

# Propriétés du second ordre de l'effet de grenaille

Bernard PICINBONO

Laboratoire des Signaux et Systèmes  
Supélec, Plateau de Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette, France  
bernard.picinbono@lss.supelec.fr

**Résumé** – L'action sur un filtre linéaire de chocs aléatoires apparaissant à des instants aléatoires engendre un signal dénommé effet de grenaille. Le spectre d'entrée de ce filtre a été analysé par de nombreux auteurs et le but de cet exposé est d'abord de montrer que les calculs connus se simplifient beaucoup si l'on utilise une fonction dite de coïncidence. Il consiste ensuite à présenter des calculs explicites avec représentations graphiques de certaines densités spectrales permettant mieux qu'une formule mathématique d'en comprendre les propriétés physiques.

**Abstract** – The shot noise is the signal observed at the output of a linear filter when the input is a sequence of random pulses arriving at random times instants. The input spectrum of this filter has been analyzed in various papers and the first aim of this paper is to show that known expressions can be obtained very simply by using a coincidence function. In the second part we present examples of spectra and explicit calculations with graphical representations which yield a better understanding of the phenomena than mathematical expressions only.

## 1 Introduction et historique

L'effet de grenaille est le signal de sortie d'un filtre linéaire dont l'entrée est formée de chocs se produisant à des instants aléatoires  $\{t_i\}$  constituant un processus ponctuel (PP). Il s'agit d'un phénomène macroscopique très courant dont la première mise en évidence expérimentale a été présentée dans [1]. Du point de vue mathématique c'est aussi l'un des plus anciens modèles de signal aléatoire étudié indépendamment dans [2, 3]. Dans tous ces travaux on supposait que les chocs aléatoires étaient de même amplitude et se produisaient aux instants d'un processus de Poisson stationnaire défini par sa densité  $\lambda$ . Ainsi le seul élément aléatoire dans ce phénomène était les instants  $\{t_i\}$  du PP, ce qui conduisait à l'expression d'*effet de grenaille pur*. Dans ce cas on peut obtenir des expressions plus ou moins complexes de l'ensemble de la loi temporelle du signal.

Diverses généralisations ont été présentées. La plus simple consiste à introduire des amplitudes aléatoires de sorte que le signal effet de grenaille s'écrit

$$x(t) = \sum_i a_i h(t - t_i). \quad (1)$$

Le caractère aléatoire du signal provient alors des instants  $\{t_i\}$  et des amplitudes  $\{a_i\}$  souvent dénommées signal de *marque*, ou tout simplement *marque*. L'exemple le plus connu de signal marqué apparaît dans la détection optique des signaux faibles par un photomultiplicateur. À un photon absorbé à un instant  $t_i$  le système de multiplication associe un nombre aléatoire  $a_i$  de photoélectrons qui forment le signal de grenaille à la sortie du filtre de réponse percussionnelle  $h(t)$ . Lorsque les amplitudes  $a_i$  sont des variables aléatoires (VA) IID il est encore possible de calculer la loi temporelle du signal de sortie [4]. D'autres extensions ont été faites dans le cas de processus de Poisson composés largement utilisés en optique statistique pour décrire la détection de photons dans un champ électromagnétique [4]. En principe on peut associer un effet de grenaille à tout proces-

sus ponctuel (PP), mais même pour les processus de renouvellement qui sont les extensions les plus naturelles des processus de Poisson il est très difficile, voire impossible, d'obtenir sous forme explicite la loi temporelle du signal.

Toutefois on peut se contenter d'une vision plus simple en se limitant aux *propriétés du second ordre*. On peut introduire une fonction de corrélation ou un spectre d'entrée dont on déduit par les formules traditionnelles du filtrage linéaire la fonction de corrélation ou le spectre de  $x(t)$ . Dans le cas d'un processus de Poisson non marqué ( $a_i = 1$ ) le spectre d'entrée est constant (bruit blanc) et égal à la densité  $\lambda$  du processus de Poisson. C'est ce qui apparaît dans [1, 2, 3]. Ce spectre blanc provient du fait que le processus de Poisson est sans mémoire. Cependant il y a bien d'autres types de PP ayant des effets de mémoire et la question s'est posée de savoir comment définir dans ces cas le spectre d'entrée, comment le calculer et en tirer des conséquences. Présentons un bref historique pour ensuite situer notre approche.

La première tentative de définir le spectre d'entrée d'un PP apparaît dans [5]. Cette approche est faite essentiellement à partir des propriétés de comptage du PP et l'auteur ne donne qu'un petit nombre d'exemples. La question a été reprise pour les PP de renouvellement dans [6]. Malgré des calculs laborieux, cet article indique déjà la relation entre le spectre d'entrée et les temps de vie du processus, ce qui sera analysé dans la suite. Enfin le cas des processus marqués a été étudié dans [7] et la formule générale qui s'y trouve est la plus complète à ce jour.

Notre approche se situe en amont et en aval de cette formule. En amont parce que l'usage des fonctions de coïncidences introduites au paragraphe suivant permet la démonstration de loin la plus simple de cette formule. En aval car tous les articles cités se contentent de formules algébriques dont la complexité rend difficile l'interprétation. Au contraire les représentations graphiques de quelques spectres présentées ci-dessous permettent d'en visualiser l'aspect, ce qui pour le praticien est la question la plus importante.

## 2 Fonctions de coïncidence

### 2.1 Processus non marqués

Soit  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  les nombres de points du PP apparaissant respectivement dans les intervalles  $[\theta, \theta + d\theta]$ ,  $[\theta', \theta' + d\theta']$  et  $[\theta + d\theta, \theta' + d\theta']$ ,  $\theta < \theta'$ . Si le PP est régulier les VA  $N_1$  et  $N_2$  ne prennent que les valeurs 0 ou 1 et l'on a  $P[N_1 = 1] = \lambda d\theta$ , où  $\lambda$  est la densité du PP. Cette densité est constante dans le cas d'un PP stationnaire, ce qu'on admet dans la suite.

La fonction de coïncidence  $c_N(t)$  est définie par la relation

$$E(N_1 N_2) = c_N(\theta' - \theta) d\theta d\theta'. \quad (2)$$

Cette fonction est dénommée "densité de covariance" dans [5]. Ce terme ne nous paraît pas opportun car pour le lecteur rapide cela peut laisser entendre que  $c_N(t)$  est une fonction de corrélation, comme on le trouve écrit dans divers articles d'optique statistique. Or ce n'est pas le cas et, comme on le verra dans la suite, sa transformée de Fourier peut très bien prendre des valeurs négatives.

Le calcul de cette fonction revient donc à celui de l'espérance mathématique  $E(N_1 N_2)$ . Mais comme les VA  $N_1$  et  $N_2$  ne prennent que les valeurs 0 ou 1 il en est de même pour leur produit. On a donc  $E(N_1 N_2) = P(C)$ , où  $C$  est l'événement coïncidence défini par  $C = (N_1 = 1) \times (N_2 = 1)$ . Le mot coïncidence est choisi car  $C$  s'obtient expérimentalement par un dispositif à coïncidence courant en physique des particules ou en optique statistique.

On a évidemment  $P(C) = P[N_1 = 1]P[(N_2 = 1)|(N_1 = 1)]$ . Cette probabilité conditionnelle peut s'exprimer au moyen des densités de probabilité (DDP) des *temps de vie successifs* du PP. On appelle temps de vie d'ordre  $k$  d'un PP la distance entre un point de ce PP et le  $k$ ième qui lui succède. Le temps de vie d'ordre 1 est évidemment la distance entre deux points successifs. Il résulte de cette définition que  $f_k(\theta' - \theta) d\theta'$  est la probabilité conditionnelle  $P[(N_2 = 1)(N_3 = n - 1)|(N_1 = 1)]$ . La probabilité conditionnelle apparaissant dans la coïncidence est donc la somme de ces quantités puisque  $k$  n'est pas fixé. Notant finalement que la fonction de coïncidence est par définition paire, alors que les fonctions  $f_n(t)$  sont nulles pour  $t < 0$ , on en déduit que

$$c_N(t) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} f_k(|t|). \quad (3)$$

On peut montrer que cette fonction est en général bornée et tend vers  $\lambda^2$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.2 Processus marqués

Soit  $M(t)$  le signal aléatoire en escalier variant par sauts d'amplitudes  $a_i$  aux points  $t_i$  du processus ponctuel de départ. Il en résulte que les accroissements infinitésimaux  $dM(\theta) = dM(\theta + d\theta) - dM(\theta)$  ne prennent que les valeurs 0 ou  $a_i$ . Ce dernier événement se réalise si  $dN(\theta) = 1$ , où  $N(t)$  est la fonction utilisée précédemment, et sa probabilité vaut donc  $\lambda d\theta$ . Soit  $M_1$  et  $M_2$  les VA respectivement égales à  $dM(\theta)$  et  $dM(\theta')$ .

Supposons d'abord que le signal  $a_i$  soit déterministe (non aléatoire). La VA  $M_1$  ne prend que les valeurs 0 ou  $a_j$ , et cette dernière avec la probabilité  $\lambda d\theta$ . D'après la définition du temps

de vie on a

$$P[(M_1 = a_j)(M_2 = a_{j+k})] = \lambda f_k(\theta' - \theta) d\theta d\theta'. \quad (4)$$

Il en résulte que

$$E[M_1 M_2] = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_j a_{j+k} f_k(\theta' - \theta) d\theta d\theta' \quad (5)$$

où les  $\{a_i\}$  ne sont pas aléatoires.

En prenant maintenant la moyenne sur les  $a_i$  quand ils deviennent aléatoires et en utilisant la même formule que (2), on déduit que

$$c_M(t) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} E[a_j a_{j+k}] f_k(t). \quad (6)$$

Lorsque le signal  $a_i$  est stationnaire on a

$$E[a_j a_{j+k}] = \gamma_a[k] + m_a^2, \quad (7)$$

où  $m_a$  et  $\gamma_a[k]$  sont respectivement la moyenne et la fonction de corrélation (FC) des  $a_i$ . Reprenant le même raisonnement que ci-dessus concernant la parité de  $c(t)$  on déduit

$$c_M(t) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_a[k] + m_a^2) f_k(|t|). \quad (8)$$

Cette formule englobe évidemment (3) puisque dans le cas de l'effet de grenaille pur les  $a_i$  sont tous égaux à un. Ceci donne  $\gamma_a[k] = 0$  et  $m_a^2 = 1$ . On est alors conduit à comparer la fonction de coïncidence du processus marqué et celle du processus non marqué. On déduit de (3) et (8) la relation

$$c_M(t) = m_a^2 c_N(t) + s(t) \quad (9)$$

avec

$$s(t) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_a[k] f_k(|t|). \quad (10)$$

Dans le cas d'un signal de marque centré on a  $m_a = 0$  d'où  $c_M(t) = s(t)$ .

## 3 Fonction de corrélation et spectre d'entrée

La relation (1) peut s'écrire

$$x(t) = \int h(t - \theta) dM(\theta) \quad (11)$$

puisque l'accroissement  $dM(\theta)$  est nul, sauf aux instants  $t_i$  où il vaut  $a_i$ . On a évidemment  $E[dM(\theta)] = \lambda m_a d\theta$ , ce qui permet de calculer la valeur moyenne  $m_x = E[x(t)]$ . Le calcul de la moyenne du second ordre  $r_x(\tau) = E[x(t)x(t - \tau)]$  est un peu plus compliqué car il nécessite la connaissance complète du moment du second ordre  $E[dM(\theta)dM(\theta')]$ . Pour  $\theta \neq \theta'$  il s'écrit à l'aide de la fonction de coïncidence définie par (8). Mais il faut une formule englobant le cas  $\theta = \theta'$ . Or dans ce cas  $E[dM^2(\theta)]$  vaut  $\lambda E(a^2) d\theta$ , ce qui donne,  $\forall \theta$  et  $\theta'$

$$E[dM(\theta)dM(\theta')] = [c_M(\theta - \theta') + \delta(\theta - \theta') \lambda E(a^2)] d\theta d\theta' \quad (12)$$

où  $\delta(\cdot)$  est la distribution de Dirac. La FC de  $x(t)$  vaut par définition  $\gamma_x(t) = r_x(t) - m_x^2$ . Par un calcul immédiat utilisant les résultats précédents on trouve que  $\gamma_x(t)$  se déduit par

les relations classiques de transformation par filtrage linéaire d'une FC d'entrée valant

$$\gamma_M(t) = \lambda E(a^2)\delta(t) + c_M(t) - (\lambda m_a)^2 \quad (13)$$

où  $c_M(t)$  est la fonction de coïncidence définie par (8). Utilisant (9) et (10) on obtient également

$$\gamma_M(t) = \lambda E(a^2)\delta(t) + m_a^2 \hat{c}_N(t) + s(t) \quad (14)$$

où  $\hat{c}_N(t) = c_N(t) - \lambda^2$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ .

On peut faire deux remarques sur ces formules. Tout d'abord l'existence du terme  $\delta(t)$  rend infinie la FC pour  $t = 0$ . Ceci signifie que le signal d'entrée générant  $x(t)$  par filtrage linéaire n'est pas du second ordre, ayant une variance infinie. Par transformation de Fourier ce terme introduit dans le spectre une composante constante  $\lambda E(a^2)$ . On l'appellera dans la suite la *composante blanche*. En particulier dans le cas de l'effet de grenaille pur  $\gamma_M(t)$  se réduit à  $\lambda\delta(t)$ , et l'on retrouve le spectre constant et égal à  $\lambda$  noté au début de ce texte. Dans ce cas le signal d'entrée est un bruit blanc et cela provient du fait qu'un PP de Poisson est sans mémoire.

Par ailleurs il est facile de voir que  $\gamma_M(t)$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ , et ceci signifie que dans le domaine spectral il n'y a pas en général de raie à la fréquence nulle.

Passons maintenant à l'étude du spectre (ou densité spectrale de puissance) de  $x(t)$  qui selon (11) et (14) vaut  $\Gamma_x(\nu) = |G(\nu)|^2 \Gamma_M(\nu)$  où  $G(\nu)$  est la réponse en fréquence du filtre et

$$\Gamma_M(\nu) = \lambda E(a^2) + m_a^2 \hat{C}_N(\nu) + S(\nu) = \lambda \sigma_a^2 + m_a^2 \Gamma_N(\nu) + S(\nu), \quad (15)$$

où  $S(\nu)$  est la TF de la fonction  $s(t)$  définie par (10) et  $\sigma_a^2$  la variance de  $a$ . Lorsque les  $a_i$  sont IID le dernier terme disparaît, et l'on trouve une expression constituant le théorème 1 de [8] démontré de manière beaucoup plus complexe.

## 4 Applications aux processus de renouvellement

Ce sont des PP définis par le fait que les intervalles entre points successifs sont des VA IID. Ainsi le PP est entièrement défini par la DDP du temps de vie d'ordre 1. Lorsque cette DDP est une exponentielle monolatérale, le PP de renouvellement devient un processus de Poisson. L'indépendance entre les intervalles entraîne que la DDP  $f_k(t)$  apparaissant dans les expressions précédentes est une puissance de convolution d'ordre  $k$  de la DDP du temps de vie d'ordre 1. On en déduit que  $c(0^+) = 0$  et que si la DDP  $f(t)$  est bornée il en est de même pour  $f_k(t)$ .

Ceci conduit à utiliser les transformées de Laplace (TL) monolatérales. Plus précisément soit  $F_L(s)$  et  $C_L(s)$  les TL respectivement de  $f(t)$  et  $c(t)$ . Il résulte de (8) que

$$C_L(s) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_a[k] + m_a^2) F_L^k(s). \quad (16)$$

On vérifie simplement que cette série est convergente dans le demi-plan de droite.

Nous avons noté que la fonction de coïncidence était paire. Il en résulte que sa TF peut se déduire de la TL monolatérale par la relation

$$C_F(\omega) = 2\text{Re}[C_L(j\omega)]. \quad (17)$$

Lorsque l'on prend la partie réelle de la TL le dernier terme de (13) est éliminé car sa TL est en  $1/s$ . Les deux autres termes donnent alors le spectre  $\Gamma_M(\omega)$ , TF de  $\gamma_M(t)$ , soit

$$\Gamma_M(\omega) = \lambda E(a^2) + 2\text{Re}[C_L(j\omega)]. \quad (18)$$

Il résulte de ceci que le spectre d'entrée  $\Gamma_M(\omega)$  de  $x(t)$  se déduit directement de la fonction de coïncidence, ce qui en montre l'intérêt. Donnons maintenant quelques exemples.

Si le processus n'est pas marqué ( $\gamma_a = 0$ ,  $m_a = 1$ ) on a

$$C_L(s) = \lambda \frac{F_L(s)}{1 - F_L(s)}. \quad (19)$$

On en déduit aisément que  $c_N(t)$  tend vers  $\lambda^2$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Si le processus est marqué le calcul devient plus difficile à cause du terme  $\gamma_a[k]$ . Toutefois il se simplifie pour toutes les corrélations en somme d'exponentielles correspondant à des marques de type ARMA. Le cas le plus élémentaire se produit quand la marque  $a_i$  est un signal AR (1) centré et de variance unité, ce qui donne  $\gamma[k] = r^{|k|}$  où  $r$  est le coefficient de régression. Dans ce cas on a

$$C_L(s) = \lambda \frac{r F_L(s)}{1 - r F_L(s)}. \quad (20)$$

Pour poursuivre le calcul il faut donc se donner la fonction  $F_L(s)$ , TL de la DDP du temps de vie. Dans cet exposé on se limite à l'exemple où cette DDP est uniforme, soit  $f(t) = 0$ , sauf dans l'intervalle  $[m-b, m+b]$  où  $f(t) = 1/2b$ . Il est clair que le paramètre  $b$  est en relation biunivoque avec la variance du temps de vie. Cette DDP permet de décrire un PP avec une incertitude uniforme sur la distance entre points (phénomène de gigue). Quand  $b \rightarrow 0$  on arrive à une distribution périodique de points. La TL de cette DDP est aisée à calculer et l'on trouve  $C_L(j\omega) = (1/m)N/D$  avec

$$N(\omega) = \sin(b\omega) \exp(jm\omega) \quad (21)$$

et

$$D(\omega) = b\omega - \sin(b\omega) \exp(jm\omega). \quad (22)$$

Il suffit maintenant d'appliquer (18) soit avec (19) soit avec (20). Les résultats sont calculés avec la fréquence ordinaire  $\nu = \omega/2\pi$  et l'on suppose dans tous les cas, pour simplifier, que  $\lambda = 1$ . Les résultats pour d'autres valeurs de la densité s'en déduisent immédiatement.

Sur la **figure 1** on considère le cas d'un PP non marqué. Supposant  $m = 1$  on étudie l'influence du paramètre  $b$  définissant la DDP. Les courbes 1, 2 et 3 correspondent respectivement aux valeurs 1, 0,5 et 0,003 de  $b$ . La courbe 3 s'explique aisément. En effet si dans (1) on a  $a_i = 1$  et  $t_i = iT$  le signal  $x(t)$  devient un peigne de Dirac dont la TF est également un tel peigne. Pour  $m = 1$  les fréquences de ce peigne sont les entiers, ce l'on voit clairement sur la courbe. L'influence du paramètre  $b$  est particulièrement nette dans le domaine des basses fréquences. À mesure que  $b$  décroît les oscillations de  $\Gamma(\nu)$  autour de la fréquence 1 diminuent pour tendre vers une simple résonance devenant d'ailleurs infinie quand  $b = 0$ . De plus, comme  $m_a = \lambda = 1$ , la composante blanche du spectre vaut 1 et elle est atteinte d'autant plus vite que  $b$  est plus grand. Enfin il résulte de (21) que le spectre vaut 1 pour les fréquences annulant  $N(\omega)$ , soit  $k/2b$ , et l'on peut montrer que  $\Gamma(0) = b^2/3$ . Ceci se voit clairement sur la figure.

Sur la **figure 2** on montre l'influence de la marque caractérisée par la régression  $r$ . Les résultats sont présentés pour les fréquences comprises entre 0 et 2. On a choisi, comme dans la figure 1,  $m = 1$  et  $b = 0,003$  et on étudie l'influence de la régression  $r$ . La courbe 1 correspond à une régression nulle. Dans ce cas les VA  $a_i$  sont IID et de moyenne nulle. Le spectre se réduit à sa composante blanche  $\lambda E(a^2)$  qui vaut 1 pour les valeurs choisies des paramètres. La courbe 4 correspond à  $r = 1$  ce qui signifie l'absence de marque et l'on retrouve la situation de la figure 1. Les courbes 2 et 3 correspondent respectivement aux valeurs 0,2 et 0,8 de  $r$ . On voit que plus la régression diminue, plus la résonance aux fréquences entières est amortie pour disparaître complètement quand  $r = 0$ .

La **figure 3** présente l'influence de la moyenne  $m_a$  d'un processus marqué dont la composante blanche vaut 1. Le calcul est fait avec les conditions  $b = 0,5$  et  $r = 0,3$ . Les valeurs de  $m_a$  sont 1, 0,8, 0,695 et 0 respectivement pour les courbes 1, 2, 3 et 4. Les spectres doivent prendre la valeur 1 aux fréquences entières et au delà de la fréquence 1 ils sont très semblables. Au contraire l'influence de la moyenne de la marque est très sensible pour les fréquences inférieures à 1. Pour  $m_a = 1$  on retrouve la courbe 2 de la figure 1, ce qui signifie que l'on a un PP non marqué et la courbe 1 ne dépend pas de  $r$ . Par contre pour  $m_a = 0$  on retrouve la situation de la figure 2. Enfin pour la valeur  $m_a = 0,695$  le spectre prend pour la fréquence nulle sa valeur asymptotique 1. D'autres résultats seront présentés dans l'exposé oral.

Ces résultats peuvent être généralisés au cas où le modèle AR(1) est remplacé par un modèle ARMA avec un nombre fini de pôles. Dans l'exposé oral on présentera des courbes correspondant au cas de deux pôles complexes conjugués et on étudiera plus particulièrement l'influence du module et de la phase sur le spectre d'entrée.

## Références

- [1] Blanc-Lapierre A., *Étude expérimentale de l'effet de grenaille pur, application à l'amplification des courants photoélectriques très faibles*, Paris : Masson, 1944.
- [2] Blanc-Lapierre A., *Sur certaines fonctions aléatoires stationnaires; applications à l'étude des fluctuations dues à la structure électronique de l'électricité*, Paris : Masson, 1945.
- [3] Rice S. O., "Mathematical analysis of random noise," *Bell Systems Technical Journal*, 24, pp. 46-156, 1945.
- [4] Picinbono B., *Signaux aléatoires, tome 2*, Paris : Dunod université, 1993.
- [5] Bartlett M. S., "The spectral analysis of point processes," *J. Roy. Statist. Soc. B*, 25, 264-296, 1962.
- [6] Kryukov V. L., "Calculation of the correlation function and the spectral power density of random sampling," *Radio Eng. and Electr. Physics*, 12, 169-176, 1967.
- [7] Beutler J. and Leneman O. "The spectral analysis of impulse processes," *Information and Control*, vol. 12, pp. 236-258, 1968.
- [8] Brémaud P. and Massoulié L., "Power spectra of general shot noises and Hawkes point processes with a random excitation," *Adv. Appl. Probab.*, 34, 205-222, 2002.

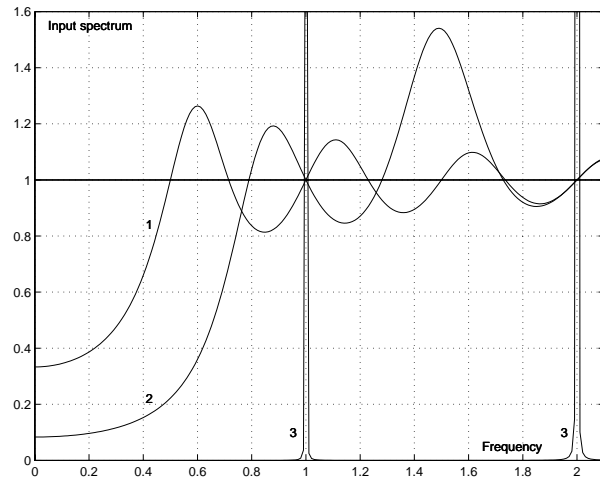


FIG. 1: Influence du paramètre  $b$ .

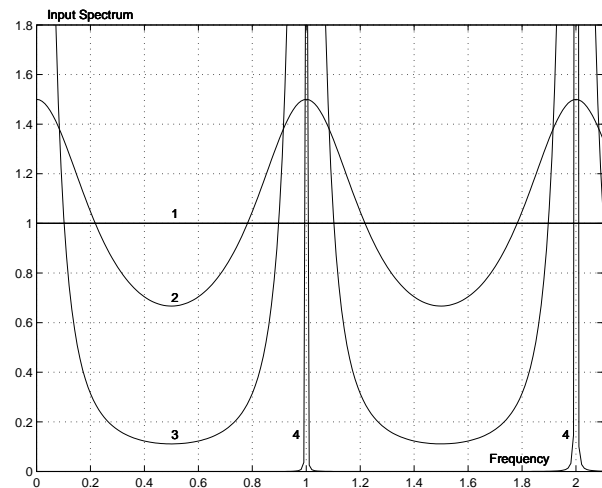


FIG. 2: Influence de la régression de la marque.

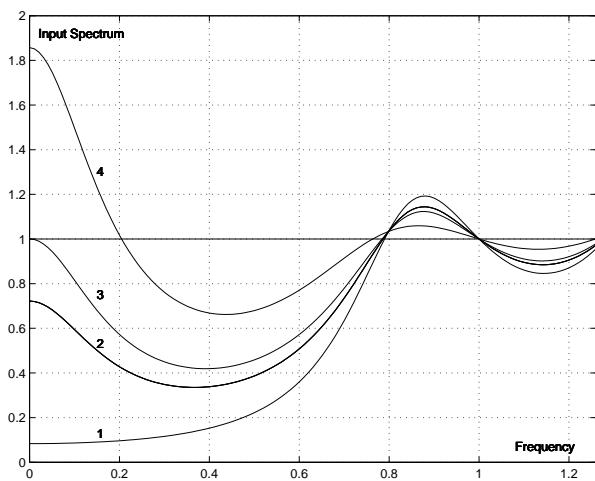


FIG. 3: Influence de la moyenne  $m_a$ .