

# Interprétation géométrique de la capacité et des performances de systèmes à diversité

T. LESTABLE<sup>1,2</sup>, L.HUSSON<sup>2</sup>, J.ANTOINE<sup>2</sup>, et A.WAUTIER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ALCATEL Research and Innovation, Route de Nozay, 91461 Marcoussis cedex, France

<sup>2</sup>SUPELEC, Ecole Supérieure d'Electricité, Plateau de Moulon, 91192, Gif-Sur-Yvette cedex, France

[thierry.lestable@alcatel.fr](mailto:thierry.lestable@alcatel.fr), [Nom@supelec.fr](mailto:Nom@supelec.fr)

**Résumé** – Notre étude a pour cadre les systèmes de transmission à diversité. Nous analysons tout d'abord l'influence d'une erreur d'estimation du canal, et déduisons l'expression analytique de la capacité ainsi dégradée d'un système OPRA (Optimal Power and Rate Adaptation). Ensuite, nous proposons une interprétation géométrique de cette capacité en nous basant sur la théorie des courbes dites de Bézier. Après avoir passé en revue certaines propriétés héritées de cette structure particulière, nous proposons alors une expression matricielle de cette capacité, ainsi qu'une méthodologie de construction graphique. Pour conclure, nous présentons une application concernant le dimensionnement de motif de pilotes, pour des systèmes multi-porteuse à étalement fréquentiel (Multi-Carrier Spread-Spectrum).

**Abstract** – Our study focuses on transmission systems with diversity. We first of all analyse the influence from channel estimation error, and thus deduce the analytical expression of such degraded capacity of one OPRA (Optimal Power and Rate Adaptation) System. Then, we propose a geometrical interpretation of this capacity by basing us on the theory of curves known as of Bézier. After reviewing some inherited properties belonging to this particular framework, we then propose a matrix expression for this capacity, as well as a graphic methodology of construction. As a conclusion, we present an application concerning the pilot pattern design, for Multi-Carrier Spread Spectrum systems (MC-SS).

## 1. Introduction

La diversité d'un système de transmission, qu'elle soit de nature spatiale, fréquentielle, temporelle ou bien encore de code, est un facteur clef de la performance finale. De nombreux travaux récents portent sur l'étude des performances optimales, en terme de capacité de Shannon, ou bien encore de taux d'erreur binaire de tels systèmes à diversité comme les systèmes multi-porteuse (OFDM) (HiperLAN/2, IEEE 802.11a/g), ou bien encore des schémas d'accès multiple de type OFDMA, proposés dans 802.16e.

Notre étude concerne une classe bien particulière les systèmes de transmission multi-porteuse dotés d'une politique d'adaptation de lien à la fois en terme de contrôle de puissance, mais aussi de débit. Cette catégorie est souvent désignée dans la littérature anglo-saxonne [1]-[2] sous le terme Optimal Power and Rate Adaptation (OPRA).

Nous étudions plus particulièrement l'influence des erreurs d'estimation canal sur la capacité, au sens de Shannon, d'un système adaptatif. Après avoir rappelé les principaux résultats de référence, l'approche au moyen des résultats avancés par Gans [3], nous permet d'obtenir une expression analytique de la capacité en fonction du nombre de branches de diversité et de la corrélation entre l'estimation (ou prédiction) du canal, et le véritable canal.

Ensuite, nous montrons que l'expression de la capacité peut être étudiée grâce à la théorie des courbes de Bézier.

Cette étude nous permet de donner une méthodologie efficace pour la construction des abaques de performance,

mais aussi une nouvelle représentation matricielle de la capacité.

Enfin, nous proposons une méthodologie simple de dimensionnement du motif de pilotes fréquentiel dans le cas multi-porteuse à étalement [4] (MC-SS, MultiCarrier Spread Spectrum) sous la contrainte d'un taux d'erreur cible maximal.

## 2. Capacité d'un système OPRA avec diversité

### 2.1 Estimation parfaite du canal

Les travaux de Goldsmith [1], concernant les systèmes à adaptation de lien, ont permis de trouver la relation suivante pour la capacité d'un système OPRA, sans diversité :

$$C = \int_{\gamma_0}^{+\infty} \log_2 \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right) \cdot p(\gamma) \cdot d\gamma \quad (1)$$

où  $\gamma$  est le rapport signal à bruit et  $\gamma_0$  le seuil limite de transmission.

Par la suite, Alouini [2], apporte une généralisation de cette expression pour des systèmes à  $L$  branches de diversité :

$$C_{\Gamma}(L) = \frac{1}{\log(2)} \cdot \left\{ E_1\left(\frac{\gamma_0}{\Gamma}\right) + \sum_{k=1}^{L-1} \frac{P_k\left(\frac{\gamma_0}{\Gamma}\right)}{k} \right\} \quad (2)$$

avec  $E_1(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t} \cdot dt$ , et  $P_k(x) = e^{-x} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!}$ , et  $\Gamma$

représente le rapport signal à bruit moyen par branche

Cette expression (2) représente donc pour notre étude le cas asymptotique, optimal, en l'absence de toute imperfection sur l'estimation du canal.

## 2.2 Influence de l'estimation Canal

La plupart des études concernant l'impact de l'estimation du canal sur les performances d'un récepteur de type MRC (Maximum Ratio Combining) font référence au résultat apporté par Gans dans [3]. La densité de probabilité du rapport signal sur bruit  $\gamma$  en sortie du récepteur :

$$p(\gamma) = \frac{(1-\rho^2)^{L-1} \cdot e^{-\gamma/\Gamma}}{\Gamma} \cdot \sum_{n=0}^{L-1} \binom{L-1}{n} \cdot \left[ \frac{\rho^2 \cdot \gamma}{(1-\rho^2) \cdot \Gamma} \right]^n \cdot \frac{1}{n!} \quad (3)$$

où  $L$  est le nombre de branches de diversité,  $\Gamma = E\{\gamma\}$  est le rapport signal à bruit moyen par branche, et  $\rho$  désigne l'amplitude de la cross-corrélation complexe entre le véritable canal, et son estimation au moyen des pilotes.

En fait, cette relation (3) peut s'écrire plus simplement sous la forme :

$$p(\gamma, \rho) = \sum_{k=1}^L A(k, \rho) \cdot \frac{\gamma^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{e^{-\gamma/\Gamma}}{\Gamma^k} \quad (4)$$

avec  $A(k, \rho) = \binom{L-1}{k-1} \cdot (1-\rho^2)^{L-k} \cdot \rho^{2(k-1)}$  (5)

$A(k, \rho)$  peut se mettre sous la forme d'un Polynôme de Bernstein  $A(k, \rho) = B_{k-1, L-1}(\rho^2)$ .

## 2.3 Capacité Dégradée

A partir des équations (1) et (4), nous pouvons évaluer l'influence des erreurs d'estimation du canal sur la capacité :

$$C(\rho) = \sum_{k=1}^L \frac{A(k, \rho)}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{\Gamma^k} \cdot \int_{\gamma_0}^{+\infty} \log_2\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right) \cdot \gamma^{k-1} \cdot e^{-\gamma/\Gamma} \cdot d\gamma \quad (6)$$

La capacité dégradée peut se mettre sous la forme suivante :

$$C(\rho) = \rho^{2(L-1)} \cdot C_{opra} + \log_2(e) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{L-1} A(n, \rho) \cdot \left[ E_1\left(\frac{\gamma_0}{\Gamma}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k\left(\frac{\gamma_0}{\Gamma}\right)}{k} \right] \right\}$$

(7)

où  $C_{opra}$  désigne la capacité optimale, donnée par (2).

## 3. Interprétation Géométrique

### 3.1 Théorie des Courbes de Bézier

Dans l'expression (6), on peut mettre en évidence une somme pondérée de capacités optimales, pour des ordres croissants de diversité de 1 à  $L$ , en utilisant l'expression (2) :

$$C(\rho) = \sum_{n=1}^L C_{\Gamma}(n) \cdot B_{n-1, L-1}(\rho^2) \quad (8)$$

où  $C_{\Gamma}(n)$  est donné par (2).

Par définition, cette expression représente une courbe dite «de Bézier», en référence à l'ingénieur Pierre Bézier, créateur dans les années 60, des modélisations de courbes pour la CAO (conception) et FAO (fabrication) industrielles [5].

La capacité d'un système OPRA, à  $L$  branches de diversité, tenant compte des erreurs d'estimation du canal peut donc être interprétée comme un barycentre des différentes capacités optimales (sans erreurs d'estimation) pour un ordre croissant de diversité, dont les pondérations associées ne sont autre que des polynômes de Bernstein.

### 3.2 Algorithme de De Casteljaou

La construction d'une courbe de Bézier peut être grandement simplifiée par l'utilisation d'une propriété de récurrence, évitant ainsi l'évaluation de la base des polynômes de Bernstein. Ce principe de construction, dénoté algorithme de De Casteljaou, est fondé sur la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} P_k^0(t) &= P_k \\ P_k^n(t) &= (1-t) \cdot P_k^{n-1}(t) + t \cdot P_{k+1}^{n-1}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

avec  $0 \leq t \leq 1$ , et  $P_k$ , représentant les points de contrôle.

Cet algorithme nous est donc très utile dans l'obtention d'abaque de performances, mais peut aussi s'avérer exploitable dans des problèmes de recherche de racines, comme nous le verrons au §4.3.

### 3.3 Expression Matricielle

Le point de départ de cette nouvelle représentation réside dans l'expression des polynômes de Bernstein sous forme de Splines. En développant :

$$(1-t)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i \cdot t^i,$$

on obtient :

$$B_{k,n}(t) = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \cdot \binom{n}{i} \cdot \binom{i}{k} \cdot t^i$$

qui peut se mettre sous la forme d'un produit scalaire :

$$B_{k,n}(t) = [\alpha_{0,k} \quad \alpha_{1,k} \quad \dots \quad \alpha_{n,k}] \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \dots \\ t^n \end{bmatrix}$$

avec  $\alpha_{i,k} = \begin{cases} (-1)^{i-k} \cdot \binom{n}{i} \cdot \binom{i}{k} & \text{lorsque } k > i. \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Finalement, en injectant cette expression dans celle de la capacité, nous obtenons :

$$C(\rho) = \log_2(e) \cdot [\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_L] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{1,0} & \dots & \alpha_{L-1,0} \\ 0 & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{L-1,1} \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{L-1,L-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \dots \\ t^{L-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

avec  $t = \rho^2$ , et  $\Xi_n = E_1 \left( \frac{\gamma_0}{\Gamma} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k \left( \frac{\gamma_0}{\Gamma} \right)}{k}$

## 4. Application au dimensionnement de motifs des pilotes

### 4.1 Modèle du Système considéré

Nous considérons un système de transmission MC-SS [4], où la diversité fréquentielle est obtenue au moyen d'une séquence d'étalement fréquentielle. Aucun multiplexage par les codes n'est envisagé ici, contrairement au MC-CDMA. Cela signifie, que si plusieurs utilisateurs veulent se partager la bande, leur information respective est allouée sur des sous-porteuses distinctes. L'orthogonalité des utilisateurs est donc conservée au moyen de l'OFDMA.

L'architecture du système est illustrée sur la figure 1: le flux binaire subit un codage BPSK avant d'être étalé en fréquence sur plusieurs porteuses puis modulé par IDFT. De plus, un algorithme d'allocation dynamique de sous-porteuses permet d'allouer un nombre variable de sous-porteuses pilotes, ainsi que leur emplacement fréquentiel, suivant le facteur d'étalement choisi  $L_j$ , ainsi que le taux d'erreur binaire recherché.

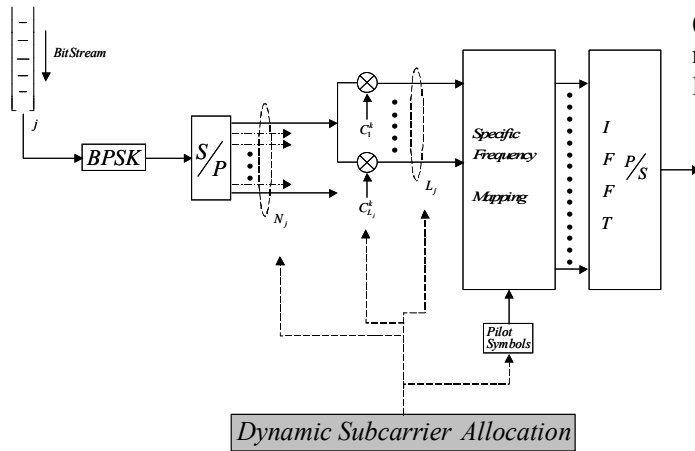


Fig.1. Modèle du système

Les sous-porteuses de l'étalement vont jouer ici le rôle des branches de diversité. L'expression du taux d'erreur binaire d'un tel système, est donné par [6]:

$$P_E = \sum_{k=1}^L A(k, \rho) \cdot P_e(\Gamma, k) \quad (11)$$

avec

$$P_e(\Gamma, k) = \int_0^{+\infty} BER(\gamma) \cdot f_\gamma(\gamma, k) \cdot d\gamma,$$

$$\text{et } f_\gamma(\gamma, k) = \frac{\gamma^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{e^{-\gamma/\Gamma}}{\Gamma^k}.$$

Comme dans le calcul de la capacité, nous pouvons utiliser la théorie des courbes de Bézier pour analyser et exploiter l'équation (11).

### 4.2 Principe de dimensionnement des pilotes

On cherche à optimiser le motif de pilotes dans le domaine fréquentiel. Dans le cas d'un canal radio à profil de puissance exponentiellement décroissant, nous pouvons obtenir la corrélation entre deux fréquences distinctes :

$$\rho_k = \rho(k \cdot \Delta f_{subc}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi \cdot k \cdot \Delta f_{subc} \cdot \tau_{RMS})^2}} \quad (12)$$

$\Delta f_{subc} = \frac{1}{T_s} = \frac{W}{N_{subc}} = \frac{f_e}{N_{fft}}$  est l'espacement entre sous-porteuses OFDM,  $\tau_{RMS}$  est l'étalement temporel des multi-trajet,  $W$  est la bande totale, et  $N_{subc} = N_{fft}$  le nombre de sous-porteuses.

A partir des expressions (12) et (11), nous pouvons obtenir la probabilité d'erreur en fonction de l'espacement  $k$  entre un pilote et une sous-porteuse de données. Nous considérons que chaque pilote fournit l'information canal utilisée par un sous-ensemble de porteuses, et que sa position débute le sous-ensemble en question. On peut en déduire l'espacement maximal entre deux pilotes pour une qualité de lien radio (BER, Bit Error Rate) donnée. Le graphique donné par la figure 2 illustre le procédé de recherche: la probabilité d'erreur est donnée en fonction de l'espacement entre les pilotes pour différents facteurs d'étalements (Spreading Factor, SF = L) égaux 2, 4 ou 8 et pour un nombre total de 64 sous-porteuses et la bande est de 20 MHz. Le rapport signal à bruit est fixé à 15 dB.

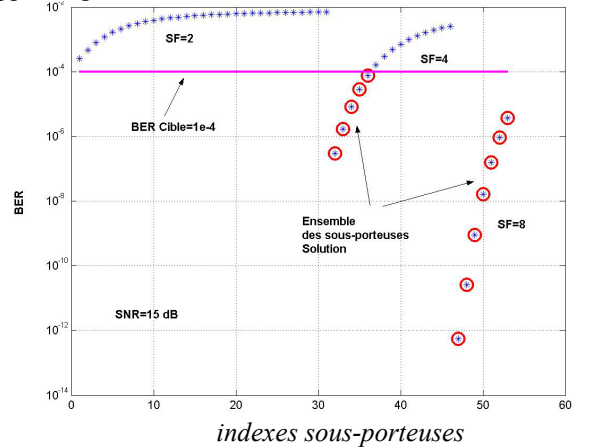


Fig.2. Allocation des sous-porteuses MC-SS,  $TEB_{cible} = 10^{-4}$ ,  $\Gamma = 15$  dB,  $\tau_{RMS} = 50$  ns

Dans cet exemple (Fig.2), pour maintenir un taux d'erreur de  $10^{-4}$  en utilisant un facteur d'étalement de 4, on peut constater que seules les 5 plus proches sous-porteuses possèdent une qualité suffisante avec un SNR de 15dB. Il est donc nécessaire d'insérer un symbole pilote toutes les 6 sous-porteuses.

### 4.3 Algorithme de Recherche des Racines

En §4.2, le motif des pilotes a été déterminé en calculant itérativement tous les taux d'erreur associés à chacune des positions possibles. Selon le nombre de sous-porteuses disponibles dans le système, ce procédé peut s'avérer onéreux en temps de calcul. L'espacement entre les pilotes peut être obtenu par un algorithme de recherche des racines de l'équation  $P_E - \text{TEB}_{\text{cible}} = 0$ . Ce processus consiste à rechercher l'intersection entre une courbe de Bézier et une droite. Il peut être démontré que ce problème revient à rechercher la racine d'une nouvelle courbe de Bézier. En utilisant conjointement la propriété de subdivision des courbes de Bézier, et l'algorithme de De Casteljaou, la recherche devient itérative, et converge rapidement. Ceci est illustré par la figure 3.

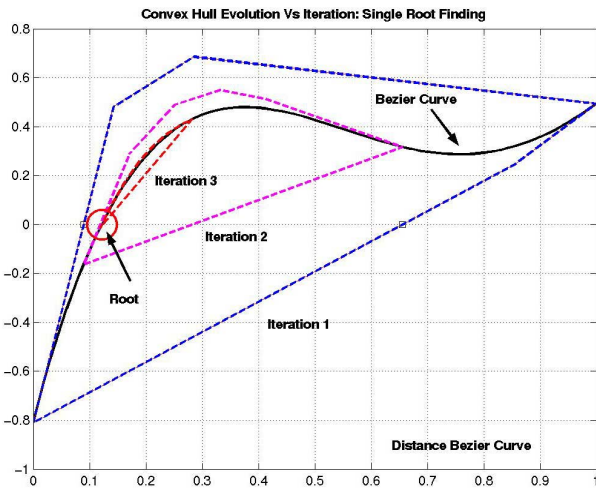


Fig.3. Procédé de recherche de racine basé sur la propriété de subdivision et l'algorithme de De Casteljaou

### 4.4 Résultats

Nous donnons sur la figure 4 les différents motifs de pilotes, obtenus pour un facteur d'étalement de 2, pour un canal d'étalement ( $\tau_{\text{RMS}}$ ) de 50ns, et quatre taux d'erreur cible ( $10^{-6}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ).

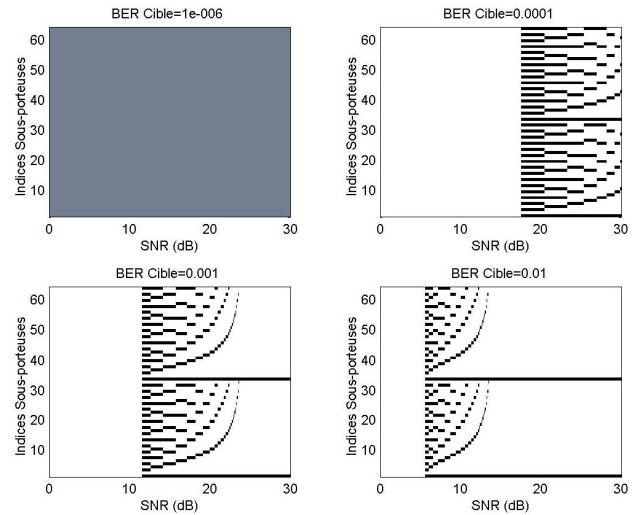


Fig.4. Motifs de pilotes fréquentiels, avec contrainte de taux d'erreur

Le motif fréquentiel est donné en fonction du rapport signal à bruit pour les différents taux d'erreur cibles. Par exemple, pour un taux d'erreur cible de  $10^{-2}$  et un rapport signal à bruit de 11 dB, 6 pilotes sont nécessaires.

## 5. Conclusions

Nous avons calculé l'influence de l'erreur d'estimation du canal dans des systèmes multi-porteuse sur la capacité d'un système de type OPRA à diversité et sur les performances d'un récepteur MRC.

Nous avons proposé une méthode de dimensionnement des pilotes originale exploitant ces résultats et utilisant la théorie des courbes de Bézier. Cette interprétation géométrique, nous a permis de dévoiler l'intérêt de certaines propriétés inhérentes à la théorie de Bézier.

## Références

- [1] A.J.Goldsmith, P.Varaiya. *Capacity of fading channels with channel side information*. IEEE Trans. Inform. Theory, vol.43, pp-1896-1992, Nov.1997,
- [2] M-S.Alouini, A.J.Goldsmith. *Capacity of Rayleigh Fading Channels Under Different Adaptive Transmission and Diversity-Combining Techniques*. IEEE Trans. On Veh.Tech., Vol.48, N.4, July 1999.
- [3] M.J.Gans, *The Effect of Gaussian Error in Maximal Ratio Combiners*. IEEE Trans. On Com. Tech., Vol. com-19, N 4, August 1971,
- [4] Stefan Kaiser, and Khaled Fazel, *A Flexible Spread-Spectrum Multi-Carrier Multiple-Access System for Multi-Media Applications*, in Proc. IEEE PIMRC'97, Helsinki, Finland, pp. 100-104, Sept. 1997,
- [5] <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/>
- [6] B.R.Tomiuk, N.C.Beaulieu, A.A.Abu-Dayya. *Maximal Ratio Combining with Channel Estimation Errors*. IEEE Pacific Rim Conference, Victoria, B.C., pp. 363-366, May 17-19, 1995.