

# Estimation aveugle du débit symbole de modulations CPM

Pascal BIANCHI<sup>1</sup>, Philippe LOUBATON<sup>1</sup>, François SIRVEN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Équipe Signal pour les Communications,  
Institut Gaspard Monge et Laboratoire Traitement et Communication de l'Information  
UMR 5141 CNRS/ENST  
5, boulevard Descartes, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

<sup>2</sup>Thalès Communications,  
66, rue du Fossé Blanc  
92230 Gennevilliers, France

{bianchi,loubaton}@univ-mlv.fr  
francois.sirven@fr.thalesgroup.com

**Résumé** – Les estimateurs classiques de la période symbole de signaux de communications numériques sont fondés sur la détection de fréquences cycliques et peuvent présenter des performances insuffisantes lorsque l'excès de bande du signal modulé est faible. Dans cet article, nous montrons qu'une solution alternative initialement proposée dans le cas de modulations linéaires, peut être adaptée au cas de modulations CPM (Continuous Phase Modulations). La procédure d'estimation ici proposée repose sur une caractérisation explicite des filtres numériques qui, lorsqu'ils sont excités par un signal CPM filtré passe-bas, produisent un signal de module constant : de tels filtres n'existent en effet que si la période d'échantillonnage du signal échantillonné est égale à la période symbole  $T_s$ .

**Abstract** – Classical estimators of the symbol rate of communication signals are based on the detection of cyclic frequencies. These estimators may have a poor performance when the received signal has a slight excess bandwidth. In this paper, we show that a different kind of estimator which has been recently proposed in case of linear modulations, can be adapted to the case of Continuous Phase Modulated (CPM) signals. This estimation method is based on the characterization of the set of digital filters that provide a constant modulus signals when the input is a (low-pass) filtered CPM signal : such filters exist only if the sample rate of the received signal coincides with the symbol rate.

## 1 Position du problème

Les modulations à phase continue (Continuous Phase Modulations, CPM) sont particulièrement intéressantes du fait de leur grande efficacité spectrale et de leur propriété de module constant. Elles sont notamment utilisées dans le système de communications mobiles GSM, dans le système de communications mobiles Tetrapol, ainsi que dans de nombreux systèmes de communications militaires.

Nous supposons qu'un signal produit par un émetteur inconnu utilisant une modulation non-linéaire de type CPM a été détecté et ramené en bande de base par rapport à la fréquence d'accord du récepteur. Les paramètres techniques de la modulation (période symbole, indice de modulation, résidu de fréquence porteuse, filtre de mise en forme) sont inconnus, et le signal transmis par l'émetteur est de surcroît perturbé par un canal de propagation à trajets multiples inconnu. Le contexte général dans lequel s'inscrit la présente communication est celui de l'écoute passive. Il s'agit, à partir du signal reçu échantillonné, de mettre en évidence des algorithmes permettant d'estimer les paramètres inconnus, et d'extraire les symboles transmis par l'émetteur. Dans cet article, nous abordons uniquement l'estimation aveugle de la période symbole.

Habituellement, l'estimation aveugle de la période sym-

bole  $T_s$  est effectuée en exploitant la propriété de cyclostationnarité des signaux de communications numériques : ces méthodes classiques, souvent appelées méthodes cycliques, reposent en effet sur l'observation que la plus petite fréquence cyclique du signal reçu correspond à la vitesse de modulation  $\frac{1}{T_s}$ . La détection des fréquences cycliques fournit donc une estimée de la période symbole. Toutefois, lorsque l'excès de bande du signal observé est faible, la probabilité de fausse détection de la fréquence cyclique  $\frac{1}{T_s}$  augmente : les performances des méthodes cycliques peuvent alors être peu convaincantes.

Dans le cas où le signal observé est modulé linéairement, une approche alternative fondée sur l'optimisation de fonctions de contraste et permettant de palier à ce problème a récemment été proposée dans [3]. Notre objectif consiste à montrer que cette méthode, initialement proposée pour des modulations linéaires, peut être adaptée au cas de modulations non-linéaires de type CPM.

## 2 Modèle de signaux.

Dans la suite, nous désignons par  $x_a(t)$  le signal à temps continu (en réalité son enveloppe complexe) transmis par l'émetteur. Ce signal résulte d'une modulation non linéaire de type CPM, de sorte qu'il peut s'écrire sous la forme

$x_a(t) = e^{i\psi_a(t)}$  où la phase  $\psi_a(t)$  est donnée par

$$\psi_a(t) = \pi h \int_{-\infty}^t \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_a(u - nT_s) du \quad (1)$$

$$= \pi h \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi_a(t - nT_s). \quad (2)$$

$\phi_a(t)$  désigne ici la fonction  $\phi_a(t) = \int_{-\infty}^t g_a(u) du$ . Dans l'équation (1), la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  représente la suite des symboles transmis. Elle est supposée binaire ( $a_n = \pm 1$  pour tout  $n$ ) et identiquement distribuée. La fonction  $g_a(t)$  est appelée filtre de mise en forme. Elle vérifie  $g_a(t) = 0$  si  $t < 0$  et si  $t > LT_s$ , et

$$\int_0^{LT_s} g_a(t) dt = 1 \quad (3)$$

Dans ces conditions, la fonction  $\phi_a(t) = \int_{-\infty}^t g_a(u) du$  est nulle pour  $t < 0$ , et vaut 1 si  $t > LT_s$ . Le paramètre  $h$  est appelé l'indice de la modulation, et se caractérise par le fait que la variation de la phase  $\psi_a(t)$  occasionnée par un symbole  $a_n$  est égale à  $\pi h a_n$ . Enfin,  $T_s$  est la période symbole.

### Hypothèse :

Les résultats qui suivent reposent sur une caractérisation des filtres numériques qui, lorsqu'ils sont excités par un signal CPM, produisent un signal de module constant. A l'heure actuelle, cette caractérisation a été effectuée dans [5] dans le cas de signaux CPM à réponse complète, c'est-à-dire lorsque le paramètre  $L$  est égal à 1. Par conséquent, **nous supposons à partir de maintenant que  $L = 1$** . Toutefois, il est raisonnable de conjecturer que les résultats présentés ci-après restent valides dans le cas de signaux CPM à réponse partielle, soit lorsque  $L > 1$ . Une partie des résultats de simulation fournis à la fin de ce résumé concernent d'ailleurs le cas  $L > 1$ . Notons que la procédure d'estimation proposée ici sera pleinement justifiée dans le cas général dès lors que les résultats de [5] auront pu être étendus au cas de signaux CPM à réponse partielle.

Le cas  $L = 1$  est particulièrement simple car le signal  $x_a(t)$  se réduit à un signal modulé linéairement par la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  définie par

$$x_n = \exp i\pi h \left( \sum_{k=-\infty}^{n-1} a_k \right). \quad (4)$$

Il est facile de se convaincre que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite centrée autorégressive d'ordre 1, qui satisfait l'équation  $x_{n+1} = \exp(i\pi h a_n) x_n$ , et qui vérifie bien entendu  $|x_n| = 1$  pour tout  $n$ . En utilisant les résultats de l'article [1], on obtient alors immédiatement que

$$x_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{n+1} c_a(t - nT_s), \quad (5)$$

où  $c_a(t)$  est une fonction de support  $[0, 2T_s]$  que l'on peut exprimer en fonction de  $\phi_a(t)$  de la manière suivante :

$$c_a(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi h \phi_a(t)}{\sin \pi h} & \text{si } 0 \leq t \leq T_s, \\ \frac{\sin \pi h (1 - \phi_a(t - T_s))}{\sin \pi h} & \text{si } T_s \leq t \leq 2T_s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

Le signal transmis est distordu par un éventuel filtre d'émission destiné à limiter la bande de  $x_a(t)$  (en théorie infinie), par un canal de propagation inconnu, ainsi que par le filtre de réception du récepteur. Nous supposons pour simplifier que la fréquence porteuse de l'émetteur est connue du récepteur et donc que le signal reçu a pu être ramené en bande de base. En négligeant l'effet du bruit additif, l'enveloppe complexe  $y_a(t)$  du signal reçu peut donc se mettre sous la forme :

$$y_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{n+1} h_a(t - nT_s) \quad (7)$$

où  $h_a(t)$  résulte de la convolution entre  $c_a(t)$ , le filtre d'émission destiné à limiter la bande passante du signal transmis, le canal de propagation, et le filtre de réception.

### Remarque :

A ce stade, il est important de remarquer que le signal  $y_a(t)$  est à bande limitée en raison de la présence d'un filtre passe-bas en émission et/ou en réception. Nous supposons dans la suite que ce filtre est tel que la bande passante unilatérale de  $y_a(t)$  soit inférieure à  $\frac{2}{T_s}$  (excès de bande inférieur à 100 pour cent).

## 3 L'estimation aveugle de $T_s$ .

L'estimation de  $T_s$  est couramment effectuée par le biais de méthodes basées sur la cyclostationnarité du signal  $y_a(t)$ . Ces méthodes, dites cycliques, reposent sur le fait que  $\frac{1}{T_s}$  coïncide avec la plus petite fréquence cyclique strictement positive de  $y_a(t)$ . Cependant, lorsque la bande passante de  $y_a(t)$  est à peine supérieure à  $\frac{1}{T_s}$ , le signal  $y_a(t)$  est numériquement proche d'un signal stationnaire, et cette approche est bien connue pour donner alors des résultats médiocres. Ceci se produit notamment lorsqu'un filtre passe-bas d'émission est utilisé afin d'améliorer l'efficacité spectrale (hypothèse souvent réalisée dans la pratique), ou lorsque la fréquence de coupure du filtre de réception est proche de  $\frac{1}{2T_s}$ .

La nouvelle approche que nous présentons maintenant est une adaptation au contexte des modulations CPM d'une technique développée dans [3] (voir [4] pour la version courte de [3]) dans le cas des modulations linéaires.

### 3.1 Résultat fondamental

La généralisation de l'approche de [3] au contexte des CPM repose sur le résultat suivant.

**Théorème 1** *Supposons que la bande passante du signal  $y_a(t)$  soit inférieure à  $\frac{2}{T_s}$  (excès de bande inférieur à 100 pour cent). Supposons également que la transformée de Fourier  $H_a(f)$  de  $h_a(t)$  ne s'annule pas dans l'intervalle de fréquence  $[-\frac{1}{2T_s}, \frac{1}{2T_s}]$ . Soit  $T_e$  une période à laquelle le signal reçu  $y_a(t)$  est échantillonné, et soit  $g(z)$  la fonction de transfert d'un filtre numérique fonctionnant à la cadence  $T_e$ . On note  $z_{T_e}(n)$  la sortie du filtre  $g(z)$  excité par le signal échantillonné  $y_a(nT_e)$ . Alors la fonction de*

coût  $\zeta(T_e)$ , définie par

$$\zeta(T_e) = \inf_{g(z)} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (|z_{T_e}(n)|^2 - 1)^2 \right) \quad (8)$$

vérifie les deux conditions suivantes :

- $\forall T_e, \zeta(T_e) \geq 0$ ,
- $\zeta(T_e) = 0 \Leftrightarrow T_e = T_s$ .

#### Remarques :

- Notons d'abord que  $\zeta(T_e)$  est nul si et seulement si il existe un filtre numérique  $g(z)$  tel que le signal de sortie  $z_{T_e}(n)$  soit de module constant égal à un. Le théorème précédent signifie donc que si l'excès de bande du signal reçu est inférieur à 100 pour cent, et que l'on échantillonne le signal reçu à une cadence  $T_e$  différente de  $T_s$ , alors on ne peut pas trouver de filtre égaliseur  $g(z)$  fonctionnant à la cadence  $T_e$  qui, excité par  $y_a(nT_e)$ , fournisse un signal de module constant égal à un. Inversement, un tel filtre existe si  $T_e = T_s$ .

- Bien entendu, l'hypothèse la plus fondamentale est le caractère bande limitée de  $y_a(t)$  qui est incompatible avec la propriété de module constant en sortie d'égaliseur dès que  $T_e \neq T_s$ . Dans le cas de signaux CPM non-filtrés à l'émission, un filtrage passe-bas de réception semble donc essentiel afin de limiter autant que possible l'excès de bande du signal reçu. Quand  $T_e \neq T_s$ , on peut en effet conjecturer que plus l'excès de bande du signal reçu est rendu faible, plus la fonction de coût  $\zeta(T_e)$  est grande, ce qui favorise évidemment la détection de  $T_s$ .

- Bien qu'à bande illimitée, certains types de signaux CPM n'ont qu'un très faible excès de bande (autrement dit, leur densité spectrale est non-nulle mais néanmoins proche de zéro pour des fréquences supérieures à  $\frac{1}{2T_s}$ ) : ce cas se produit par exemple lorsque  $L$  est grand. Malgré les éventuels filtrages d'émission et de réception, on peut intuitivement s'attendre à l'existence de filtres égaliseurs  $g(z)$  tels que  $z_{T_e}(n)$  est de module quasi-constant, indépendamment de la période d'échantillonnage  $T_e$  utilisée. La caractérisation de  $T_s$  proposée n'est donc pertinente que lorsque la bande passante de  $y_a(t)$  est significativement plus faible que celle de  $x_a(t)$ .

### 3.2 Procédure d'estimation

Afin d'estimer  $T_s$  grâce au théorème 1, nous proposons d'échantillonner le signal  $y_a(t)$  à une fréquence initiale  $T_i$ , puis de générer par interpolation le signal  $y_a(nT_e)$  pour chaque valeur de  $T_e$  appartenant à une grille discrète de points bien choisie. Pour chaque  $T_e$ , un CMA (Constant Modulus Algorithm) permet de construire un égaliseur  $g(z)$  fonctionnant à la cadence  $T_e$  et qui minimise le critère du module constant introduit par Godard dans [2]. La valeur minimale du critère est égale à  $\zeta(T_e)$ . La figure 1 illustre le procédé ci-dessus. On obtient alors un estimateur initial de la période symbole en cherchant le point  $\hat{T}_s$  de la grille pour lequel  $\zeta(T_e)$  est minimum. L'inconvénient majeur de cette approche est évidemment sa complexité : elle nécessite en effet de mettre en œuvre un égaliseur en tout point de la grille, alors que les méthodes

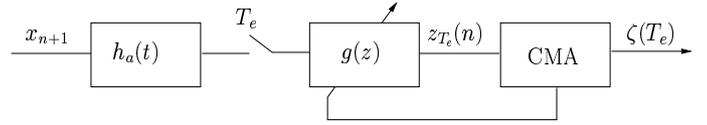


FIG. 1 – Génération de la fonction de coût  $\zeta(T_e)$

cycliques sont quant à elles beaucoup moins complexes. Cependant, une application telle que l'écoute passive n'induit pas nécessairement de contrainte de temps réel, et n'est donc pas incompatible avec l'utilisation de la méthode proposée.

### 3.3 Complémentarité de la méthode proposée et des méthodes cycliques

La fonction de coût  $\zeta(T_e)$  ne se prête pas à une optimisation par algorithme du gradient. Si la densité de la grille n'est pas suffisante pour produire un estimateur de variance suffisamment faible, il est donc nécessaire de répéter la procédure d'optimisation de  $\zeta(T_e)$  sur une grille plus étroite et centrée sur la première estimée de  $T_s$ .

En revanche, les méthodes cycliques permettent de mettre en œuvre un algorithme du gradient. Toutefois, elles sont basées sur la minimisation d'une fonction de coût souffrant de nombreux maxima locaux et nécessitent donc d'utiliser, comme dans la méthode proposée, une recherche exhaustive sur une grille afin de mettre en évidence une estimée initiale de  $T_s$ . Lorsque l'estimée initiale ainsi obtenue ne coïncide pas avec le point de la grille le plus proche de  $T_s$  (on parle alors de fausse détection), l'algorithme du gradient peut être mis en échec.

Par conséquent, une procédure globale d'estimation de la période symbole consiste à effectuer dans un premier temps une recherche exhaustive en utilisant celle des deux méthodes mentionnées qui fournit le plus faible pourcentage de fausses détections, puis, dans un deuxième temps, d'initialiser un algorithme du gradient basé sur les méthodes cycliques. Il reste donc à déterminer par simulation le pourcentage de fausses détections correspondant à chacune des méthodes.

## 4 Simulations

Les tableaux suivants indiquent le pourcentage de fausses détections sur la période symbole, pour chacune des méthodes testées. Les résultats obtenus font intervenir des signaux 1REC (i.e. le filtre de mise en forme  $g_a(t)$  est donné par  $g_a(t) = \frac{1}{T_s}$  sur  $[0, T_s[$  et  $g_a(t) = 0$  sinon) ou des signaux 3RC (i.e. le filtre de mise en forme est donné par  $g_a(t) = \frac{1}{LT_s}(1 - \cos \frac{2\pi t}{LT_s})\mathbf{1}_{0 \leq t \leq LT_s}$  avec  $L = 3$ ). Le signal est observé sur un intervalle de temps correspondant à la transmission de 1000 symboles. L'indice de modulation est égal à  $h = 0.7$ . On suppose de plus qu'un bruit gaussien de densité spectrale de puissance égale à  $N_0$  dans la bande  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$  s'ajoute au signal  $y_a(t)$ . On note  $E_b$  l'énergie du signal par bit.

En ce qui concerne la méthode ici proposée, nous utilisons un filtre égaliseur à 20 coefficients. 100 itérations de CMA sont utilisées pour en adapter les coefficients.

Nous supposons que la bande du signal reçu a été approximativement détectée et qu'un filtrage passe-bas de réception dont la fréquence de coupure  $F_R$  correspond à cette bande est effectué. Dans les simulations suivantes,  $F_R = 0.6/T_s$ . En outre, lorsque  $T_e > 1/2F_R$ , nous imposons avant échantillonnage à  $T_e$  un filtrage dans la bande  $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$ . En ce qui concerne la méthode cyclique, nous nous contentons d'un filtrage de réception dans la bande  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$ . La méthode cyclique utilisée ici consiste à détecter la première raie de l'autocorrélation cyclique de la fréquence instantanée du signal reçu  $y_a(t)$ . Ce choix se justifie par le fait que la fréquence instantanée possède toujours  $1/T_s$  comme plus petite fréquence cyclique positive et que sa bande passante est en général plus grande que celle du signal modulé.

$E_b/N_0$	Meth. proposée	Meth. Cyclique
20dB	2	1.5
15dB	2	2.5
10dB	3	4

(a) Modulation 1REC

$E_b/N_0$	Meth. proposée	Meth. Cyclique
20dB	13	29
15dB	13	47
10dB	20	72

(b) Modulation 3RC

TAB. 1 – Pourcentage de fausses détections -  $h = 0,7$

Les deux méthodes donnent de meilleurs résultats dans le cas de modulations 1REC que dans le cas 3RC: en ce qui concerne la méthode cyclique, cette constatation n'est en rien surprenante dans la mesure où les signaux 1REC ont un excès de bande plus important que les signaux 3RC. Cette observation permet également de confirmer que la méthode proposée fournit elle aussi des performances d'autant meilleures que la modulation CPM considérée a un excès de bande important. D'autre part, nous remarquons que les performances des deux méthodes sont proches dans le cas de signaux 1REC. En revanche, pour une modulation 3RC, le nombre de fausses détections est significativement plus faible avec la méthode proposée. Enfin, la méthode proposée est moins pénalisée par la diminution du rapport signal à bruit que la méthode cyclique utilisée.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous montrons comment l'estimateur de la période symbole proposée dans [3] dans le cas de modulations linéaires peut être adapté au cas de signaux CPM. La méthode repose sur l'hypothèse essentielle qu'un filtrage passe-bas a eu lieu à l'émission ou à la réception. Dans ce cas, un filtre égaliseur numérique ne peut donner un signal de module constant en sortie que lorsque

la période d'échantillonnage correspond à la période symbole. Cette approche, bien que coûteuse en complexité, permet de réduire le nombre de fausses détections dont souffrent les méthodes cycliques lorsque l'excès de bande du signal modulé est faible.

## Références

- [1] P.A. Laurent, "Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulse", *IEEE Trans. on Communications*, vol. COM-34, no. 2, pp. 150-160, February 1986.
- [2] D.N. Godard, "Self-recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communication systems", *IEEE Trans. on Communications*, vol. COM-28, no. 11, pp. 1967-1875, November 1980.
- [3] S. Houcke, A. Chevreuil, Ph. Loubaton, "Blind equalization: case of an unknown symbol period", to appear in *IEEE Trans. on Signal Processing*.
- [4] S. Houcke, A. Chevreuil, Ph. Loubaton, "Estimation of the symbol period: the frequency offset case", in Proc. EU-SIPCO, Toulouse, September 2002.
- [5] P.Bianchi, P.Loubaton, F.Sirven, "On the Blind Equalization of Continuous Phase Modulated Signals using a Constant Modulus Criterion", SPAWC 2003, Rome, Juin 2003.
- [6] O. Shalvi, E.Weinstein, "New criteria for blind deconvolution of nonminimum phase systems (channels)", *IEEE Trans. on information theory*, col. 36, no.2, pp. 312-321, March 1990.

## A Éléments de preuve du Théorème 1

Comme (7) le montre,  $y_a(t)$  peut être interprété comme un signal modulé linéairement par les pseudo-symboles  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Cependant, cette suite n'étant pas i.i.d., la preuve du théorème 1 fournie dans [3] ne peut être directement étendue à notre contexte. Ici, la preuve du théorème est fondée sur une caractérisation des filtres qui, lorsqu'ils sont excités par un signal CPM, produisent un signal de module constant. Ce résultat est présenté dans [5].

Soit  $T_e$  une période d'échantillonnage telle que pour tout  $n$ ,  $|z_{T_e}(n)| = 1$ . On désigne par  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  les coefficients du filtre égaliseur  $g(z) = \sum_k g_k z^{-k}$ . Le signal à temps discret  $z_{T_e}(n)$  peut être interprété comme la version échantillonnée au rythme  $T_e$  d'un signal analogique  $z_a(t)$  défini de la manière suivante :

$$z_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{n+1} f_a(t - nT_s),$$

où  $f_a(t) = \sum_k g_k h_a(t - kT_s)$ . Du fait de la présence d'un filtre d'émission et/ou de réception, le filtre de réponse impulsionnelle  $f_a(t)$  est à bande limitée: conformément aux hypothèses du théorème 1, nous supposons que sa transformée de Fourier  $F_a(f)$  est nulle dès que  $|f| \geq \frac{2}{T_s}$ . Les résultats de [5] permettent aisément de démontrer que cette dernière propriété est incompatible avec la condition " $|z_{T_e}(n)| = 1 \forall n$ " dès lors que  $T_e$  n'est pas multiple de  $T_s$ .