

# Algorithme rapide de reconstruction tomographique basé sur la compression des calculs par ondelettes

Thomas RODET<sup>1</sup>, Pierre GRANGEAT<sup>2</sup>, Laurent DESBAT<sup>3</sup>,

<sup>1</sup>Dept. de Médecine nucléaire, Vrije Universiteit Brussel, AZ-VUB, B-1090 Brussels, Belgique

<sup>2</sup>CEA/LETI/DRT/DSIS, 17 Rue des Martyrs, F 38054 GRENOBLE Cedex 9, FRANCE.

<sup>3</sup>TIMC-IMAG, UMR CNRS 5525, IAB, Faculté de médecine, UJF 38706 La Tronche Cedex, FRANCE.

Thomas.Rodet@vub.ac.be ou Thomas.Rodet@imag.fr , Pierre.Grangeat@cea.fr ,  
Laurent.Desbat@imag.fr

**Résumé** – L’introduction de nouveaux systèmes de tomographie 3D à partir de détecteurs multi-lignes ou de détecteurs plats fait augmenter le nombre de données à traiter. De plus, pour certaines applications médicales le temps de reconstruction doit être réduit (tomofluoroscopie 3D). Nous avons donc développé un nouvel algorithme de reconstruction 3D basé sur la compression des calculs.

L’idée principale est d’adapter les techniques de compression à base d’ondelettes à la reconstruction tomographique. Pour cela, nous calculons une transformée en ondelettes indirecte de l’image  $f$  à travers la décomposition de ses projections (ou transformée de Radon)  $Rf$ . Cette approche est hiérarchique. En effet, nous reconstruisons dans un premier temps, les coefficients d’ondelettes aux échelles grossières, à partir de ces coefficients nous prédisons les coefficients significatifs aux échelles plus fines. Cette prédiction est obtenue en utilisant la structure des “Zerotree” introduite par J. Shapiro dans le cadre de la compression de données. En conclusion notre approche permet de rétroprojeter uniquement les coefficients contenant de l’information pertinente. Elle permet de reconstruire de 2 à 5 fois plus vite que une approche classique FBP (Filtered Back Projection) un volume tomographique ( $32 \times 512 \times 512$ ).

**Abstract** – CT acquisition systems involve increasing amounts of data. Moreover, for many medical applications, the computation time must be reduced (Tomofluoroscopy). We develop a new fast 3D reconstruction algorithm based on the computation compression.

The main idea is to adapt the compression technique used in the norm JPEG 2000 to the tomographic reconstruction. We perform an indirect wavelet transform of the image  $f$  through the decomposition of the projection  $Rf$ . The approach is hierarchical. At first, we reconstruct the wavelet coefficients in the coarse scales. These reconstructions allow to predict maps of insignificant wavelet coefficients in the finer scales. This prediction was performed using the Zerotree structure introduced by J. Shapiro for data compression. So, our approach back-projects only the wavelet coefficients containing pertinent information. Our algorithm is about 2 to 5 times faster than a classical FBP algorithm for a 3D image ( $32 \times 512 \times 512$ ).

## 1 Introduction

L’introduction de nouveaux systèmes de tomographie 3D à partir de détecteurs multi-lignes ou de détecteurs plats fait augmenter le nombre de données à traiter. De plus, pour certaines applications médicales les reconstructions doivent être faites en temps réel. La tomofluoroscopie 3D pour le guidage de gestes chirurgicaux par l’image [4] est l’une des applications qui demande le plus de ressources de calculs (une centaine de GigaFLOPs) [12]. L’accélération des calculs tomographiques est donc cruciale pour le développement de cette technique.

Il existe principalement trois familles d’algorithmes rapides de reconstruction. La première repose sur l’utilisation de la transformée de Fourier rapide. Il existe en effet un théorème qui permet de reconstruire les données tomographiques dans le domaine de Fourier. En théorie, une interpolation entre une grille polaire et une grille cartésienne dans le domaine de Fourier suffit pour reconstruire les données, mais, en pratique, cette interpolation est difficile à mettre en œuvre de manière efficace [14, 13]. Récemment, de nouveaux travaux basés sur la géométrie linogramme [9, 10] et sur la transformée de Fourier fractionnaire donnent de bons résultats [11, 22, 2].

La deuxième famille de méthodes est basée sur l’accélération de l’étape de rétroprojection par factorisation des calculs. Ces approches hiérarchiques sont construites sur le même principe que la transformée de Fourier rapide : toutes les projections sont traitées au même moment [6, 21, 20, 8, 7].

La dernière famille d’algorithmes est basée sur une approche “divide and conquer”. Le problème de reconstruction est divisé en plusieurs problèmes plus petits. Une approche introduite par S. Basu and Y. Bresler [3] consiste à reconstruire des petites zones de l’image de manière indépendante, mais cette méthode ne peut pas donner de solution exacte. Nous avons récemment introduit une méthode qui divise le problème dans le domaine de Fourier [16, 18] et qui est théoriquement exacte.

Ce papier présente un nouvel algorithme de compression de calculs avec perte. Le principe de l’accélération est de réduire au maximum le nombre de points sur lesquels on doit réaliser la reconstruction. Pour cela, nous reconstruisons uniquement les coefficients d’ondelettes porteurs d’informations.

Dans la partie 2 nous présenterons nos notations, puis nous exposerons notre méthode dans la partie 3, enfin nous exposerons des résultats sur des données 3D réalistes.

## 2 Notations

Nous définissons la transformée de Fourier  $\hat{f}$  d'une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  par :

$$\hat{f}(\vec{v}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x}) e^{-i\vec{v} \cdot \vec{x}} dx_1 dx_2. \quad (1)$$

Soit  $s \in \mathbb{R}$ , et  $\theta \in [0, 2\pi[$ , définissons la transformée de Radon  $R$  par :

$$Rf(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}} f(s \cos \theta + t \sin \theta, s \sin \theta - t \cos \theta) dt. \quad (2)$$

Remarque : La transformée de Radon de l'image  $f$  correspond aux données mesurées par un scanner.

De plus, on note la transformée de Fourier de la transformée de Radon selon la variable scalaire  $s$  par  $\widehat{R}f$ :

$$\widehat{R}f(\theta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} Rf(\theta, s) e^{-i\sigma s} ds \quad (3)$$

Pour des fonctions suffisamment régulières, nous pouvons utiliser la formule d'inversion de la transformée de Radon suivante (voir [15]) :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} R^\# I^{-1} Rf(\vec{x}) \quad (4)$$

où  $R^\#$  est l'opérateur de rétroprojection (opérateur dual de l'opérateur de Radon  $R$ ) et  $I^{-1}$  est l'opérateur associé au filtre de reconstruction appelé le filtre rampe.

## 3 Méthode

L'idée générale de la méthode est d'utiliser la représentation compacte de l'information dans le domaine des ondelettes. Pour cela, nous devons pouvoir reconstruire la transformée en ondelettes de l'image reconstruite en traitant uniquement ses projections. De plus, il nous faut prédire les coefficients d'ondelettes qui sont porteurs d'une information négligeable pour ne pas les reconstruire.

### 3.1 Reconstruction des coefficients d'ondelettes

Nous allons maintenant déterminer la formule d'inversion permettant de reconstruire la transformée en ondelettes 2D séparables de l'image  $f$  [5]. Nous notons par  $\Phi(\vec{x}) = \phi(x_1)\phi(x_2)$  la fonction d'échelle 2D et par  $\Psi^1(\vec{x}) = \phi(x_1)\psi(x_2)$ ,  $\Psi^2(\vec{x}) = \psi(x_1)\phi(x_2)$ ,  $\Psi^3(\vec{x}) = \psi(x_1)\psi(x_2)$  les trois ondelettes mères associées.

Nous appliquons la formule d'inversion de la transformée de Radon (4) pour un coefficient d'ondelettes de l'image  $f$  :

$$\langle f, \Phi_{j,\vec{k}} \rangle = \frac{1}{4\pi} R^\# I^{-1} R (f * \check{\Phi}_j) (\vec{k}) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4\pi} R^\# I^{-1} Rf * R\check{\Phi}_j(\vec{k}) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\sigma| \widehat{R_\theta f}(\sigma) \widehat{R_\theta \check{\Phi}_j}(\sigma) e^{i\sigma(\vec{k} \cdot \vec{\theta})} d\sigma d\theta$$

avec  $\check{\Phi}(\vec{x}) = \Phi(-\vec{x})$ . Le passage de (5) à (6) se fait grâce au théorème de convolution  $R(f * g) = Rf * Rg$  [15].

Définissons maintenant un ensemble de bases de décomposition des projections  $(\tau_\theta)_{\theta \in [0, 2\pi[}$ ,  $(\rho_\theta^i)_{\theta \in [0, 2\pi[}$ ,  $i=1,2,3$  tel que

pour tout  $\theta$  appartenant à  $[0, 2\pi[$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_\theta(\sigma) &= |\sigma| \widehat{\phi}(\sigma \cos \theta) \widehat{\phi}(\sigma \sin \theta) = |\sigma| \widehat{R_\theta \check{\Phi}}(\sigma), \\ \widehat{\rho}_\theta^1(\sigma) &= |\sigma| \widehat{\phi}(\sigma \cos \theta) \widehat{\psi}(\sigma \sin \theta) = |\sigma| \widehat{R_\theta \check{\Psi}^1}(\sigma), \\ \widehat{\rho}_\theta^2(\sigma) &= |\sigma| \widehat{\psi}(\sigma \cos \theta) \widehat{\phi}(\sigma \sin \theta) = |\sigma| \widehat{R_\theta \check{\Psi}^2}(\sigma), \\ \widehat{\rho}_\theta^3(\sigma) &= |\sigma| \widehat{\psi}(\sigma \cos \theta) \widehat{\psi}(\sigma \sin \theta) = |\sigma| \widehat{R_\theta \check{\Psi}^3}(\sigma), \end{aligned} \quad (7)$$

En utilisant (7) dans (6) nous obtenons une formule du type rétroprojection filtrée permettant de reconstruire les coefficients en ondelettes de l'image :

$$\langle f, \Phi_{j,\vec{k}} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (R_\theta f * \check{\tau}_{\theta,j}) (\vec{k} \cdot \vec{\theta}) d\theta \quad (8)$$

$$\langle f, \Psi_{j,\vec{k}}^i \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (R_\theta f * \check{\rho}_{\theta,j}^i) (\vec{k} \cdot \vec{\theta}) d\theta \quad (9)$$

Avec  $i = \{1, 2, 3\}$ ,  $\vec{k} = (k_1, k_2)^T$ ,  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\tau_{\theta,j,l}(s) = 2^{-j/2} \tau_\theta(2^{-j}s - l)$  et  $j$  représente le facteur d'échelle.

Notons que dans les équations (8) et (9), le noyau du filtre composé du filtre rampe et de la transformée de Radon de l'ondelette, dépend de la direction de projection  $\theta$ . De plus, si  $|\widehat{\Psi}(\vec{v})| < C_\Psi(1 + |\vec{v}|^{-1})$  alors  $\tau_\theta$  est une ondelette quelque soit  $\theta$  [5].

### 3.2 La prédiction des coefficients d'ondelettes négligeables

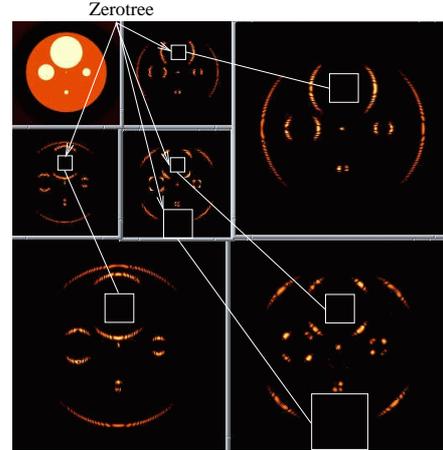


FIG. 1: "Zerotree" présent dans les coefficients d'ondelettes de l'image reconstruite

Contrairement au cas de la compression de données nous devons éliminer des coefficients d'ondelettes avant de connaître leurs valeurs. Nous allons donc prédire les zones où la transformée en ondelettes est négligeable à l'aide de la propriété des "zerotrees" introduite par J. Shapiro [19] (voir figure 1). Nous faisons donc l'hypothèse que si un coefficient d'ondelettes basse résolution est négligeable alors tous les coefficients d'ondelettes de même orientation et de même localisation appartenant aux échelles plus fines sont aussi négligeables.

Notre algorithme procède donc de manière hiérarchique. Nous reconstruisons d'abord les coefficients d'ondelettes basse résolution (par exemple les quatre cadrans en haut à gauche de la figure 1) puis nous déterminons les coefficients négligeables aux échelles inférieures grâce au "Zerotree". Nous déterminons les racines des arbres de zéro simplement par seuillage des coefficients d'ondelettes. Enfin nous ne reconstruisons que

les coefficients d'ondelettes supposés non négligeables. Nous obtenons donc un algorithme de compression des calculs tomographiques.

Notons que pour limiter les erreurs de prédiction nous avons utilisé une ondelette bien localisée dans le domaine direct 9/7 [1].

## 4 Résultats

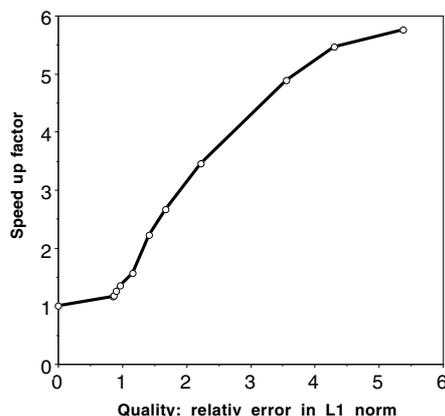


FIG. 2: Graphique représentant le temps de reconstruction en fonction de la qualité d'image obtenue

Par un souci de clarté nous avons présenté notre algorithme dans le cas 2D, mais nous avons généralisé cette approche au 3D. Nous avons donc reconstruit un volume 3D  $32 \times 512 \times 512$  sur un processeur Athlon1800+. Les données que nous avons utilisées ont été simulées en reprojétant en géométrie conique un volume scanner reconstruit.

Nous avons reconstruit les données avec un algorithme classique de type FBP pour avoir une référence en terme de temps de calculs et de qualité d'image. Puis avec les mêmes données nous avons testé notre algorithme en faisant varier le nombre de coefficients d'ondelettes éliminés. À l'aide de ces reconstructions nous avons tracé l'accélération obtenue par notre algorithme en fonction de la qualité de l'image reconstruite (voir le graphique de la figure 2). Nous observons sur cette courbe que le facteur d'accélération est proportionnel à la dégradation de la qualité de l'image dans la partie centrale du graphique. Le décalage au début de la courbe s'explique par l'emploi d'autres méthodes d'accélération basées sur l'échantillonnage de la transformée de Radon qui sont détaillées dans [18, 17]. Enfin la non linéarité de la fin de la courbe est due à la présence de temps incompressibles dans la reconstruction comme le temps de filtrage et le temps de synthèse. Notons que l'allure de la courbe dépend des données à reconstruire : dans le cas d'images possédant une représentation en ondelettes très creuse nous obtenons des facteurs d'accélération plus importants pour une qualité semblable.

Afin de mieux évaluer la qualité des reconstructions, nous avons représenté en haut de la figure 3 la reconstruction FBP classique et sur la ligne centrale de la figure 3 trois images reconstruites par notre algorithme pour différents facteurs d'accélération. Aux regards de ces images nous pouvons conclure que notre algorithme permet de reconstruire 2.2 fois plus vite qu'un

algorithme standard sans perte d'information, 3.5 fois plus vite en introduisant de faibles erreurs bien localisées et 5.5 fois plus vite en dégradant l'image reconstruite mais en préservant l'information générale.

En dehors de son efficacité ce nouvel algorithme est beaucoup plus facilement adaptable à différentes applications nécessitant des qualités de reconstruction différentes. Un unique paramètre qui correspond au niveau de seuillage des coefficients d'ondelettes permet de régler la qualité des images voulues.

## Remerciements

Les auteurs remercient le Pr. Michel Barlaud pour son aide sur le choix et l'implémentation des ondelettes et le Pr. Michel Defrise pour ces discussions sur les méthodes de reconstruction rapides. Ces travaux ont été partiellement supportés par le projet Rhône Aples Adémo.

## Références

- [1] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, and I. Daubechies. Image coding using wavelet transform. *IEEE Trans. Image Proc.*, 1(2):205–220, April 1992.
- [2] A. Averbuch, R. R. Coifman, D. L. Donoho, M. Israeli, and J. Waldén. Fast slant stack: a notion of Radon transform for data in a cartesian grid which is rapidly computable, algebraically exact, geometrically faithful and invertible. submitted to *SIAM Scientific Computing*; (<http://www.math.tau.ac.il/~amir>), 2002.
- [3] S. Basu and Y. Bresler.  $o(n^2 \log_2 n)$  filtered backprojection reconstruction algorithm for tomography. *IEEE Trans. Image Processing*, 9:1760–1773, 2000.
- [4] J. Bellow, H. Wright, and C. Unger. CT-guided pericardial drainage catheter placement with subsequent pericardial sclerosis. *J. Comput. Assist. Tomog.*, 19:672–675, 1995.
- [5] C. A. Berenstein and D. F. Walnut. Wavelets in local tomography. In *Wavelets in Medicine and Biology*, volume 19, pages 231–261. CRC Press Inc., 1996.
- [6] M. Brady. A fast discrete approximation algorithm for the Radon transform. *SIAM J. Sci. Comput.*, 27(1):107–119, 1998.
- [7] A. Brandt, J. Mann, M. Brodski, and M. Galun. A fast and accurate multilevel inversion of the Radon transform. *SIAM Journ. on Appl. Math.*, 60(2):437–462, 1999.
- [8] P.E. Danielsson and M. Ingerhed. Backprojection in  $O(n^2 \log_2 n)$  time. In *IEEE Medical Imaging Conference 1997*, Albuquerque, New Mexico, USA, 1997.
- [9] P. Edholm and G. Herman. Linograms in image reconstruction from projections. *IEEE Trans. Med. Im.*, 6:301–307, 1987.
- [10] P. Edholm, G. Herman, and D. Roberts. Image reconstruction from linograms: implementation and evaluation. *IEEE Trans. Med. Im.*, 7(3):239–246, 1988.

- [11] D. Gottlieb, B. Gustafsson, and P. Forssén. On the direct Fourier method for computer tomography. *IEEE Trans. Med. Im.*, 19(3):223–232, 2000.
- [12] P. Grangeat, A. Koenig, T. Rodet, and S. Bonnet. Theoretical framework for a dynamic cone-beam reconstruction algorithm based on a dynamic particle model. *Phys. Med. Biol.*, 47(15):2611–2625, August 2002.
- [13] M. Magnusson. *Linogram and other Direct Fourier Methods for tomographic Reconstruction*. Thesis no 672, Linköping University, 1993.
- [14] M. Magnusson, P.E. Danielsson, and P. Edholm. Artefacts and remedies in direct Fourier tomographic reconstruction. In *Conf. Rec. 1992 IEEE Med. Imag. Conf.*, pages 1138–1140, 1992.
- [15] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986.
- [16] T. Rodet, P. Grangeat, and L. Desbat. A new computation compression scheme based on a multifrequential approach. In *Conf. Rec. 2000 IEEE Med. Imag. Conf.*, volume 15, pages 267–271, 2000.
- [17] T. Rodet, P. Grangeat, and L. Desbat. Reconstruction accélérée par compression de calculs utilisant une approche fréquentielle. In *GRETSI'01 sur le traitement du signal et des images*, volume 18, Toulouse, FRANCE, 2001.
- [18] T. Rodet, P. Grangeat, and L. Desbat. Multichannel algorithm for fast reconstruction. *Phys. Med. Biol.*, 47(15):2659–2671, August 2002.
- [19] J.M. Shapiro. Embedded image coding using zerotree of wavelet coefficients. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41:3445–3462, Dec. 1993.
- [20] H. Turbell. *Cone-Beam reconstruction using filtered backprojection*. Thesis no 672, University of Linköping, 2001.
- [21] H. Turbell and P.E. Danielsson. Fast Feldkamp reconstruction. In *3D-1999*, volume 5, pages 311–314, Egmond aan Zee, Holland, 1999.
- [22] J. Waldén. Analysis of direct Fourier method for computed tomography. *IEEE trans. Med. Im.*, 19(3):211–222, 2000.

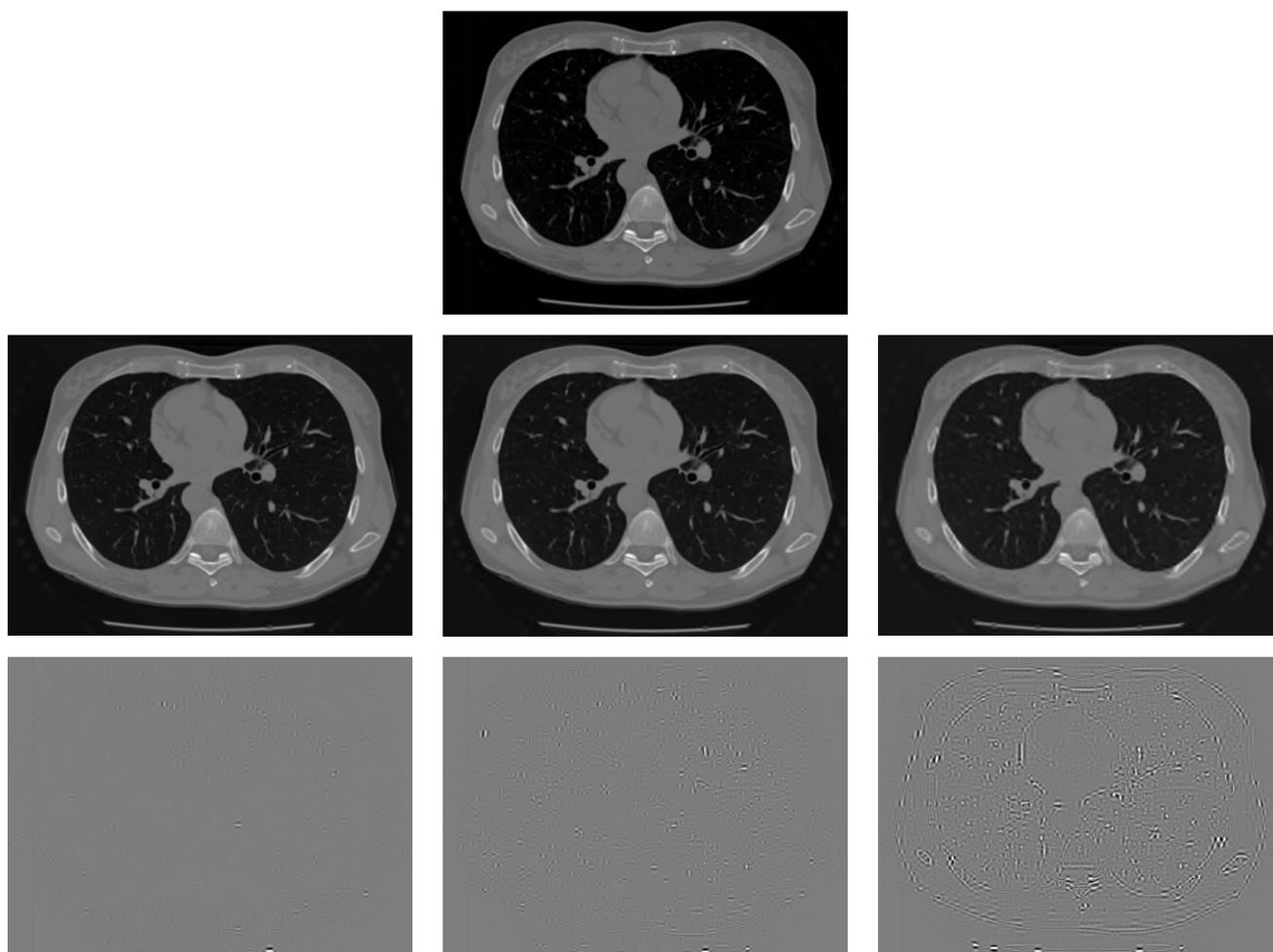


FIG. 3: Coupe centrale d'un volume thoracique (en haut) reconstruction FPB, (au milieu) reconstruction avec notre algorithme qui conduit à des facteurs d'accélération de (de gauche à droite) 2.2 , 3.5, 5.5, (en bas) images des différences