covariance d'erreur d'estimation de \mathbf{D}_2 . Cet algorithme est appelé le RFK-EQMM à Retour de Décisions Souples (RFK-EQMM/RDS). Notons que $\text{signe}(\hat{d}(k-L|k-1))$ peut être aussi utilisé pour générer le vecteur retour $\tilde{\mathbf{D}}_2(k)$ dans le cas binaire, nous parlerons ainsi du RFK-EQMM/RDD (Retour de Décisions Dures). Dans ce cas, l'équation de remise à jour de \tilde{P}_2 (15) est omise sous l'hypothèse de décisions non erronées. Un algorithme similaire, l'EMAPS/RD, utilisant les mêmes équations que le RFK/RD pour la remise à jour du vecteur retour et de sa matrice d'erreur de covariance (à une matrice régularisante près), a été récemment proposé par Baccarelli et al. dans [2] pour

l'égalisation des canaux longs. L'égaliseur est régi par les mêmes équations de récursion de l'EMAPS [1] sur le vecteur d'état \mathbf{D}_1 en éliminant la contribution du vecteur retour $\tilde{\mathbf{D}}_2$. Remarquons que les traitements parallèles sont au nombre de q pour le RFK-EQMM/RD et de l'ordre de q^L pour l'EMAPS/RD, ce qui constitue un avantage important pour le nouvel égaliseur.

4 Simulations et discussion

La figure (1) visualise le canal utilisé pour les simulations comportant 30 coefficients et vérifiant la condition (1). Les TEB ont été moyennés sur 10 réalisations du bruit additif avec des séquences binaires totales de longueur 10^4 . La figure (2) montre les performances assez proches de l'égaliseur par RFK/RDS (la version RFK-EQMM est utilisée) par rapport au MAPSD/SDF à L fixé à 5 ou 7. Pour $L = 3$, le RFK/RDS est assujéti au problème de propagation d'erreurs à cause d'un mauvais RD de longueur importante. Les figures montrent aussi que plus L est grand, plus les performances du RFK-EQMM/RD tendent vers celles du RFK-EQMM appliqué pour estimer l'état global. La figure (3) montre que pour ce canal et pour $L = 7$, le RFK-EQMM/RDS, le RFK-EQMM/RDD et le RFK-EQMM avec vrai RD donnent les mêmes performances et sont proches de celles du MAPSD/DF. La similarité du comportement des différentes versions du RFK/RD confirment la consistance de l'estimée EQMM pour ce canal, et sont meilleures que celles d'un DFE linéaire optimal au sens Wiener avec une partie transverse de longueur $m = 8$ et à RD de longueur $n = 30 - 7 = 23$. D'après la figure (5), la version souple du RFK-EQMM/RD donne de meilleures performances que la version dure pour le canal à 20 coefficients tracé dans (4). D'abord, ce canal ne vérifie pas la condition (1) donc on s'attend à ce que la propagation d'erreurs soit plus importante et influence par la suite la qualité d'estimation EQMM de \mathbf{D}_1 . Vu que les valeurs du RD ne sont pas bonnes, utiliser des décisions dures ne fait qu'amplifier l'erreur. En améliorant la qualité de l'estimée EQMM de \mathbf{D}_1 , et par suite du RD, en utilisant la version par troncature et fusion du RFK à RDS (RFK-TF/RDS) [1], on arrive à diminuer encore plus les TEB.

5 Conclusion

Une structure d'égaliseur par RFK à retour de décisions, dans laquelle la contribution des symboles formant le RD et correspondant à la queue du canal est éliminée des observations, a été présentée. Avec une procédure de mise à jour du RD et de sa variance similaire à celles décrites dans l'algorithme de l'EMAPS/RD, le RFK-EQMM/RD réalise des performances du même ordre que celles de l'EMAPS/RD avec une complexité moindre. Les performances des versions à RD du RFK dépendent fortement de la qualité de l'estimée EQMM de l'état primaire fournie par le RFK. Un RD souple est ainsi préféré afin de limiter le phénomène de propagation d'erreurs.

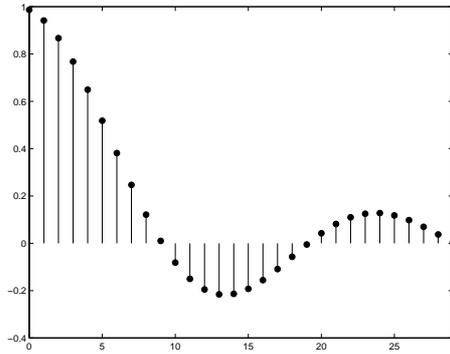


FIG. 1: Canal en sinus cardinal, $M = 30$

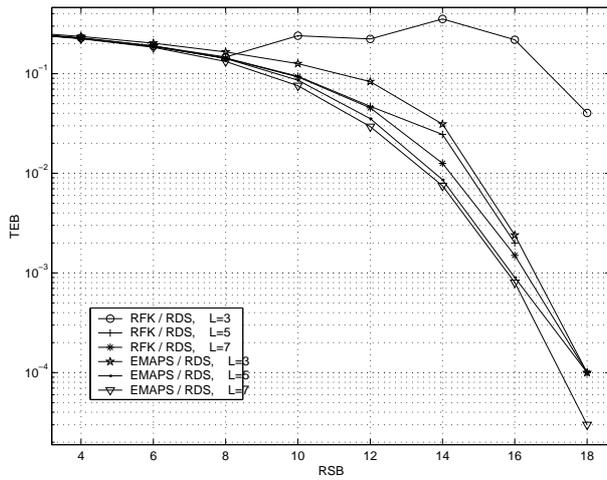


FIG. 2: Performances des versions souples des deux égaliseurs pour différentes valeurs de L

Références

- [1] R. Amara. *Egalisation de canaux linéaires et non linéaires : Approche Bayésienne*. Thèse de doctorat soutenue le 14 Janvier 2002 à l'université Paris-Sud, ORSAY
- [2] E. Baccarelli, A. Fasano, A. Zucchi. *A reduced state soft statistics-based MAP/DF equalizer for data transmission over long ISI channels*. IEEE Trans. on Comm., vol. 48, No. 9, pp. 1441-1447, September 2000.
- [3] J. Cid-Sueiro, A. Artes-Rodriguez, A.R. Figueiras-Vidal. *Recurrent Radial Basis Function Networks for optimal symbol-by-symbol equalization*. Signal Processing, vol. 40, pp. 53-63, 1994.
- [4] S. Chen, B. Mulgrew, S. McLaughlin. *Adaptive Bayesian equalizer with decision feedback*. IEEE. Trans. on signal processing, vol. 41, pp. 2918-2926, Sept. 1993.
- [5] S. Marcos. *A Network of adaptive Kalman filters for data channel equalization*. IEEE Trans. on Signal processing, vol. 48, No. 9, September 2000.
- [6] D. Williamson, R.A. Kennedy, G.W. Pulford. *Block decision feedback equalization*. IEEE Trans. on commun., vol. 40, No. 2, pp. 255-264, February 1992.

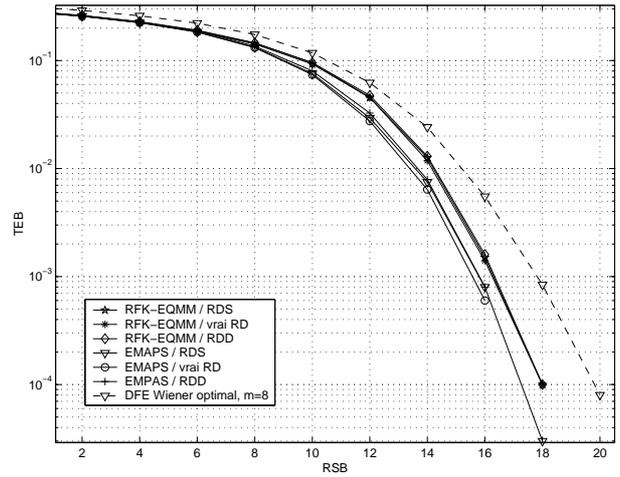


FIG. 3: Performances des versions dures des deux égaliseurs par rapport à celles considérant un vrai RD et celles à RD souple $L = 7$

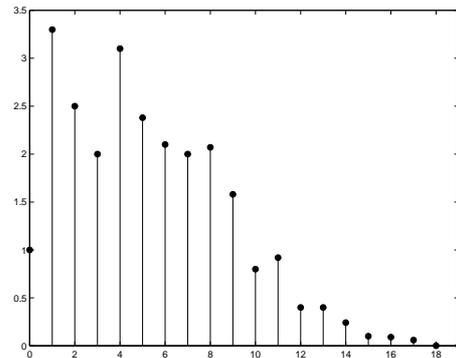


FIG. 4: Canal long à 20 coefficients

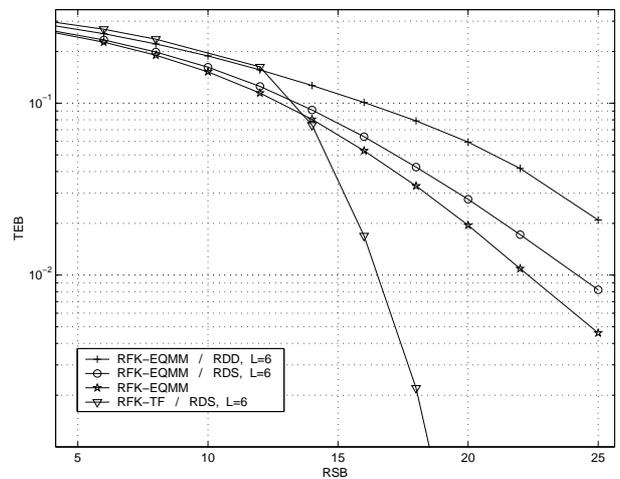


FIG. 5: performances du RFK-EQMM/RDS, RFK-EQMM/RDD et du RFK-EQMM $L = 6$