

# HISD : un nouveau décodeur MIMO utilisant une approche géométrique pour des transmissions MAQ

A. NAFKHA, E. BOUTILLON, C. ROLAND

LESTER, Centre de recherche, Université de Bretagne Sud, BP 92116, 56321 Lorient Cedex, France  
[\[emmanuel.boutillon,christian.roland,armor.nafkha}@univ-ubs.fr](mailto:emmanuel.boutillon,christian.roland,armor.nafkha}@univ-ubs.fr)

**Résumé** – Dans de nombreux systèmes de communication, l’opération de décodage se résume à résoudre un problème d’optimisation d’un système combinatoire de la forme  $y = Hx+b$ . Dans le cas général, son décodage au sens du maximum de vraisemblance (ML) est un problème connu de type « NP-Complet ». Dans cet article, afin de résoudre ce problème, un nouvel algorithme sous optimal appelé HISD (Hyperplane Intersection and Selection Detector) est proposé. Cet algorithme repose sur une approche géométrique. Comparé aux algorithmes existants, le HISD possède trois caractéristiques très attrayantes pour une implantation dans des systèmes réels. La première concerne ses performances en terme de TEB qui sont proches de celles de l’optimum (ML). Sa complexité en terme de calcul est faible et sa structure est intrinsèquement parallèle ce qui rend d’autant plus aisée son implantation matérielle. Dans cet article, l’algorithme HISD est utilisé pour résoudre de manière efficace le problème du décodage des systèmes de transmissions MIMO (Multiple Input Multiple Output).

**Abstract** – In many efficient wireless communication systems, the demodulation tasks resume to solve a combinatorial optimization problem of the form  $y = Hx+b$  where  $H$  is a real  $m \times n$  channel matrix,  $b$  is a noise vector,  $y$  is the received vector and  $x$  is a discrete  $n$ -dimensional vector of transmitted information. The Maximum Likelihood (ML) detection of  $y = Hx+b$  is known to be a NP-hard problem in the general case. In this paper, a new sub-optimal algorithm for ML detection problem is proposed. This algorithm called HISD (Hyperplane Intersection and Selection Detector) is based on a geometrical approach. Comparing to existing algorithms, HISD has three characteristics that make it very attractive for practical systems. First, it performs very close to the ML limit. Second, it has a low computational complexity. Finally, The inherent parallel structure of the proposed algorithm allows us highly suitable hardware implementation. In this paper the HISD is efficiently employed in the case of MIMO (Multiple Input Multiple Output) systems.

## 1. Introduction

L’augmentation de l’efficacité spectrale reste l’un des grands enjeux des communications numériques sans fils. Les transmissions multi-antennes constitue une solution pour améliorer la qualité de la transmission sur des canaux difficiles.

Lors d’une transmission avec un système MIMO (Multiple Input Multiple Output) le maximum de débit transmissible est atteint si on émet à chaque temps symbole un symbole différent sur chaque antenne. Le nombre de symbole émis simultanément est donc égal au nombre  $N$  d’antenne émission, c’est ensemble sera représenté dans le reste de l’article par le vecteur du signal bande de base émis  $\tilde{x}$ .

L’étude portera sur une communication mono utilisateur dans un canal non sélectif en fréquence. Le modèle de canal équivalent en bande de base est représenté par une matrice  $H$ , dont chaque coefficient  $\tilde{H}_{ij}$  représente la fonction de transfert entre la  $j^{\text{ème}}$  antenne d’émission et la  $i^{\text{ème}}$  antenne de réception. Dans ces conditions, le vecteur  $y$  du signal bande de base reçu a pour équation :

$$\tilde{y} = \tilde{H}\tilde{x} + \tilde{b} \quad (1)$$

Dans le cas de transmission numérique avec un codage binaire à symbole de type MAQ les éléments de l’équation (1) sont des complexes. Il est utile pour simplifier le modèle de passer en coordonnées réelles grâce à l’équation (2)

$$\begin{pmatrix} \text{Re}(y) \\ \text{Im}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re}(H) & -\text{Im}(H) \\ \text{Im}(H) & \text{Re}(H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Re}(x) \\ \text{Im}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Re}(b) \\ \text{Im}(b) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Sous cette condition, l’équation 1 devient  $y = Hx + b$ .

$x = \{\text{Re}(x_1), \dots, \text{Re}(x_N), \text{Im}(x_1), \dots, \text{Im}(x_N)\}^T$  est le vecteur des symboles émis décomposés en partie réel et partie imaginaire,  $H = \{h_{ij}\}$  représente la matrice de canal de dimension  $m \times n$  ( $n=2N$  et  $m=2M$  avec  $N$  et  $M$  respectivement le nombre d’antenne en émission et en réception) et  $b = \{\text{Re}(b_1), \dots, \text{Re}(b_N), \text{Im}(b_1), \dots, \text{Im}(b_N)\}^T$  le vecteur de bruit gaussien additif.

Concernant le modèle de canal, les hypothèses classiques de stationnarité durant la transmission d’un « bloc » de données contenant plusieurs vecteurs  $x$  et de connaissance parfaite par le récepteur de la matrice de canal  $H$  sont adoptées.

La solution optimale  $x_{ML}$  correspond au minimum d’une fonction de coût définie entre le vecteur du signal reçu  $y$  et les éléments  $x$  de l’ensemble  $\mathbf{x}$  des solutions possibles tel que :

$$x_{ML} \equiv \underset{\mathbf{x}}{\text{argmin}} \|y - Hx\|^2 \quad (3)$$

Dans cette équation, un vecteur  $x \in \mathbf{x} = \{-1, +1\}^n$  pour une MAQ4.

Lorsque  $n$  est petit une recherche exhaustive est possible mais pour des valeurs plus importantes les calculs

deviennent rapidement prohibitifs. (par exemple pour  $n=8$  soit 4 antennes en émission, le nombre de calcul est de 64 pour chaque vecteur  $y$  du signal reçu). En effet, la complexité en terme de multiplications du décodeur optimal (ML) croit rapidement en fonction du nombre  $N$  d'antenne en émission  $\mathcal{O}((2N)^{2N})$ . Afin de pallier ce problème de nombreux décodeurs ont été proposés.

Le SD (Sphère Décodeur) [2] fait partie des méthodes optimales mais sa structure n'est pas régulière et ne permet pas une implantation matérielle optimisée.

Des algorithmes sous optimaux sont aussi proposés dans la littérature comme le décorrélateur ou Zéro-Forcing (ZF) et le Minimum de l'Erreur Quadratique Moyenne (MMSE) [4]. Des solutions à base de détecteurs non linéaires basés sur la soustraction d'interférences multi-utilisateur (SIC ou PIC) ou sur le ZF à retour de décision ont également fait l'objet d'études [7].

Récemment une nouvelle approche [6] appelée SemiDefinite Programming (SDP) a montré quelle pouvait être une proposition intéressante à la résolution du problème posé.

L'algorithme sous optimal HISD (Hyperplane Intersection and Selection Decoder) est proposé, dans cet article, pour résoudre le problème du décodage de transmissions MIMO.

La section n°2 détaille l'algorithme de décodage HISD pour des transmissions de signaux modulés en MAQ4. Celle-ci est divisée en deux parties qui sont les phases d'intensification et de diversification. Dans la section suivante, la complexité de calcul du HISD est étudiée. Enfin, la dernière section quand à elle présentera les résultats du HISD pour des transmissions MAQ avec un code MIMO de rendement plein. L'algorithme est comparé en terme de complexité et de résultat au décodeur optimal SD d'une part et à des algorithmes sous optimaux de type MMSE et PIC.

## 2. Description de l'algorithme HISD

L'algorithme HISD fait partie des méthodes sous optimales du ML (Maximum Likelihood) qui consistent à diminuer la taille de l'ensemble des solutions  $\mathbf{x}$  en sélectionnant un sous ensemble de points  $\mathbf{x}_{start}$ .

L'algorithme HISD est une nouvelle méthode de sélection de  $\mathbf{x}_{start}$ . Il s'agit de trouver des solutions proches de la solution optimale à l'aide d'une approche géométrique tirée des travaux particulièrement originaux de H. Artes, D. Seethaler et F. Hawatsch [5]. Le HISD utilise une amélioration de cette approche associée à une méthodologie d'optimisation de processus qui contient deux stratégies complémentaires. L'approche méthodologique du HISD consiste à voir la résolution du problème de décodage posé comme un problème de Recherche opérationnelle. En conséquence nous l'algorithme est composé de deux phases, à savoir « l'intensification » et « la diversification ». L'amélioration de l'approche géométrique concerne la possibilité de calcul avec des éléments réels plutôt que complexes, ce qui facilite grandement l'implantation de l'algorithme. La phase de diversification consiste à rechercher un ensemble  $\mathbf{x}_{start}$  de points susceptibles de parvenir dans la phase d'intensification au point correspondant à la solution optimale.

L'algorithme HISD utilise deux paramètres qui sont gérés dans la phase de diversification. Le premier  $D$  est le nombre de vecteurs singuliers obtenus à partir de la décomposition de la matrice de canal  $H$  et le second  $C$  représente le nombre d'éléments de  $\mathbf{x}_{start}$  candidats à la phase d'intensification.

### 2.1 Phase d'intensification

La fonction d'intensification  $gr()$  est basée sur l'itération de la minimisation de la fonction de coût. Cette minimisation est obtenue en calculant les gradients entre un élément de  $\mathbf{x}_{start}$  et ses plus proches voisins. Soit  $x_t$  un point de  $\mathbf{x}_{start}$  et de  $\mathcal{N}(x_t)$  sous ensemble de  $\mathbf{x}$  qui contient les points situés à une distance de Hamming de 1 de  $x_t$ . Par convention on notera  $x_t^p \in \mathcal{N}(x_t)$  le point résultant de  $x_t$  par l'inversion de signe de la  $p^{\text{ème}}$  coordonnée. Soit  $x_t^p(p) = -x_t(p)$  pour une MAQ4. À partir d'un point obtenu dans la phase de diversification, nous calculons le meilleur des voisins en utilisant la formule suivante :

$$x_{t+1} = \arg \left\{ \min_{x \in \mathcal{N}(x_t)} f_y(x) \right\} \quad (4)$$

Pour passer d'une itération à la suivante la fonction de coût  $f_y$  doit décroître ( $f_y(x_{t+1}) < f_y(x_t)$ ) sinon l'algorithme s'arrête et retourne  $x_t$ . L'implantation exhaustive de l'équation (4) comporte  $n$  calculs de  $f_y(x_t^p)$  qui peuvent être remplacés par le calcul suivant :

$$\mathbf{d}(x_t^p, x_t) = \frac{1}{4} (f_y(x_t^p) - f_y(x_t)) \quad (5)$$

$$\mathbf{d}(x_t^p, x_t) = G(p, p) + \mathbf{h} \left[ x_t^T G(:, p) - y^T H(:, p) \right] \quad (6)$$

avec la matrice de Gram  $G = H^T H$ ,  $\mathbf{h} = -\text{sign}(x_t(p))$ ,  $G(:, p)$  et  $H(:, p)$  représentant respectivement la  $p^{\text{ème}}$  colonne des matrices de Gram et de canal. La matrice  $G$  est calculée seulement lors de la remise à jour des coefficients de la matrice canal suite à une phase d'estimation. Ce calcul est réalisé à chaque nouveau « bloc » de symbole.

La phase de minimisation de la fonction de coût ainsi effectuée est itérée jusqu'à ce que la solution trouvée soit un minimum. Pour une implantation matérielle d'une MAQ4, le nombre d'itération  $q$  est limité à 2 car le gain obtenu ensuite est pratiquement nul. Le problème est que ce minimum n'est pas pour autant l'optimum, ceci est dû à la présence de minima locaux dans l'hyperespace des solutions  $\mathbf{x}$ .

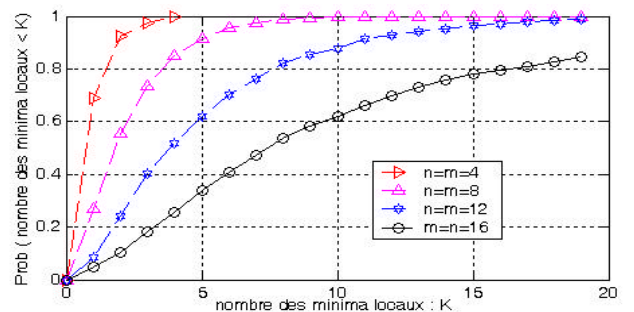


FIG. 1 : Probabilités d'apparition des minima locaux

Dans l'exemple de la figure 1, le rapport Signal à Bruit est de 10 dB et  $n = m = 16$ . Les probabilités d'avoir une

valeur supérieure à 6 ou à 12 minima est de respectivement de 60% et 30% (cf. fig.1).

Plus le nombre d'antenne augmente plus ces probabilités deviennent importantes. De même, le nombre de minima augmente en fonction du nombre de points de la constellation.

## 2.2 Phase de diversification

La phase de diversification doit donc permettre de trouver autour du point optimal un ensemble  $\mathbf{x}_{start}$  de points candidats. Ceux ci doivent être le moins redondant possible de façon à couvrir un espace suffisant renfermant le point optimal et de manière à ce que la phase d'intensification évite l'écueil des minima locaux.

Pour être efficace la méthode doit fournir un sous ensemble  $\mathbf{x}_{start}$  de  $\mathbf{x}$  qui contient les points candidats vérifiant l'intersection :

$$\mathbf{x}_{start} \cap \Pi \neq \emptyset \text{ où } \forall (x, y) \in \Pi \quad gr(x) = gr(y) \quad (7)$$

La fonction  $gr()$  est la fonction itérative d'intensification et  $\Pi$  est l'ensemble des points qui convergent vers la solution optimale dans la phase d'intensification.

L'idée de base repose sur la recherche de solutions géométriques au problème combinatoire posé. Cela consiste dans un premier temps à obtenir une solution sous optimale  $\mathbf{r}_{zf}$  de type zéro forcing (ZF) ou (MMSE). À chaque fois que la matrice de canal est estimée une décomposition en valeurs singulières (SVD) est réalisée :  $H = U\Sigma V^T$ . Où les valeurs singulières  $\{\mathbf{I}_k\}_{k=1}^n$  sont les composantes de la matrice diagonale  $\Sigma$ . Ces composantes sont classées suivant un ordre croissant. Les vecteurs singuliers  $\{u_k\}_{k=1}^n$  et  $\{v_k\}_{k=1}^n$  qui proviennent respectivement des matrices unitaires  $U$  et  $V^T$ . Les vecteurs  $v_k$  sont axes principaux des ellipsoïdes d'équipotentiel de bruit définies par la fonction  $f_y(a) = C^{ste}$ .

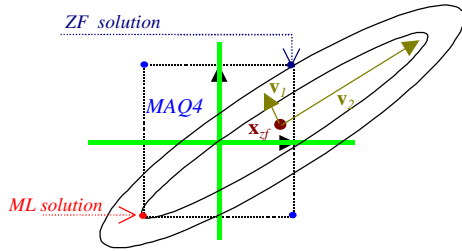


FIG. 2 : Projection à partir du ZF suivant une direction dominante de bruit avec une modulation MAQ4

Pour tout point  $a$  de  $\mathbf{x}$ ,  $a - \mathbf{r}_{zf}$  est un vecteur qui est solution de l'équation  $a - \mathbf{r}_{zf} = \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k v_k$  où les  $\mathbf{a}_k$  sont des coefficients réels. Il est ainsi possible de réécrire la fonction d'intensification par rapport au point candidat  $a$  :

$$f_y(a) = \|y - Ha\|_2^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k \mathbf{I}_k v_k \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k^2 \mathbf{I}_k^2 \quad (8)$$

Cette égalité est obtenue grâce au fait que les vecteurs  $v_k$  forment une base orthonormée de l'espace.

Considérons les droites  $\Delta_k$  définies par :

$$\Delta_k = \left\{ z \in \mathfrak{R}^n / z = \mathbf{r}_{zf} + \mathbf{a} v_k, \mathbf{a} \in \mathfrak{R} \right\} \quad (9)$$

Ces droites  $\Delta_k$  passent par le point ZF  $\mathbf{r}_{zf} = G^{-1}H^T y$  et ont pour direction les vecteurs singuliers  $v_k$  (cf. fig. 2). Il faut noter que ces axes sont d'autant plus importants que les valeurs respectives de  $\mathbf{I}_k$  sont faibles, donc que  $k$  est faible.

Au maximum les  $D$  plus petites valeurs des  $v_k$  sont retenues (en général de 1 à 4). Le fait de prendre  $D$  droites  $\Delta_k$  va générer un premier degré de diversification. Un second degré de diversification est obtenu grâce aux intersections (cf. fig. 3) entre les droites  $\Delta_k$  et les plans de l'hypercube des solutions de l'ensemble  $\mathbf{x}$ .

En effet, à partir d'une droite  $\Delta_k$  on obtient  $2n$  intersections avec les hyperplans  $P(i,s)$  définis de la manière suivante :

$$P(i,s) = \left\{ z \in \mathfrak{R}^n / z(i) = s \right\} \quad (10)$$

$i$  varie de 1 à  $n$  puisqu'il existe autant d'hyperplan que de coordonnées d'un vecteur  $x$  et  $s$  vaut 1 ou -1.

L'ensemble  $\mathcal{I}_k$  des solutions doit vérifier pour chaque coordonnées d'un de ses éléments l'équation suivante.

$$\mathbf{r}_{zf}(i) + \mathbf{a}_k^{s,i} v_k(i) = s \quad (11)$$

Sur l'exemple à 2 dimensions ( $n=2$ ) de la figure 3  $\mathcal{I}_k$  correspond à l'ensemble :  $\{s_1, s_2\}$ .

Ensuite, une stratégie de choix des meilleurs candidats est mise en place de façon à limiter le nombre d'élément de  $\mathbf{x}_{start}$  et par la même le nombre de calcul.

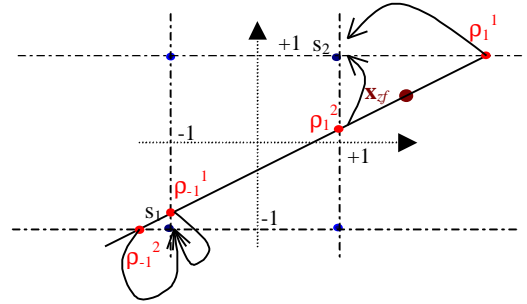


FIG. 3 : Première étape du choix des candidats potentiels

## 2.3 Description de l'algorithme HISD :

Un composant matériel est défini par ses entrées, ses sorties, ses paramètres et le traitement proprement dit. Nous découpons en 2 parties l'opération de traitement : le prétraitement (qui est lié à l'évolution du canal) et les différentes phases opératoires qui seront intégrées sur un composant hardware de type FPGA.

Les entrées:

Le vecteur  $y$  du signal reçu et la matrice de canal.

La sortie

Une solution proche de l'optimal  $x_{hisd}$

Le traitement

Pré-traitement : chercher les  $D$  vecteurs singuliers associés aux valeurs singulières de la matrice de canal  $H$  (décomposition en valeur singulières SVD).

Phase 1 : Calcul de  $\mathbf{r}_{zf} = Fy$  et  $y^T H$ .

Phase 2 : pour chaque direction  $k \in \{1 \dots D\}$ , générer  $\mathcal{I}_k$ .

Notons qu'il est possible à ce niveau de supprimer les points redondants.

Phase 3 : pour chaque direction  $k \in \{1 \dots D\}$ , extraction des

$C$  points candidats de  $\mathcal{I}_k$  ayant une distance minimale.

Phase 4 : Création de l'ensemble  $\mathbf{x}_{start}$ . puis à partir de chaque point de  $\mathbf{x}_{start}$  utiliser la méthode du gradient itératif.

Phase 5 : Enregistrement de la meilleure solution trouvée  $x_{hisd}$ .

### 3. Complexité

Concernant la complexité du HIS pour les multiplications, celle-ci est en  $(D+C) \times \mathcal{O}(n^3)$  où  $D$  représente le nombre de directions évaluées et  $C$  le nombre de points candidats retenus de  $\mathbf{x}_{start}$ . De manière plus fine intervient le nombre d'itérations  $q$ . En examinant le tableau 1 et la figure 4, les valeurs  $C=4$ ,  $D=2$  et  $q=2$  sont suffisants.

La complexité dépend des deux paramètres du HISD ( $D$  et  $C$ ). Dans cette étude, nous considérerons uniquement le cas où  $n=m$ . Le HISD est constitué de deux parties. La première concerne le calcul des matrices  $F$  et  $G$  ainsi que l'extraction des  $D$  plus petits vecteurs singuliers de  $H$ . Par « bloc » de vecteur  $x$  le nombre d'opérations est en  $\mathcal{O}(n^3)$ . Cette première partie est évaluée à chaque « bloc » le canal étant supposé invariant pendant cet espace de temps.

Le SD fait partie des méthodes optimale mais sa structure n'est pas régulière et ne permet pas une implantation optimale. L'algorithme HISD étant lui essentiellement parallèle, le nombre de cycle moyen est égal à deux. Le HISD est donc particulièrement bien adapté à une architecture matérielle haut débit.

TAB. 1 : complexité phase par phase du HISD

Pour un « bloc » de vecteur $x$		
$H^T H$ and $\{v_k\}_{k=1}^D$	$\otimes$	$\oplus$
	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n^3)$
Pour chaque vecteur $y$ reçu		
HISD	$\otimes$	$\oplus$
Phase (1) diversification	$2n^2$	$2n^2$
Phase (2) diversification	$Dn^2$	$4Dn^2 + Dn(\frac{n+1}{2})$
Phase (3) diversification	$2Dn^2$	$2Dn^3 + DCn$
Phase (4) intensification	$DCq n^2$	$DCq n(n+2)$

### 4. Performance

On considérera un nombre d'antenne  $N=5$  identique en émission et en réception. La matrice de canal possède des entrées gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de variance unitaire. Le codage MIMO est de rendement plein c'est à dire qu'à chaque temps symbole un symbole  $S_i$  différent est émis sur chaque antenne.

Des résultats en terme de TEB en fonction du rapport S/B pour une constellation MAQ4 sont présentés pour les différents algorithmes ZF, MMSE, PIC, SD et HISD (cf. fig. 4). Pour le HISD les résultats sont présentés en fonction du nombre de directions  $D$  et du nombre de points candidats sélectionnés  $C$ . Les résultats du HISD à  $10^{-4}$  sont dégradés de seulement 0,25 dB par rapport à l'optimum (SD) mais présentent un gain de 2,25 dB par rapport au SDP [6] et au PIC [4].

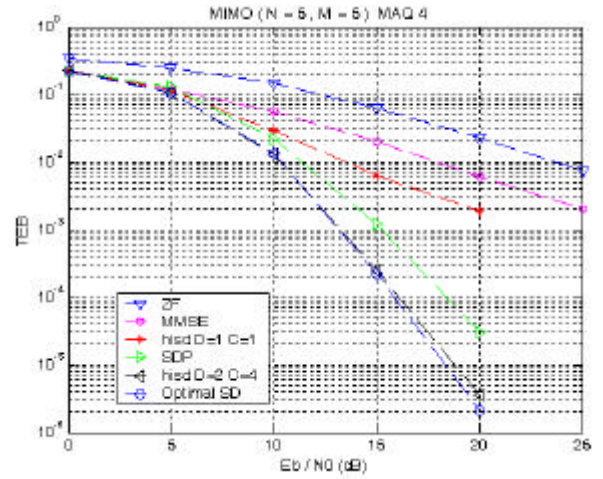


FIG. 4 : Taux d'Erreur Binaire pour un système MIMO 5x5

### 5. Conclusion

Dans cet article une nouvelle méthode le HISD pour résoudre le problème « NP-complet »  $y = Hx+b$  est appliquée aux transmissions de type MAQ en MIMO. En utilisant une approche géométrique qui utilise les directions des axes de bruits dominants obtenus par une décomposition SVD de la matrice du canal, cette méthode offre des performances significatives par rapport aux algorithmes sous optimaux existants comme les décodeurs SDP and PIC. De plus, l'algorithme HISD est implantable aisément sur un composant hardware de type FPGA grâce à un parallélisme inhérent à sa structure. Des essais très prometteurs sur des modulations à un nombre d'état plus important (MAQ16, MAQ64) sont en cours. De plus, une version à sortie souples est actuellement testée. Enfin le HISD peut-être adapté à d'autres problèmes de même type comme le décodage MC-CDMA [3].

### Références

- [1] G. J. Foschini. *Layered Space-Time Architecture for Wireless Communication in a Fading Environment when Using Multiple Antennas*. Bell Labs Technical Journal, 1(2):41-59, Autumn 1996.
- [2] E. Viterbo and J. Boutros. *A universal lattice code decoder for fading channels*. IEEE Trans. on Inf. Theory, pp. 1639-1642, July 1999.
- [3] A. Nafkha, C. Roland, E. Boutillon. *A Near-optimal Multiuser Detector for MC-CDMA Systems using Geometrical Approach*. ICASSP'05, Philadelphia, March 2005.
- [4] S. Moshavi. *Multi-user Detection for DS-SS Communications*. IEEE Communications Magazine, pp. 124-136, Oct. 1996.
- [5] H. Artes, D. Seethaler, F. Hawatsch. *Efficient Detection Algorithms for MIMO Channels: A Geometrical Approach to Approximate ML Detection*. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 51 (2003), 11; 2808 - 2820.
- [6] P. Huitian and L. K. Rasmussen. *The application of semidefinite programming for detection CDMA*. IEEE Select. Areas Commun., vol. 19, pp. 1442-1449, Aug. 2001.
- [7] S. Verdú, "Optimum Multiuser Signal Detection in Gaussian Noise is NP-hard," Abs. 1985 IEEE Int. Symp. Information Theory, p. 75, Brighton, UK, June 1985.