

Déconvolution avec contraintes de positivité et de support

Sources ponctuelles sur source étendue

Jean-François GIOVANNELLI¹ et Alain COULAIS²

¹LSS, (CNRS-Supélec-UPS) Supélec, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

²LERMA, Observatoire de Paris, 61 Avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France
giova@lss.supelec.fr, alain.coulais@obspm.fr

Résumé – Le travail proposé concerne la synthèse de Fourier, la déconvolution et l'interpolation/extrapolation spectrale pour une application en interférométrie. Il est spécifique au cas où l'objet recherché est la superposition d'un ensemble de points brillants à un fond spatialement étendu. Il est également spécifique au cas où les objets recherchés sont positifs et confinés dans un support connu. L'originalité repose sur l'estimation conjointe de deux cartes, de manière cohérente avec les données, les contraintes et les propriétés de chaque carte. La question est abordée dans le cadre de l'inversion bayésienne par maximum *a posteriori* : la solution est construite comme minimisant un critère régularisé contraint. Nous avons envisagé plusieurs optimiseurs et nous avons retenu un algorithme de lagrangien augmenté. Une première évaluation est proposée sur des données simulées et réelles (du radio-héliographe de Nançay) : elle montre une capacité effective à déconvoluer et à séparer les deux composantes simultanément tout en respectant les contraintes de positivité et de support. Le caractère haute résolution est également mis en évidence.

Abstract – The paper deals with Fourier synthesis, deconvolution, and spectral interpolation/extrapolation, in the field of interferometry. It is specifically devoted to imaging a set of point sources superimposed to an extended component and to positive maps with prescribed support. Its originality lies within joint estimation of the two components, coherently with data, properties of each component, positivity and support. The subject is addressed as an inverse problem within a Bayesian framework: the estimated maps are defined as the constrained minimizer of a regularized least-squares criterion. We have investigated several options for the minimization and we have selected an augmented Lagrangian algorithm. Evaluation is carried out using simulated and real data demonstrating the capability to accurately separate the two components.

1 Introduction et modèle instrument

Le point de départ de ce travail est un problème d'interférométrie radio pour l'observation du soleil. L'étude du soleil et notamment de son atmosphère (couronne solaire) répond à des préoccupations de la physique fondamentale et des préoccupations pratiques concernant son influence sur l'environnement terrestre. Ces observations, dans le domaine des ondes métriques, sont réalisées par des interféromètres tels que celui de Nançay. Ce type d'instrument permet en effet d'obtenir un pouvoir séparateur élevé c-à-d de construire des images de résolution angulaire adéquate, grâce à un réseau d'antennes. Les signaux collectés par deux antennes pointant dans la même direction sont intercorrélés afin de construire une visibilité, *i.e.*, un échantillon de la transformée de Fourier de l'image du ciel. En exploitant plusieurs couples d'antennes, on mesure un ensemble de valeurs de cette transformée de Fourier [1]. En pratique, le remplissage du domaine de Fourier (la couverture fréquentielle) est très lacunaire ce qui constitue la difficulté majeure de la reconstruction d'image. De ce point de vue, le problème posé est celui de la synthèse de Fourier et la littérature sur le sujet est vaste notamment en astronomie [2].

Le système d'observation se modélise (en 1D) par une transformée de Fourier (discrète et régulière) tronquée et bruitée :

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (1)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ est la carte inconnue, \mathbf{y} et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^M$ sont les vecteurs des visibilités et du bruit. \mathbf{F} est la matrice de Fourier discrète ($N \times N$) et \mathbf{T} une matrice de troncature ($M \times N$), binaire

caractérisant la couverture. La reconstruction de \mathbf{x} à partir de \mathbf{y} , *i.e.*, l'inversion de (1) est un problème de synthèse de Fourier.

Dans (1), les données \mathbf{y} sont fréquentielles et la carte \mathbf{x} est spatiale. On peut donner deux autres écritures : l'une entièrement fréquentielle et l'autre entièrement spatiale.

1. Par le changement de variable $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x}$, (1) devient une simple troncature dans le domaine de Fourier et son inversion devient un problème d'extrapolation des visibilités « absentes », généralement dans les hautes fréquences.
2. Par ailleurs, en notant $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{T}^t \mathbf{y}$ la transformée de Fourier des données complétées par des zéros (la *dirty map*), (1) devient une convolution circulante et la réponse instrumentale est appelé le *dirty beam*. Son inversion pose un problème de déconvolution.

Dans les trois cas, il s'agit de modèles linéaires à bruit additif de rang déficient puisque le nombre de visibilités est très inférieur au nombre de pixels. En conséquence, pour tout jeu de données \mathbf{y} , il existe une infinité de cartes \mathbf{x} vérifiant $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x}$. La *dirty map* est une de ces cartes et on obtient les autres en \mathbf{y} ajoutant des cartes ne possédant que des composantes fréquentielles hors de la couverture. La sélection d'une solution passe donc par la prise en compte d'information *a priori* sur la carte recherchée. Nous utilisons pour cela les techniques d'inversion bayésienne [3] permettant d'interdire ou de défavoriser les solutions indésirables. La méthode proposée repose sur la construction d'une loi *a posteriori* et sa maximisation. Elle est en cours de publication, sous forme plus détaillée dans [4].

2 Inversion spécifique

Le travail proposé est spécifique au cas où la carte inconnue se présente comme la superposition de deux composantes :

- *Source Ponctuelle* (SP) : une composante \mathbf{x}_p essentiellement nulle avec quelques valeurs importantes
- *Sources Étendue* (SE) : une composante \mathbf{x}_e spatialement étendue, plutôt régulière,

et le vrai ciel s'écrit alors comme la somme des deux :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \mathbf{x}_p .$$

Cette idée clé a déjà été exploitée en astronomie par [5, 6] (sous forme paramétrique) et dans d'autres domaines [7, 8]. Elle fait apparaître de nouvelles indéterminations puisqu'il s'agit d'estimer maintenant $2N$ variables, toujours à partir d'un seul jeu de M visibilités. Cependant, elle permet d'introduire de manière explicite des informations caractéristiques de chacune des cartes par l'intermédiaire de deux lois *a priori* adaptées.

Le travail proposé est également spécifique au cas où les cartes inconnues sont positives et respectent un support connu. Ces informations se traduisent naturellement par des contraintes d'appartenance pour les pixels. On note \mathcal{M} l'ensemble des pixels de la carte, \mathcal{S} l'ensemble des pixels d'un support et $\bar{\mathcal{S}}$ son complémentaire dans \mathcal{M} .

- (C_p) : positivité

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad x_p(p) \geq 0 \quad \text{et} \quad x_e(p) \geq 0 .$$

- (C_s) : support

$$\forall p \in \bar{\mathcal{S}}, \quad x_p(p) = 0 \quad \text{et} \quad \forall p \in \bar{\mathcal{S}}, \quad x_e(p) = 0 .$$

La méthode proposée prend en compte la connaissance d'un support pour chacune des deux cartes.

Dans tous les cas, le couple de carte solution est défini comme minimiseur d'un critère régularisé noté J , sous les contraintes C_p et C_s , c-à-d comme solution du problème (\mathcal{P}) :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min J(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_e) \\ \text{s.c. } C_p, C_s \end{cases} \quad (2)$$

Dans ce schéma, une propriété est alors cruciale pour J :

- (P_1) : J est strictement convexe et différentiable.

En effet, sous cette hypothèse,

1. le problème possède une solution unique, ce qui permet de définir proprement le couple de cartes estimé ;
2. une large classe d'algorithmes classiques est disponible pour le résoudre.

Dans ce cadre, nous avons envisagé plusieurs schéma d'optimisation. Il s'agit de divers algorithmes de résolution de (\mathcal{P}) tous convergeant et garantissant l'obtention de l'unique solution, et ce, indépendamment de l'initialisation. La seule question en jeu est celle du temps de calcul. Une autre propriété de J est alors intéressante :

- (P_2) : J est quadratique et à symétrie circulaire.

Cette propriété permet de mettre en œuvre des algorithmes d'optimisation rapides exploitant la FFT, notamment pour le calcul explicite de certaines solutions intermédiaires. Nous nous limitons donc à des termes de régularisation circulants et des fonctions potentiels quadratiques (ou linéaires).

2.1 Carte large bande

La carte des sources ponctuelles est une composante large bande, occupant l'ensemble du domaine de Fourier, et non une composante haute fréquence, contrairement à une idée fausse qui semble pourtant répandue et tenace. Elle est naturellement décrite par une loi séparable, c-à-d un bruit blanc. Dans cette famille, notre choix s'est porté vers la loi exponentielle qui réalise un compromis intéressant. Elle permet d'assurer les propriétés (P_1) et (P_2). Elle favorise les pixels nuls, grâce à un potentiel possédant un minimum et une dérivée strictement positive à l'origine. Il s'agit de plus d'une loi à plus lourde queue que la gaussienne, favorisant ainsi l'apparition de d'événements plus rares. Le potentiel s'écrit :

$$R_s(\mathbf{x}_p) = \sum x_p(p) .$$

Tel qu'il est écrit ici, nous assurons la convexité de J mais pas au sens strict. [4] donne plus de détail sur cette question.

2.2 Carte basse fréquence

La carte étendue est au contraire une composante évoluant lentement, et occupant essentiellement les basses fréquences. Le champ choisi pour la décrire est naturellement corrélé et pour respecter les propriétés (P_1) et (P_2) il est choisi gaussien. Le terme d'interaction entre pixels voisins de la carte \mathbf{x}_e s'écrit

$$R_c(\mathbf{x}_e) = \sum [x_e(p+1) - x_e(p)]^2 ,$$

avec $x_e(0) = x_e(N)$ afin d'assurer la circularité [9].

2.3 Capacité de séparation

Remarque 1 — *Les deux cartes possèdent des composantes aux basses fréquences : la carte des sources ponctuelles s'étend sur l'ensemble de l'espace de Fourier et la carte étendue occupe les basses fréquences.*

Du point de vue bayésien, la capacité à séparer les deux composantes repose sur le choix des lois *a priori* pour chacune des deux. Ces choix se distinguent par deux caractères : la dépendance et la forme de la loi.

- Le modèle est séparable et possède une lourde queue pour la carte impulsionnelle.
- Le modèle est corrélé et gaussien pour la carte étendue.

2.4 Optimisation

En pratique, le couple de carte solution ($\widehat{\mathbf{x}}_e, \widehat{\mathbf{x}}_p$) s'obtient numériquement par l'optimisation sous contrainte d'un critère régularisé quadratique. Nous avons envisagé plusieurs options algorithmiques [10, 11] qui garantissent l'obtention de l'unique minimiseur du critère. Nous avons finalement retenu un algorithme de lagrangien augmenté particulièrement adapté à notre situation. Il n'est pas décrit ici et on pourra consulter [4] pour avoir plus de détails.

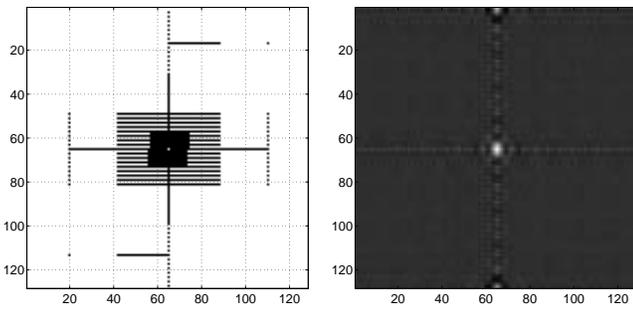


FIG. 1 – La figure de gauche présente la couverture fréquentielle (contenant 569 coefficients de Fourier, le double par symétrie hermitienne). Les points noirs repèrent le lieu des coefficients de Fourier observés. Le réseau d’antenne Est-Ouest (resp. Nord-Sud) est représenté verticalement (resp. horizontalement). La figure de droite présente le *dirty beam*.

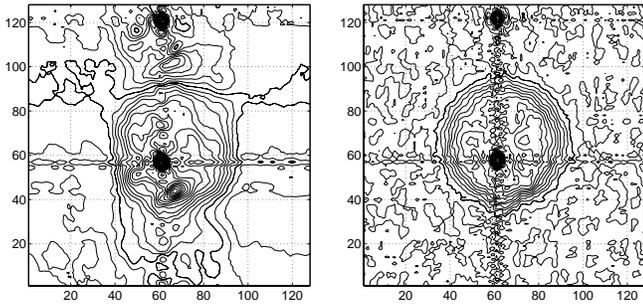


FIG. 2 – *Dirty map*. A gauche, données réelles (NRH, 6 juin 2004 vers 13h, 236 MHz). A droite, simulation imitant la situation réelle. Les lignes de niveau vont de -10^{-2} à $5 \cdot 10^{-2}$ avec un pas de $2.5 \cdot 10^{-4}$ (communes à toutes les cartes présentées).

3 Résultats de traitement

3.1 L’instrument et l’objet

Le radio-héliographe de Nançay (NRH) est un interféromètre dédié à la couronne solaire en ondes métriques, entre 150 et 450 MHz environ. L’instrument réalise quotidiennement jusqu’à 10 observations par seconde simultanément dans plusieurs bandes afin de suivre les phénomènes rapides dans la couronne. En simplifiant à l’extrême, le champ de vue de l’instrument est de l’ordre de 1° et sa résolution de l’ordre de $4'$.

La couronne ainsi observée présente des caractéristiques désormais bien connues. La composante de plus grande dimension spatiale est de l’ordre de $1/3$ à $2/3$ du champ de vue ; elle est de forme relativement stable à l’échelle de la journée. Ses bords ne sont pas abrupts et peuvent évoluer dans le temps, à l’équateur à cause des sources variables et vers les pôles à cause de la contrepartie radio des trous coronaux [12]. Il existe un certain nombre de structures d’échelle intermédiaire, en surbrillance ou en dépression sur la structure à grande échelle. S’ajoutent enfin, quelques sources quasi-punctuelles, en général non résolues et très variables en position, en forme et en flux à l’échelle de la seconde. Depuis la jouvence du NRH en 1997, il est désormais assez aisé de suivre des échanges de flux entre ce type de sources à des échelles allant de la seconde à l’heure.

Sur un plan scientifique, ces structures témoignent de phéno-

mènes physiques dans la couronne, notamment l’émission liée aux électrons piégés dans les arches de champ magnétiques.

3.2 Traitements proposés

Nous sommes partis d’un jeu de données réelles extrait d’observations standards réalisées par le NRH ; nous avons ensuite construit un jeu de données simulées imitant au mieux ces données réelles. Les « cartes vraies » du cas simulé sont présentées sur la Fig. 3 et les deux *dirty map* sont présentées sur la Fig. 2. Dans les deux cas, le mélange de structures issues de la convolution du *dirty beam* riche en secondaires et des deux types de sources (ponctuelle et étendue) forment un cas très complexe à démêler. Nous montrons dans la suite que dans les deux cas les effets de l’instrument sont pourtant largement inversés.

Nous avons choisi les supports pour chacune des deux cartes (impulsionnelle et étendue) et il sont aisés à déterminer à partir de la *dirty map* et des dimensions du soleil calme (suffisamment bien connues à chaque fréquence). Enfin, une étude empirique, par essais et erreurs, nous a permis de calibrer les hyperparamètres (au nombre de deux) de manière à assurer la séparation des deux composantes. Ces paramètres et supports ont été utilisés pour traiter les deux jeux de données (réels et simulés).

3.2.1 Données simulées

Les reconstructions à partir des données simulées sont présentées sur la Fig. 3. La reconstruction de la carte des sources étendues est très satisfaisante, car les erreurs sont désormais en deçà de 5%, alors qu’avec des techniques alternatives, on les estimait entre 10 à 7% (et à partir de données sans sources punctuelles). Cette évolution est notable dans la perspective de bien contraindre certains modèles physiques de la couronne.

Les sources punctuelles sont elles aussi bien reconstruites : positions, amplitudes, largeurs et rapports de flux sont restitués de manière fidèle. Dans le cas simulé présenté ici les sources sont de plus correctement séparées alors qu’elles ne le sont pas dans la *dirty map*.

3.2.2 Données réelles

Les reconstructions à partir des données réelles (cf. Fig. 2-a) sont présentées sur la Fig. 4. Le comportement de la méthode est semblable sur les données réelles et sur les données simulées. La séparation entre les deux composantes est assurée et chacune des deux est clairement déconvoluée. La positivité et les supports sont également respectés.

Nous obtenons ce type de résultats de manière routinière sur de nombreuses cartes à 164 et 236 MHz. En revanche, la situation est moins claire en ce qui concerne les observations à 327 et 410 MHz et nous travaillons à clarifier la situation.

Remarque 2 — *Une habitude bien ancrée dans une partie de la communauté astro consiste à reconvoluer la carte obtenue par le lobe propre (lobe gaussien ajusté à la dirty beam). Tel n’est pas le cas ici.*

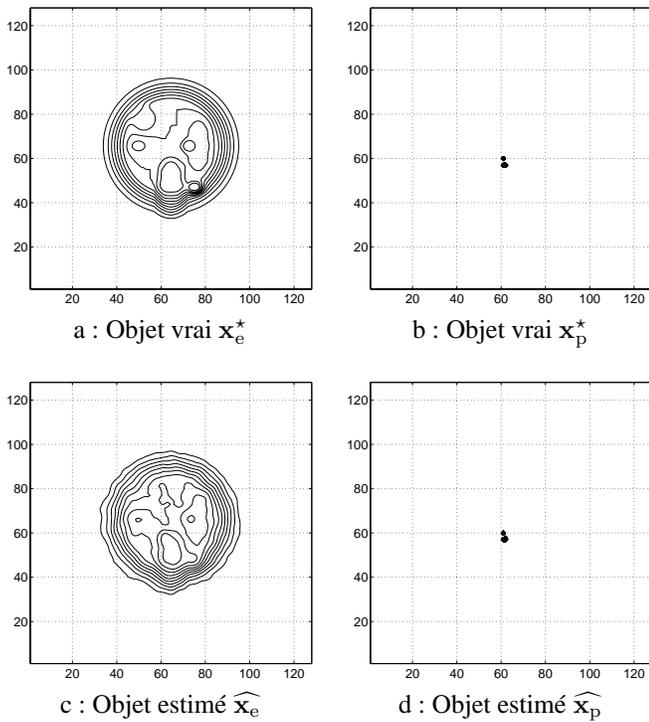


FIG. 3 – Traitement de données simulées (cf. Sect. 3.2.1). Sur les deux figures supérieures, sont représentés les objets vrais x_e^* (a) et x_p^* (b). Sur les deux figures inférieures, sont représentés l’estimation \widehat{x}_e (c) et l’estimation \widehat{x}_p (d). La *dirty map* est en Fig. 2-b. Les niveaux sont les mêmes que pour les Fig. 2 et 4.

4 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé un outil possédant une capacité effective à déconvoluer et à séparer deux composantes simultanément tout en respectant les contraintes de positivité et de support. Nous avons proposé une première évaluation de la méthode à la fois sur des données simulées et sur des données réelles. Nous montrons également une capacité haute résolution qui reste à qualifier plus complètement. Ces résultats sont très clairement meilleurs que ceux obtenus par des outils plus standards [2] (Clean, Clean multi-résolution ou MaxEnt) et une évaluation comparative plus étoffée est dans nos projets.

Actuellement, nous finalisons l’intégration de la méthode dans le logiciel préparant à l’exploitation scientifique des observations du NRH. Les cas à basses fréquences (< 300 MHz) sont assez bien maîtrisés aujourd’hui, mais les cas à plus hautes fréquences (> 300 MHz) sont plus délicats. Par ailleurs, nous tenons à la disposition de la communauté les codes (IDL/GDL et Matlab/Octave) ainsi que les signaux test, en vue d’échanges et de comparaisons, d’autant que l’imagerie par radio-interférométrie demeure un domaine riche en défis.

Concernant les évolutions de la méthode, plusieurs pistes sont possibles. L’une concerne d’autres potentiels utilisés en reconstruction d’images [3] : des potentiels convexes [13] (resp. non convexes) permettent de *préserv*er (resp. *dé*tecter) des contours ou des impulsions et nous paraissent susceptibles d’apporter un gain notable à la qualité des cartes.

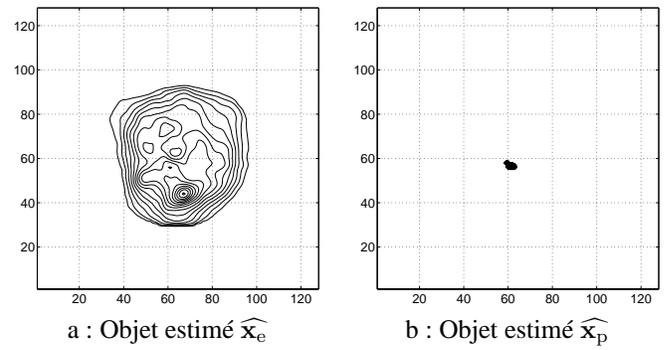


FIG. 4 – Traitement de données réelles (cf. Sect. 3.2.2). Les deux composantes restaurées sont représentées \widehat{x}_e (a) et \widehat{x}_p (b). La *dirty map*, est en Fig. 2-a. Les niveaux sont les mêmes que pour les Fig. 2 et 3.

Références

- [1] A. R. Thompson, J. M. Moran et G. W. J. Swenson, *Interferometry and Synthesis in Radio-astronomy*, Wiley (Interscience), New York, NY, 2001.
- [2] J.-L. Starck, E. Pantin et F. Murtagh, « Deconvolution in astronomy : a review », *Publication of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 114, pp. 1051–1069, October 2002.
- [3] J. Idier, Ed., *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*, Traité IC2, Série traitement du signal et de l’image, Hermès, Paris, 2001.
- [4] J.-F. Giovannelli et A. Coulais, « Positive deconvolution for superimposed extended source and point sources. », *Astron. Astrophys.*, à paraître, 2005.
- [5] P. Magain, F. Courbin et S. Sohy, « Deconvolution with correct sampling », *The Astrophysical Journal*, vol. 494, pp. 472–477, February 1998.
- [6] N. Pirzkal, R. N. Hook et L. B. Lucy, « GIRA – Two channel photometric restoration », in *ASP Conference Series, Astronomical Data Analysis, Software, and Systems IX*, N. Manset, C. Veillet et D. Crabtree, Eds., 2000, vol. 216, pp. 657–660.
- [7] P. Ciuciu, J. Idier et J.-F. Giovannelli, « Regularized estimation of mixed spectra using a circular Gibbs-Markov model », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, N° 10, pp. 2201–2213, October 2001.
- [8] V. Samson, F. Champagnat et J.-F. Giovannelli, « Detection of point objects with random subpixel location and unknown amplitude », *Applied Optics Special Issue on Image processing for EO sensors*, May 2003.
- [9] B. R. Hunt, « Bayesian methods in nonlinear digital image restoration », *IEEE Trans. Communications*, vol. C-26, pp. 219–229, March 1977.
- [10] J. Nocedal et S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Series in Operations Research. Springer Verlag, New York, 2000.
- [11] J. C. Gilbert, *Optimisation Différentiable : Théorie et Algorithmes*, Notes de cours. INRIA, Rocquencourt, 1999.
- [12] P. Lantos et C. E. Alissandrakis, « Coronal sources at meter and optical wavelengths during the declining phase of the solar cycle », *Solar Physics*, vol. 165, pp. 83–98, April 1996.
- [13] L. Mugnier, T. Fusco et J.-M. Conan, « MISTRAL : a myopic edge-preserving image restoration method, with application to astronomical adaptive-optics-corrected long-exposure images », *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 21, N° 10, pp. 1841–1854, October 2004.