

Déconvolution multi-vues d'images décalées à faible rapport signal sur bruit

Audrey GIRÉMUS¹, Hervé CARFANTAN²

¹Laboratoire de Télécommunications Spatiales et Aéronautiques (Tésa)
2 rue Charles Camichel, 31071 Toulouse Cedex 7, BP 7122, France

²Laboratoire d'Astrophysique de l'Observatoire Midi-Pyrénées
14 avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France

Audrey.Giremus@tesa.prd.fr, Herve.Carfantan@obs-mip.fr

Résumé – Nous nous intéressons à la déconvolution d'une image à partir de plusieurs observations, décalées entre elles, d'un même objet (ici des galaxies), à très faible rapport signal à bruit (RSB). La déconvolution multi-vues consiste à restaurer l'objet à partir des différentes observations et nécessite la connaissance de ces décalages. Aussi, nous étudions dans un premier temps l'estimation de ces décalages par un estimateur empirique d'annulation du spectre, puis nous proposons leur estimation par maximum de vraisemblance (MV). Nous constatons que l'estimateur du MV est plus robuste à de faibles RSB. Enfin, nous montrons que l'estimation jointe des décalages et de l'image par maximum de vraisemblance généralisée est équivalente à l'estimation des décalages par MV suivie d'une déconvolution multi-vues à décalages connus.

Abstract – We focus on the problem of image deconvolution from several shifted observations of an object for very low signal to noise ratio (SNR). Multiframe deconvolution consists in recovering the object from its different observations and requires the knowledge of the shifts among images. Therefore, we first study the shifts estimation with an empirical spectrum annulling estimator and propose to use a maximum likelihood (ML) estimator. ML estimation appears to be more robust to low SNR. Then, we show that joint estimation of the shifts and the image, in the generalized maximum likelihood sense is equivalent to the ML estimation of the shifts followed by a multiframe deconvolution.

1 Introduction

En présence de turbulence atmosphérique, la résolution des grands télescopes devient équivalente à celle d'instruments de diamètre plus modeste. L'Optique Adaptative (OA) est une des techniques les plus efficaces pour pallier cette limitation. Elle consiste en une compensation en temps réel des défauts du front d'onde mesurés par un analyseur de surface d'onde (ASO). Bien que la correction appliquée soit partielle, les données acquises par l'ASO permettent d'évaluer avec une bonne précision la réponse impulsionnelle (RI) correspondant au flou résiduel. Des algorithmes classiques de déconvolution peuvent alors être mis en œuvre pour recouvrer l'image non déformée.

Cet article est dédié à la restauration d'images de galaxies lointaines acquises par le télescope CFHT (Télescope Franco-Canadien de Hawaï) par Optique Adaptative et dans l'infrarouge. Les observations sont réalisées à des fins d'étude morphologique des galaxies et une grande précision est requise pour ce type d'applications. En outre, la déconvolution est rendue difficile par un rapport signal sur bruit (RSB) très défavorable, typiquement de -10dB. En effet, si les grandes longueurs d'onde comme l'infrarouge sont moins affectées par la turbulence atmosphérique, les galaxies y sont peu brillantes. Le même objet est alors imagé à plusieurs reprises pour améliorer le RSB, mais les observations sont décalées aléatoirement pour s'affranchir de défauts inhérents au détecteur. Cette spécificité suppose de traiter deux problèmes de nature différente : estimer les décalages existant entre les poses et déconvoluer l'objet par une méthode multi-vues [MCMR97].

Nous proposons deux approches. Dans un premier temps, nous considérons les décalages connus pour nous intéresser à la déconvolution de l'image à partir des différentes vues et la comparons à l'approche classique dite de recombinaison des différentes vues recalées (*shift and add*) préalablement à la déconvolution. Puis, deux méthodes sont décrites pour l'estimation des dits décalages, l'une empirique et l'autre probabiliste (MV). Enfin, nous proposons d'effectuer conjointement l'estimation des décalages et la déconvolution de multi-vues par maximum de vraisemblance généralisée et établissons le lien avec l'estimation des décalages au sens du maximum de vraisemblance.

2 Modèle d'observation

Dans le domaine isoplanétique de l'OA, l'effet des aberrations non corrigées est correctement représenté pour chaque image observée y_n ($1 \leq n \leq N$) comme la convolution de l'objet inconnu x par une réponse impulsionnelle h_n . On suppose que les RI reconstruites à partir des sorties de l'ASO sont exactes. Pour simplifier la présentation on se placera dans le cadre unidimensionnel, la généralisation au cas des images étant immédiate. En notant τ_n le décalage par rapport à une image de référence ($\tau_1 = 0$) et b_n le bruit supposé additif, le modèle d'observation s'écrit :

$$y_n(t) = h_n * x(t - \tau_n) + b_n(t), \quad 1 \leq n \leq N.$$

Ces équations font intervenir plusieurs versions décalées de l'objet. Il est préférable de reporter les décalages aux RI (pro-

priété de la convolution) pour aboutir à un modèle adapté pour l'algorithme multi-vues :

$$\begin{aligned} y_n(t) &= h_{n,\tau_n} * x + b_n(t) \\ h_{n,\tau_n} &= h_n(t - \tau_n) \end{aligned}$$

En réalité, les images en sortie du télescope sont échantillonnées (par une matrice CCD). Pour traiter le problème, l'entrée est elle aussi discrétisée et le problème peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{y}_n = H_{n,\tau_n} \mathbf{x} + \mathbf{b}_n,$$

où les notations désignent les vecteurs formés par discrétisation des grandeurs précédentes.

3 Déconvolution à décalages connus

Comme la plupart des problèmes de déconvolution, ce problème inverse est mal posé et les matrices H_{n,τ_n} sont mal conditionnées. Classiquement [Idi01], il est régularisé en complétant le modèle par des informations *a priori* sur l'objet, par exemple sous la forme d'une loi de probabilité *a priori* $p(\mathbf{x})$. Ainsi, dans le contexte multi-vues, en tenant compte de l'indépendance des réalisations du bruit, l'estimé au sens du Maximum *a posteriori* (MAP) est défini par :

$$\mathbf{x}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \prod_{n=1}^N p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}) \times p(\mathbf{x})$$

La loi *a priori* dépend des propriétés de l'image à restaurer, or, les galaxies sont caractérisées par des variations douces d'intensité lumineuse ; aussi, une régularisation quadratique markovienne, qui pénalise les discontinuités entre pixels voisins, donne des résultats satisfaisants. En supposant le bruit gaussien centré, le problème d'estimation est résolu par minimisation du critère régularisé suivant :

$$\mathbf{x}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{y}_n - H_{n,\tau_n} \mathbf{x}\|^2 + \lambda \|D\mathbf{x}\|^2,$$

où λ est le paramètre de régularisation permettant de régler le compromis entre fidélité aux données et informations *a priori* (en pratique, il est ajusté ici grâce à la méthode de la *courbe en L* [Han92]). La matrice D correspond à l'opérateur des différences pour un voisinage d'ordre 1. Le critère à minimiser étant quadratique, on dispose d'une formule analytique pour la solution, à savoir :

$$\mathbf{x}_{\text{MAP}} = \left(\sum_{n=1}^N H_{n,\tau_n}^\dagger H_{n,\tau_n} + \lambda D^\dagger D \right)^{-1} \sum_{n=1}^N H_{n,\tau_n}^\dagger \mathbf{y}_n. \quad (1)$$

Si les effets de bord (pour la convolution et l'opérateur des différences) sont résolus en supposant l'image périodique, les opérateurs deviennent diagonalisables dans la base de Fourier et les calculs peuvent alors être réalisés pixel à pixel (les décalages des RI se faisant par multiplication par une rampe de phase dans la base de Fourier). Il est intéressant de constater que dans la relation (1) l'expression $H_{n,\tau_n}^\dagger H_{n,\tau_n}$ ne dépend pas en fait du décalage τ_n (ce qui se remarque aisément dans le domaine de Fourier car cela revient au module au carré de la réponse en fréquence, le décalage intervenant dans la phase

uniquement). Nous la noterons donc simplement par la suite $H_n^\dagger H_n$.

Une méthode classique utilisée par les astronomes, appelée *shift and add* (S&A), consiste à recombinaison les différentes images \mathbf{y}_n afin d'obtenir une image \mathbf{z} de rapport signal sur bruit plus élevé. Pour cela, il faut prendre en compte le décalage τ_n pour recentrer les images \mathbf{y}_n par interpolation (en général, une simple interpolation bilinéaire est utilisée). La déconvolution peut alors se faire par la méthode classique précédente, mais cette fois-ci pour une seule image \mathbf{z} , à condition que les images aient été acquises pour la même réponse impulsionnelle $h_n = h, \forall n = 1 \dots N$, ce qui n'est pas toujours le cas en optique adaptative. Dans ce cas, la formule de reconstruction devient :

$$\mathbf{x}_{\text{S\&A}} = \left(H^\dagger H + \lambda D^\dagger D \right)^{-1} H^\dagger \mathbf{z}. \quad (2)$$

On peut alors remarquer que la seule différence entre ces deux méthodes (à un facteur N pour λ près) provient des différentes techniques de décalages utilisées. Dans la relation (1) le décalage est effectué dans le domaine de Fourier par multiplication par une rampe de phase (de façon équivalente sur les données \mathbf{y} ou sur la réponse impulsionnelle h_n), alors que dans la relation (2) le décalage est effectué généralement par interpolation bilinéaire pour chaque observation \mathbf{y}_n . Bien entendu, l'équivalence entre ces méthodes n'est plus valable si les réponses impulsionnelles sont différentes pour chaque observation.

Dans les simulations présentées Fig. 1, les différentes observations ont été générées à partir de la même réponse impulsionnelle et l'algorithme *shift and add* offre des performances comparables au multi-vues, comportement prévisible au vu des remarques précédentes.

4 Estimation des décalages

La restauration de l'image présentée ci-dessus suppose connus les décalages entre les différentes prises de vue ce qui n'est pas le cas en pratique. Une approche raisonnable consiste à estimer ces décalages avant de procéder à la déconvolution multi-vues. Ces décalages ne correspondent pas nécessairement à un multiple de la période d'échantillonnage, et étant donné l'importance du bruit, il n'est pas immédiat de les estimer.

4.1 Approche empirique

Différents estimateurs empiriques de ces décalages peuvent être utilisés [CB01]. Nous nous intéresserons uniquement ici aux méthodes fréquentielles car elles permettent de prendre en compte les différences de RI entre les observations.

L'intercorrélation entre l'image de référence x et sa version décalée x_n s'exprime en fonction de l'autocorrélation de x :

$$C_{x,x_n}(t) = C_x(t - \tau_n), \quad (3)$$

soit dans le domaine spectral :

$$\Gamma_x(\nu) = \Gamma_{x,x_n}(\nu) e^{2i\pi(\nu\tau_n)} \quad (4)$$

en notant $\Gamma_x(\nu)$ et $\Gamma_{x,x_n}(\nu)$ les densités spectrale et inter-spectrale de puissance. La première équation (3) n'est plus valable pour des images échantillonnées si τ_n n'est pas égal à un nombre

4.2 Maximum de vraisemblance

Le processus d'observation liant l'objet inconnu aux images acquises dépend d'un vecteur de paramètres regroupant les décalages $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_N)$. En l'absence d'informations *a priori* sur leur valeur, nous souhaitons estimer ce vecteur de paramètres au sens du maximum de vraisemblance, soit :

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{MV}} = \arg \max_{\boldsymbol{\tau}} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\tau}).$$

Dans un cadre général, il n'est pas possible d'obtenir une expression explicite de la vraisemblance $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\tau})$. Mais en prenant en compte le modèle probabiliste utilisé pour la déconvolution multi-vues de l'image §3 on peut exprimer la vraisemblance conjointe $p(\mathbf{y}, \mathbf{x}|\boldsymbol{\tau})$ et l'intégrer par rapport à l'objet \mathbf{x} :

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\tau}) = \int p(\mathbf{y}, \mathbf{x}|\boldsymbol{\tau}) d\mathbf{x} = \int p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5)$$

Dans le cas général, cette intégrale n'est pas simple à calculer, mais dans notre cas particulier où le bruit est additif gaussien et la loi *a priori* sur l'objet est également gaussienne, les calculs peuvent être menés aisément.

En effet, le terme sous l'intégrale de la relation (5) vaut, à une constante multiplicative près (indépendante de $\boldsymbol{\tau}$ et de \mathbf{x}) :

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{x}|\boldsymbol{\tau}) \propto \exp \left(- \sum_{n=1}^N \frac{\|\mathbf{y}_n - H_{n, \tau_n} \mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2} + \lambda \frac{\mathbf{x}^t D^t D \mathbf{x}}{2\sigma^2} \right).$$

En regroupant tous les termes dépendant de \mathbf{x} , on fait apparaître une loi normale $\mathcal{N}(\mathbf{m}_x(\boldsymbol{\tau}), R_x)$ pour \mathbf{x} , avec

$$R_x = \left(\sum_{n=1}^N \frac{H_n^t H_n}{\sigma^2} + \lambda \frac{D^t D}{\sigma^2} \right)^{-1} \quad (6)$$

$$\mathbf{m}_x(\boldsymbol{\tau}) = R_x \sum_{n=1}^N \frac{H_{n, \tau_n}^t \mathbf{y}_n}{\sigma^2}, \quad (7)$$

dont l'intégrale vaudra donc 1. Le terme restant nous donne donc la vraisemblance à une constante indépendante de $\boldsymbol{\tau}$ près :

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\tau}) \propto \exp \left(- \frac{\mathbf{m}_x^t(\boldsymbol{\tau}) R_x^{-1} \mathbf{m}_x(\boldsymbol{\tau})}{2} \right).$$

L'estimateur du vecteur des décalages au sens du maximum de vraisemblance peut alors se calculer comme :

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{MV}} = \arg \max_{\boldsymbol{\tau}} (\mathbf{m}_x^t(\boldsymbol{\tau}) R_x^{-1} \mathbf{m}_x(\boldsymbol{\tau})) \quad (8)$$

Notons que ce critère prend en compte simultanément l'ensemble des observations pour calculer le vecteur des décalages, alors que les méthodes empiriques précédentes ne visaient qu'à estimer le décalage entre deux images.

4.3 Résultats de simulation

Afin de comparer les deux méthodes d'estimation des décalages, nous avons simulé deux séries d'images décalées, floues et bruitées, du même objet. La première série est obtenue avec la même réponse instrumentale pour chaque observation (une figure de diffraction de Airy) tandis que pour la seconde, chaque image est générée avec une réponse impulsionnelle différente (figures de Airy irrégulièrement déformées). Les décalages appliqués ne correspondent pas à un nombre entier de pixels et leur partie fractionnaire en ligne et en colonne est différente

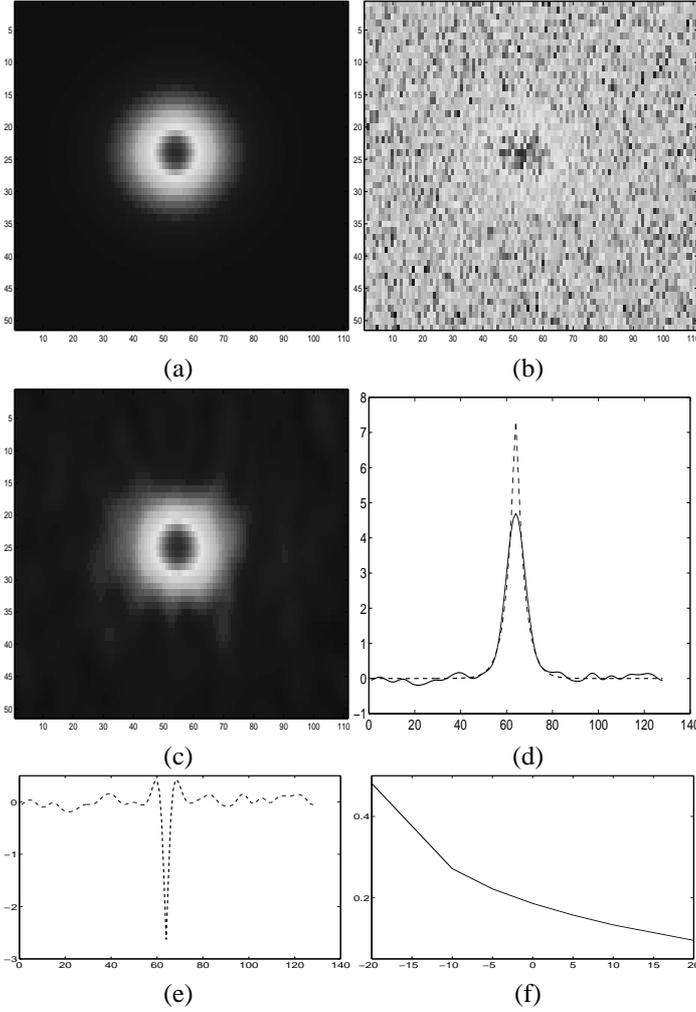


FIG. 1 – Restauration de la galaxie (méthode multi-vues) : (a) Image originelle, (b) Galaxie convoluée et bruitée (RSB=-10 dB), (c) Image restaurée, (d) Restauration de la ligne centrale, (e) Erreur sur cette ligne, (f) Erreur quadratique relative de restauration pour différents RSB

entier de pixels, alors que la seconde (4) peut encore être exploitée. Dans le cas où la réponse impulsionnelle est supposée identique pour toutes les prises de vue, l'équation (4), qui dépend des inconnues, peut être transposée directement aux données $(y_n)_{1 \leq n \leq N}$:

$$\Gamma_y(\nu) = \Gamma_{y, y_n}(\nu) e^{2i\pi\nu\tau_n}$$

Le décalage τ_n peut alors être déterminé en minimisant le critère suivant d'annulation du spectre :

$$J(\tau_n) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_y(\nu) - \Gamma_{y, y_n}(\nu) e^{2i\pi\nu\tau_n}|^2 d\nu.$$

La prise en compte des différentes RI amènent à modifier légèrement ce critère :

$$J(\tau_n) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}_n(\nu)^* \Gamma_y(\nu) - \hat{h}(\nu)^* \Gamma_{y, y_n}(\nu) e^{2i\pi\nu\tau_n}|^2 d\nu,$$

\hat{h} et \hat{h}_n représentant respectivement les réponses fréquentielles correspondant à l'image de référence et à l'image décalée. La méthode proposée présente des résultats satisfaisants, mais elle repose sur des approximations dont il serait intéressant de s'affranchir. Ainsi, les densités spectrale et inter-spectrale de puissance sont inconnues et sont remplacées en pratique par leur estimateur biaisé : le périodogramme.

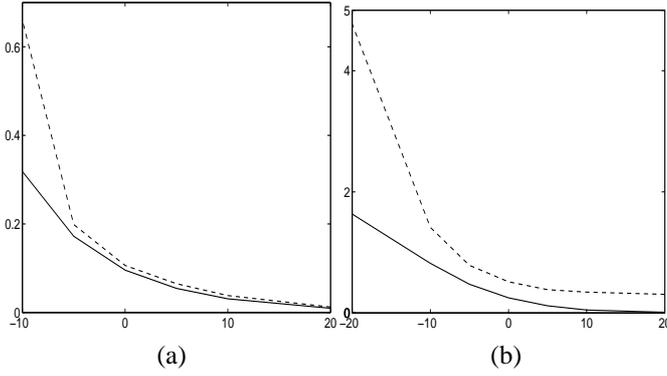


FIG. 2 – Erreur d'estimation des décalages pour différents RSB par maximum de vraisemblance (trait plein) ou par annulation de spectre (pointillés): (a) RI identiques, (b) RI différentes

pour chaque image. L'erreur d'estimation (racine carrée de l'erreur quadratique moyenne sur l'ensemble des décalages) est alors calculée pour différents rapports signal à bruit et représentée Fig. 2. Bien sûr, les performances des deux méthodes se dégradent à mesure que le RSB diminue, mais on peut constater que l'estimation par maximum de vraisemblance apparaît plus robuste dans un contexte fortement bruité. De plus, pour un RSB de -20 dB, l'estimateur empirique par annulation de spectre présente une erreur de l'ordre de 30 pixels alors que l'estimateur du maximum de vraisemblance conserve une erreur de l'ordre du pixel. Les résultats sont moins précis pour des RI différentes et plus chahutées, mais le maximum de vraisemblance semble encore moins sensible au problème des RI différentes et se comporte mieux que l'estimateur empirique à des RSB faibles.

5 Estimation conjointe

Dans la partie précédente, nous avons estimé les décalages existant entre les images afin de les utiliser lors de la déconvolution. De plus, pour l'estimateur des décalages au sens du maximum de vraisemblance, nous avons tiré partie de l'*a priori* gaussien introduit pour l'étape de déconvolution. Une alternative à ce traitement en deux étapes (estimation des décalages/déconvolution) est d'estimer conjointement l'objet \mathbf{x} et les décalages $\boldsymbol{\tau}$. L'estimateur du Maximum de Vraisemblance Généralisé (MVG) apparaît alors naturellement à l'esprit, qui définit les estimés comme :

$$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})_{\text{MVG}} = \arg \max_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}} p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\tau})$$

Le calcul de cet estimateur joint profite bien souvent d'une mise en œuvre itérative où le critère est minimisé vis-à-vis de chacun des paramètres \mathbf{x} ou $\boldsymbol{\tau}$ en supposant l'autre connu ; soit en calculant à la $k^{\text{ième}}$ itération :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \boldsymbol{\tau}_{k-1}), \\ \boldsymbol{\tau}_k &= \arg \max_{\boldsymbol{\tau}} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y} | \boldsymbol{\tau}). \end{aligned}$$

Remarquons qu'à chaque itération le calcul de \mathbf{x}_k coïncide exactement avec l'estimateur du MAP de \mathbf{x} , pour des décalages connus $\boldsymbol{\tau}_{k-1}$. Le calcul de $\boldsymbol{\tau}_k$ quand à lui correspondrait à une estimation des décalages au sens du maximum de vraisemblance si les données rassemblaient à la fois les observations \mathbf{y}_n et l'image à restaurer \mathbf{x} (ici remplacée par \mathbf{x}_k).

Pour les lois de probabilité adoptées dans notre modèle, un tel schéma de mise en œuvre du MVG devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \left(\sum_{n=1}^N H_n^t H_n + \lambda D^t D \right)^{-1} \sum_{n=1}^N H_{n, \tau_{n, k-1}}^t \mathbf{y}_n, \\ \boldsymbol{\tau}_k &= \arg \max_{\boldsymbol{\tau}} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_k^t H_{n, \tau_n}^t \mathbf{y}_n, \end{aligned}$$

la minimisation vis-à-vis de $\boldsymbol{\tau}_k$ étant effectuée par gradient conjugué.

Lorsque l'algorithme converge ($\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{x}_k$) on peut remarquer que $\boldsymbol{\tau}$ vérifie l'équation (8) et l'estimé de $\boldsymbol{\tau}$ au sens du MVG correspond exactement à son estimé au sens du MV. L'estimation jointe des décalages $\boldsymbol{\tau}$ et de l'objet \mathbf{x} au sens du MVG est alors strictement équivalente à l'estimation au sens du MV des décalages présentée §4.2, suivie de la déconvolution à décalages connus vue §3.

6 Conclusion

Nous avons proposé d'estimer les décalages existants entre plusieurs prises de vue d'un même objet, pour des réponses impulsionnelles identiques ou différentes, au sens du maximum de vraisemblance, moyennant la prise en compte d'un modèle de Gauss-Markov sur l'objet observé. Dans le cas d'observations fortement bruitées (RSB négatif), l'apport de cet estimateur des décalages au sens du MV par rapport à des estimateurs empiriques de type annulation de spectre est important.

Nous avons montré que la déconvolution multi-vues d'images décalées en deux étapes (estimation des décalages par maximum de vraisemblance puis déconvolution à décalages connus) était équivalente à l'estimation jointe, au sens du maximum de vraisemblance généralisée, des décalages et de l'objet à restaurer. A titre d'exemple, la Fig. 3 montre la ligne centrale de l'image restaurée de cette façon pour un RSB de -10dB et les mêmes décalages que dans la partie précédente, l'image en elle même est très ressemblante à celle de la Fig. 1(c).

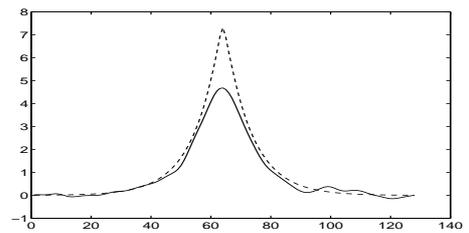


FIG. 3 – Ligne centrale de l'image restaurée par MVG

Références

- [CB01] H. Carfantan and B. Rougé. Estimation non biaisée de décalages subpixelaires sur des images SPOT. *18ème GRETSI*, pages 849–852, sept. 2001.
- [Han92] P. Hansen. Analysis of ill-posed problems by mean of the L-curve. *SIAM review*, pages 561–580, 1992.
- [Idi01] J. Idier, editor. *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Traités IC2, Hermès, 2001.
- [MCMR97] L. M. Mugnier, J.-M. Conan, V. Michau, and G. Rousset. Imagerie à travers la turbulence par déconvolution myope multi-trame. *16ème GRETSI*, pages 567–570, sept. 1997.