

# Une solution analytique au problème « Perspective-N-Points » et son extension aux capteurs catadioptriques

Jonathan FABRIZIO, Jean DEVARIS

UPMC-LISIF

boite 164, 4 place Jussieu 75252 Paris cedex 05, France

fabrizio@lis.jussieu.fr, devars@ccr.jussieu.fr

**Résumé** – La détermination de la distance entre un capteur d’image unique et une mire constituée d’un ensemble de  $N$  points de références est un problème couramment abordé en traitement d’image (souvent appelé Perspective-N-Points). Beaucoup de solutions ont déjà été proposées. À l’aide d’une mise en équation originale, notre approche est, contrairement à la plupart des solutions existantes, strictement analytique. D’une part, cette solution nécessite une charge de calcul minimale et constante, ce qui la rend compatible avec un traitement temps réel et, d’autre part, elle est applicable avec des capteurs non linéaires (en particulier omnidirectionnels).

**Abstract** – The problem of estimating the distance between a unique image sensor and a well known pattern composed by  $N$  points (The Perspective-N-Points problem) has been extensively treated and many solutions exist. By the use of a new set of equations, we get, whereas most of existing solutions, a strictly analytical solution. This solution first request few and constant CPU time which allow us to use it in real time applications and second is usable with nonlinear sensor (particularly omnidirectional sensor).

## 1 Introduction

Le problème dit « Perspective-N-Points » (ou « P-N-P ») consiste à estimer une distance capteur d’image-objet en étudiant la projection sur le plan image de  $N$  points de référence de l’objet. Depuis plus d’un siècle le problème est abordé à intervalles réguliers [1]. Plusieurs solutions existent, mais elles sont le plus souvent lourdes et ne peuvent donc pas être utilisées dans des applications temps réel. En effet, elles dérivent souvent d’une même formulation (exposée par Fischler et Bolles dans [2]) qui implique la résolution d’un système non linéaire. S’il est possible de trouver une solution linéaire, la phase de linéarisation est pesante [3]. Le problème reste ouvert [4].

Des variantes ont été proposées : Abidi et Chandra [5] proposent l’utilisation de l’aire du « cône de perspective » pour retrouver la position des points de l’espace, sans forcément connaître la position du centre de projection. Certains auteurs ont remplacé les points par des lignes : Horaud et al. [6] établissent une solution analytique pour le cas  $N = 4$ , mais cette solution impose la résolution d’un polynôme de degré 4.

Nous établissons qu’il existe une solution analytique simple à ce problème en changeant la formulation initiale, en particulier, nous montrons que le cas de 4 points coplanaires se ramène à un degré 2. La solution obtenue devient donc compatible avec des applications temps réel. Enfin nous généralisons cette solution à des capteurs catadioptriques, notamment les caméras catadioptriques panoramiques.

## 2 Mise en équation du problème

La formulation initiale du problème reposait sur l’utilisation du cosinus généralisé dans le cône de perspective. Rappelons cette formulation : soit  $O$  le foyer de la caméra, on dispose d’un

ensemble de  $N$  points ( $p_i$   $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ) dans l’espace qui se projette en un ensemble de  $N$  points ( $p'_i$   $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ) sur le plan image. Les longueurs des segments  $[Op_i]$ , que l’on cherche à estimer, seront notées  $dOp_i$  et, nous noterons  $dp_i p_j$  la distance du point  $p_i$  au point  $p_j$  (Figure 1). En utilisant l’expression du cosinus généralisé, on peut écrire  $C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$  relations de la forme :

$$dOp_i^2 + dOp_j^2 - 2 dOp_i dOp_j \cos(\widehat{p_i Op_j}) = dp_i p_j^2 \quad (1)$$

Par exemple, pour le cas  $N = 4$  (Figure 1) on obtient 6 relations de ce type avec 4 inconnues ( $dOp_i \forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ ). Le problème se ramène à résoudre ce système.

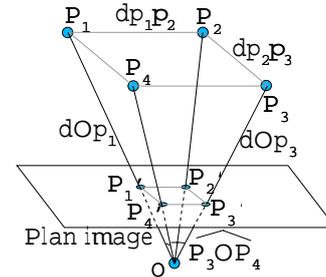


FIG. 1 – Le « P-N-P » dans le cas plan.

Reformulons le problème afin d’obtenir un système plus simple à résoudre. Dans l’espace, les points  $O$ ,  $p_i$  et  $p'_i$  sont alignés. Il existe donc  $\lambda_i$  tel que :

$$p_i = O + \lambda_i \vec{v}_i \text{ avec } \vec{v}_i = \frac{p'_i - O}{\|p'_i - O\|} \quad (2)$$

Dans la pratique nous faisons correspondre  $O$  avec le centre du repère afin de simplifier les expressions obtenues, ceci sans

perte de généralité. Localiser les points  $p_i$  dans l'espace revient à déterminer l'ensemble des  $\lambda_i$ . Pour cela, nous pouvons utiliser plusieurs relations en fonction des contraintes qui s'appliquent sur les points  $p_i$ . Par exemple, si l'on connaît la distance entre les points  $p_i$ , on peut établir  $C_n^2$  relations à  $N$  inconnues de la forme :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1,N \rrbracket^2 \quad i \neq j ; \quad \overrightarrow{p_i p_j} * \overrightarrow{p_i p_j} - dp_i p_j^2 = 0 \quad (3)$$

avec

$$\overrightarrow{p_i p_j} = p_j - p_i \quad (4)$$

$$= O + \lambda_j \overrightarrow{v_j} - (O + \lambda_i \overrightarrow{v_i}) \quad (5)$$

$$= \lambda_j \overrightarrow{v_j} - \lambda_i \overrightarrow{v_i} \quad (6)$$

De même si l'on connaît les valeurs des angles formés par les différents segments  $[p_i p_j]$ , on peut écrire  $C_n^3 = \frac{N(N-1)(N-2)}{2}$  relations supplémentaires avec les  $N$  inconnues :

$$\forall (i,j,k) \in \llbracket 1,N \rrbracket^3 \quad i \neq j \neq k ; \quad \overrightarrow{p_i p_j} * \overrightarrow{p_i p_j} - dp_i p_j^2 \cos(\widehat{p_i p_j p_k}) = 0 \quad (7)$$

La solution découle de la résolution du système obtenu à l'aide des contraintes ci-dessus qui ne sont en aucun cas exhaustives. Elles dépendent de la connaissance que l'on a sur les positions relatives des points. Cette approche permet d'obtenir des systèmes simples, dont la complexité dépend de la forme des contraintes exprimées sur les points.

### 3 Exemple simple avec 4 points coplanaires

Voyons sur un exemple concret comment résoudre le « P-N-P » en utilisant cette approche. Étudions pour cela le cas simple de 4 points formant un parallélogramme dont la longueur  $l$  d'un côté est connue. Une relation qui exprime la coplanarité et l'égalité 2 à 2 des longueurs des côtés, est :

$$\overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_3 p_4} = \vec{0} \quad (8)$$

Ce qui donne (avec  $\overrightarrow{v_i} = [v_{xi} \quad v_{yi} \quad v_{zi}]^t$ ) :

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 v_{x2} - \lambda_1 v_{x1} + \lambda_4 v_{x4} - \lambda_3 v_{x3} \\ \lambda_2 v_{y2} - \lambda_1 v_{y1} + \lambda_4 v_{y4} - \lambda_3 v_{y3} \\ \lambda_2 v_{z2} - \lambda_1 v_{z1} + \lambda_4 v_{z4} - \lambda_3 v_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Cette relation permet d'exprimer tous les  $\lambda_i$  en fonction de l'un d'entre eux (Nous choisissons ici  $\lambda_1$ ). En posant

$$\Delta_{ijk} = \begin{vmatrix} v_{xi} & v_{xj} & v_{xk} \\ v_{yi} & v_{yj} & v_{yk} \\ v_{zi} & v_{zj} & v_{zk} \end{vmatrix} \quad (10)$$

on obtient :

$$\lambda_2 = \frac{\Delta_{134}}{\Delta_{234}} \lambda_1, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_{124}}{\Delta_{234}} \lambda_1, \quad \lambda_4 = \frac{\Delta_{123}}{\Delta_{234}} \lambda_1 \quad (11)$$

Il nous reste à trouver une expression de  $\lambda_1$ . Faisons, pour cela, intervenir la longueur d'un coté du parallélogramme :

$$\|\overrightarrow{p_1 p_4}\| = l \Leftrightarrow \|\lambda_4 \overrightarrow{v_4} - \lambda_1 \overrightarrow{v_1}\| = l \quad (12)$$

$$\Rightarrow \lambda_4^2 - 2\overrightarrow{v_1} \overrightarrow{v_4} \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_1^2 = l^2 \quad (13)$$

(car  $\|\overrightarrow{v_i}\| = 1$ )

Ce qui, combiné avec l'expression de  $\lambda_4$  (11), donne :

$$\lambda_1^2 = \frac{l^2}{\delta} \quad \text{avec } \delta = 1 + K \frac{\Delta_{123}}{\Delta_{234}} + \frac{\Delta_{123}^2}{\Delta_{234}^2} \quad \text{et } K = -2\overrightarrow{v_1} \overrightarrow{v_4} \quad (14)$$

soit :

$$\lambda_2^2 = \frac{\Delta_{134}^2}{\Delta_{234}^2} \frac{l^2}{\delta}, \quad \lambda_3^2 = \frac{\Delta_{124}^2}{\Delta_{234}^2} \frac{l^2}{\delta}, \quad \lambda_4^2 = \frac{\Delta_{123}^2}{\Delta_{234}^2} \frac{l^2}{\delta} \quad (15)$$

Nous obtenons donc des expressions analytiques simples des  $\lambda_i$  dont nous déduisons immédiatement la position des points  $p_i$  dans l'espace à l'aide de (2).

## 4 Extension aux capteurs catadioptriques panoramiques

L'approche « P-N-P » a suscité beaucoup d'études mais a toujours été employée pour des capteurs plans. Il est cependant possible d'étendre le problème aux capteurs catadioptriques. Ces capteurs, combinaison d'un miroir et d'un capteur plan classique, permettent en particulier une vision panoramique à 360° (Figure 2). Le miroir est alors une surface de révolution projetant le cylindre de vue sur la caméra. Nous envisageons dans un premier temps le cas simple des miroirs à foyer de projection unique [7] puis nous verrons comment nous passer de cette contrainte.

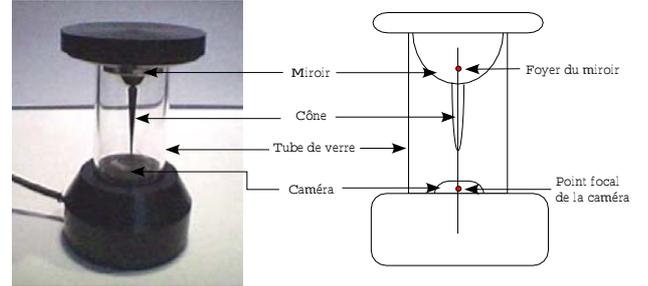


FIG. 2 – Structure d'un capteur catadioptrique panoramique.

### 4.1 Capteurs respectant la contrainte du foyer unique

Pour résoudre ce problème, nous utiliserons la formulation précédente ; nous notons  $p'_i$  la projection des points  $p_i$  sur le miroir et  $p''_i$  leur projection sur le plan image.  $F$  et  $F'$  désignent respectivement les foyers du miroir et de la caméra. Un point  $p''_i$  sur le plan image est rétro-projeté en un point  $p'_i$  sur le miroir, situé à l'intersection de la droite  $(F'p''_i)$  et du miroir [8]. De la même manière, le point  $p_i$  est porté par la droite  $(Fp'_i)$  (Figure 4). Nous pouvons donc utiliser la même formulation que précédemment mais cette fois-ci dans le repère miroir (centré sur  $F$ ) : les points images  $p''_i$  permettent d'évaluer la position des  $p'_i$  qui eux-mêmes permettent de déterminer les vecteurs directeurs  $\overrightarrow{v_i}$  de toutes les droites  $(Fp_i)$  :

$$\forall i \in \llbracket 1,N \rrbracket ; \quad \overrightarrow{v_i} = \frac{p'_i - F}{\|p'_i - F\|} \quad (16)$$

Nous pouvons exprimer les points  $p_i$  par :

$$p_i = F + \lambda_i \vec{v}_i \quad (17)$$

(ce qui se simplifie en plaçant  $F$  au centre du repère).

Nous avons ramené, comme précédemment, le problème de localisation des  $p_i$  à l'évaluation des  $\lambda_i$ .

La différence majeur réside dans le fait que les points  $p'_i$  ne sont plus coplanaires (Figure 3), ce qui ne change en rien nos calculs. Il est important de remarquer aussi que la distance estimée est la distance points dans l'espace-foyer du miroir (et non pas foyer de la caméra). La encore, cette différence est minime puisque la distance caméra-miroir est, dans le cas des capteurs respectant la contrainte du foyer unique, généralement connue mais peut-être aussi aisément estimée [9].

Nous pouvons donc suivre la démarche générale, exprimer les contraintes sur les  $p_i$  puis résoudre le système obtenu. L'expression des  $p_i$  étant identique au cas plan (équations 2 et 4), la solution sera, elle aussi, identique.

Ce cas étant réducteur, voyons maintenant comment généraliser cette approche.

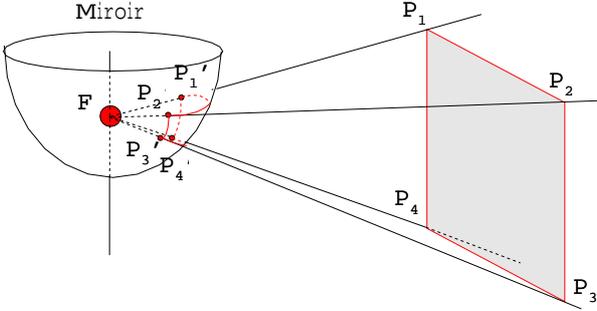


FIG. 3 – Projection des points  $p_i$  sur le miroir du capteur catadioptrique à foyer unique (Exemple avec 4 points). Les projetés ( $p'_i$ ) ne sont pas coplanaires.

## 4.2 Capteurs ne respectant pas la contrainte du foyer unique

La contrainte du foyer unique simplifie le calcul du rayon réfléchi sur le miroir. Peu de profils de miroirs respectent cette contraintes [7]. De plus, même si un miroir possède un foyer unique, il faut un placement idéal du foyer de la caméra face au miroir, ce qui est difficile à garantir. Si ce placement n'est pas respecté l'utilisation de cette simplification conduit à des calculs faux [9]. Il est donc souvent préférable de ne pas utiliser cette hypothèse simplificatrice. Sans foyer de projection unique, on ne peut plus calculer les vecteurs  $v_i$  comme précédemment (équation 16). Il faut calculer les vecteurs  $\vec{v}_i$  en utilisant la normale ( $\vec{N}$ ) au miroir (Figure 4) :

$$\vec{v}_i = \overrightarrow{p'_i p_i} - 2\vec{N}(\vec{N} \cdot \overrightarrow{p'_i p_i}) \quad (18)$$

Nous n'avons plus un point de convergence de toutes les directions de projection, l'équation 17 est inutilisable. La seule alternative est d'exprimer les  $p_i$  en fonction des  $p'_i$  :

$$p_i = p'_i + \lambda_i \vec{v}_i \quad (19)$$

Il reste à exprimer les contraintes sur les points de l'espace, à extraire analytiquement du système obtenu les  $\lambda_i$  pour en déduire les  $p_i$ . Cette fois la solution analytique sera plus lourde que pour les cas précédents. Cette technique a cependant l'avantage de pouvoir fonctionner avec de nombreux capteurs catadioptriques (et pas seulement les capteurs panoramiques). Remarquons au passage que s'il était possible d'adapter la formulation décrite par Fischler et Bolles au cas du foyer unique, l'absence d'unicité de convergence rend son utilisation impossible dans le cas général.

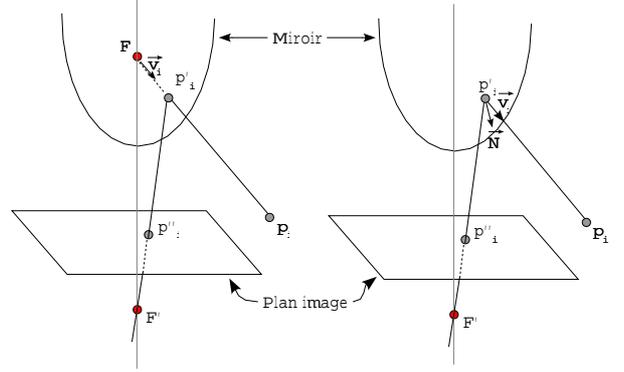


FIG. 4 – Projection des points  $p_i$  successivement sur le miroir (donnant les  $p'_i$ ) puis sur le plan image (donnant les  $p''_i$ ) - à gauche avec la simplification du foyer unique et à droite sans cette simplification).

Reprenons l'exemple de la section 3. Dans notre cas, l'expression de la contrainte côtés opposés parallèles et égaux 2 à 2 (équation 8) combinée avec l'équation 19 donne :

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} + \lambda_2 v_{x2} - (p'_{x1} + \lambda_1 v_{x1}) \\ \quad + p'_{x4} + \lambda_4 v_{x4} - (p'_{x3} + \lambda_3 v_{x3}) \\ p'_{y2} + \lambda_2 v_{y2} - (p'_{y1} + \lambda_1 v_{y1}) \\ \quad + p'_{y4} + \lambda_4 v_{y4} - (p'_{y3} + \lambda_3 v_{y3}) \\ p'_{z2} + \lambda_2 v_{z2} - (p'_{z1} + \lambda_1 v_{z1}) \\ \quad + p'_{z4} + \lambda_4 v_{z4} - (p'_{z3} + \lambda_3 v_{z3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Exprimons les  $\lambda$  en fonction de l'un d'entre eux ( $\lambda_1$ ). Posons pour cela posons :

$$d_{ijk} = \begin{vmatrix} v_{xi} & v_{xj} & p'_{xk} \\ v_{yi} & v_{yj} & p'_{yk} \\ v_{zi} & v_{zj} & p'_{zk} \end{vmatrix} \quad (21)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{d_{341} - d_{342} + d_{343} - d_{344} + \Delta_{134}\lambda_1}{\Delta_{234}} \\ \lambda_3 &= \frac{d_{241} - d_{242} + d_{243} - d_{244} + \Delta_{124}\lambda_1}{\Delta_{234}} \\ \lambda_4 &= \frac{d_{231} - d_{232} + d_{233} - d_{234} + \Delta_{123}\lambda_1}{\Delta_{234}} \end{aligned} \quad (22)$$

En introduisant la contrainte sur la longueur d'un coté :

$$\|\overrightarrow{p_1 p_4}\| = l \Leftrightarrow \|p'_4 + \lambda_4 \vec{v}_4 - (p'_1 + \lambda_1 \vec{v}_1)\| = l \quad (23)$$

$$\Rightarrow p_1'^2 + p_4'^2 + \lambda_1^2 + \lambda_4^2 - 2\lambda_1 \lambda_4 \vec{v}_1 \vec{v}_4 + 2Q(\lambda_1 \vec{v}_1 - \lambda_4 \vec{v}_4) - 2p_1' p_4' = l^2 \quad (24)$$

( avec  $Q = p_1' - p_4'$  et  $\|\vec{v}_i\| = 1$  )

En introduisant l'expression de  $\lambda_4$  (équation 22) dans l'expression 23, on obtient :

$$\lambda_1^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta_{123}}{\Delta_{234}}\right)^2 - 2\frac{\Delta_{123}}{\Delta_{234}} \vec{v}_1 \vec{v}_4\right) + \lambda_1 \left(2\frac{C\Delta_{123}}{\Delta_{234}^2} + 2Q\left(\vec{v}_1 - \frac{\Delta_{123}}{\Delta_{234}} \vec{v}_4\right) - 2\frac{C}{\Delta_{234}} \vec{v}_1 \vec{v}_4\right) - 2Q\frac{C}{\Delta_{234}} \vec{v}_4 + Q^2 + \left(\frac{C}{\Delta_{234}}\right)^2 - l^2 = 0 \quad (25)$$

avec

$$C = d_{231} - d_{232} + d_{233} - d_{234} \quad (26)$$

D'où il est possible de tirer une expression de  $\lambda_1$  et donc d'en déduire à l'aide de l'expression (22) une expression des autres  $\lambda$ .

## 5 Conclusion

La formulation présentée permet d'obtenir une solution analytique au problème de la détermination de la position 3D d'un objet connaissant un ensemble de points de référence de celui-ci. Cette solution est d'autant plus simple que des contraintes géométriques triviales peuvent être imposées à l'objet. Elle est ainsi particulièrement bien adaptée aux applications temps réel, et est utilisée pour déterminer la distance et l'orientation d'un objet muni de mires caractéristiques. De plus cette formulation est assez générique pour être utilisée dans le cas de capteurs catadioptriques notamment les systèmes de vision panoramiques.

## Références

- [1] R. L. Carceroni et C. M. Brown. *Numerical methods for model-based pose recovery*. Technical Report 659, U. of Rochester, Computer Science Dept., Août 1997.
- [2] Martin A. Fischler et Robert C. Bolles. *Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography*. Comm. ACM, (Vol. 24, No 6, juin 1981) 381-395.
- [3] Marc-André Ameller, Bill Triggs et Long Quan. *Camera Pose Revisited - New Linear Algorithms*. Rapport interne - INRIA - Equipe MOVI 2000.
- [4] Z. Y. Hu et F. C. Wu. *A Note on the Number of Solutions of the Noncoplanar P4P Problem*. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, (Vol. 24, No 3, mars 2002)
- [5] M. A. Abidi et T. Chandra. *A New Efficient and Direct Solution for Pose Estimation Using Quadrangular Targets: Algorithm and Evaluation*. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, (Vol. 17, No 5, mai 1995) 534-538.
- [6] Radu Horaud, Bernard Conio, Olivier Le Boulleux et Bernard Lacolle. *An Analytic Solution for the Perspective-4-Point Problem*. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, (Vol. 47, 1989) 33-44.
- [7] S. Baker et S. Nayar. *A theory of single-viewpoint catadioptric image formation*. International Journal of Computer Vision, (Vol. 35, No 2, Novembre 1999) 175-196.
- [8] Tomáš Svoboda. *Central Panoramic Cameras Design, Geometry, Egomotion*. PhD Thesis, Center for Machine Perception, Czech Technical University, Prague, Czech Republic, Septembre 1999.
- [9] J. Fabrizio, J. P. Tarel, R. Benosman. *Calibration of Panoramic Catadioptric Sensors Made Easier*. Proceedings of IEEE Workshop on Omnidirectional Vision (Omnivis'02) (juin 2002) 45-52