

Égalisation fréquentielle sous-optimale d'un système mono ou multiporteuse

Carine SIMON¹, Sylvie MAYRARGUE², Juan José DAÑOBEITIA CANALES¹

¹UTM, CSIC. Passeig Maritim de la Barceloneta, 37. 08003 Barcelona. ESPAGNE

²CEA-LETI. 17, rue des Martyrs. 38000 Grenoble FRANCE

csimon@utm.csic.es, sylvie.mayrargue@cea.fr, jjdanobeitia@utm.csic.es

Résumé – Une méthode itérative d'estimation de symboles peu complexe, dans le cas de systèmes mono ou multi-porteuses avec préfixe cyclique est présentée. On profite de la structure particulière du canal convolutif inconnu ainsi que l'appartenance des symboles à un alphabet fini. La technique présentée est une technique de minimisation au sens des moindres carrés puis de projection. Elle s'avère peu coûteuse et efficace dans les problèmes de détection et d'estimation, même dans le cas de signaux bruités.

Abstract – We present a low complexity iterative method for estimation of symbols in mono or multicarrier systems where cyclic prefixes are combined to data symbols. We take advantage of the special structure of unknown convolutive channels of such systems and of the fact that the symbols belong to a finite alphabet. The presented technique is a minimum mean squared technique followed by a projection. Even in a noisy environment, it gives good results for detection and estimation.

1 Introduction

Parmi les techniques de transmission, celles utilisant des préfixes cycliques ont soulevé un intérêt considérable, en particulier dans le contexte des réseaux locaux mobiles ou la diffusion vidéo. En effet, utiliser des systèmes dans lesquels les symboles de données sont combinés avec des préfixes cycliques (CP) plus longs que le canal à réponse impulsionnelle finie est un moyen efficace d'éviter les problèmes d'interférence entre symboles. Le remplissage par symboles connus (ou « known symbol padding ») est une structure équivalente où le CP est connu. C'est cette dernière qui sera utilisée dans cette étude mais pour l'utilisation d'un préfixe inconnu, il suffit de changer la méthode d'initialisation de l'estimation du canal.

Dans cette communication, on part d'un système de transmission par blocs monoporteuse avec un canal multichemin stationnaire qui est supposé convolutif et inconnu. Ce modèle s'étend directement à un système de transmission par bloc multiporteuse, de type OFDM (« orthogonal frequency decision multiplexing »).

Dans ce contexte, on étudie une technique itérative d'estimation de symboles qui utilise la structure cyclique spécifique de la transformée de Fourier rapide (FFT) du canal convolutif ainsi qu'une projection sur l'alphabet fini BPSK (« Binary Phase Shift Keying ») auquel appartiennent les données.

Des détails sur le modèle étudié sont présentés au deuxième paragraphe. Le troisième paragraphe explique la méthode proposée, partant de [2] et l'améliorant. Plusieurs manières d'utiliser au mieux la structure de notre système et ainsi d'augmenter la qualité des résultats sont proposées au quatrième paragraphe. Avant de conclure, le paragraphe 5 résume l'algorithme puis le sixième paragraphe montre un certain nombre de simulations, comparant notre technique à celle proposée par [2].

2 Modèle

Le canal de transmission convolutif est d'ordre L : $h = [h_1, \dots, h_L]^T$ où T représente la transposée. La séquence transmise est de la forme $\mathbf{x} = [\mathbf{t} \mathbf{s}^1 \mathbf{t} \dots \mathbf{s}^V \mathbf{t}]$ où $\mathbf{t}$ est le préfixe cyclique de taille M et $\mathbf{s}^k$ est le $k^{\text{ème}}$ bloc de données pour $k = 1, \dots, V$: $\mathbf{s}^k = [s_{kB+1}, \dots, s_{k(B+1)}] : B \times 1$. Les symboles sont de type BPSK. Pour traiter le cas multiporteuse, les symboles transmis se trouvent dans le domaine fréquentiel.

On pose $P = B + M$. Les séquences d'observation au récepteur sont de la forme : $y_i = \sum_{l=0}^L h_l x_{i-l} + n_i$ où n_i est un bruit considéré blanc et Gaussien. On peut réécrire le modèle de façon matricielle en définissant $\mathbf{y}^n = [y_{M+(n-1)P+1}, \dots, y_{M+nP}]$. En omettant le premier $\mathbf{t}$, on pose encore :

$$\begin{aligned} Y &= [(\mathbf{y}^1)^T \dots (\mathbf{y}^V)^T] : P \times V \\ X &= \begin{bmatrix} (\mathbf{s}^1)^T & \dots & (\mathbf{s}^V)^T \\ \mathbf{t} & \dots & \mathbf{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ t_V \end{bmatrix} : P \times V \end{aligned} \quad (1)$$

On définit la matrice du canal $P \times P$ H_c circulante Töplitz :

$$H_c = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & 0 & h_L & \dots & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & h_L & \dots & h_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_L & \dots & & h_0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & h_L & \dots & h_0 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & h_L & \dots & & h_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

En définissant le bruit N de la même manière que Y (équation (1)), le modèle peut être réécrit :

$$Y = H_c X + N \quad (3)$$

Comme la matrice du canal est circulante, elle devient diagonale dans la base vectorielle de Fourier : $H_f = \mathcal{F}_P H_c \mathcal{I}_P$ où

$(\mathcal{F}_P)_{kn} = P^{-1/2}e^{-\frac{2i\pi kn}{P}}$ et $(\mathcal{I}_P)_{kn} = P^{-1/2}e^{\frac{2i\pi kn}{P}}$. On a alors $Y = \mathcal{I}_P H_f \mathcal{F}_P X + N$ ou encore

$$Y_f = H_f X_f + N_f \quad (4)$$

avec $A_f = \mathcal{F}_P A$ pour $A = X, Y, N$.

3 Méthode

Lorsque le bruit additif est blanc et Gaussien la méthode de maximum de vraisemblance est optimale ; elle consiste en la minimisation conjointe au sens des moindres carrés suivante :

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} \|\mathbf{y} - \mathbf{h}\mathbf{x}\|^2 \quad (5)$$

Cette méthode étant très coûteuse, on utilise souvent des techniques sous-optimales. La méthode des moindres carrés itérative avec projection (ILSP ou « Iterative Least Square with Projection », cf [1] par exemple) consiste à minimiser cette fonction alternativement par rapport au canal et par rapport aux symboles.

Pour notre application, on utilisera le fait que les données appartiennent à un alphabet fini en projetant les symboles estimés sur l'alphabet BPSK après leur estimation.

3.1 Estimation du canal

Comme la FFT est bijective, la minimisation par rapport à $\mathbf{h}$ est équivalente à la minimisation suivante : $\min_{H_f} \|Y_f - H_f X_f\|^2$. Et comme H_f est diagonal, on peut découpler ce problème en :

$$\min_{H_f(j,j)} \|Y_f(j,:) - H_f(j,j)X_f(j,:)\|^2 \quad \forall j \quad (6)$$

Ici et dans ce qui suit, la norme 2 est utilisée pour les vecteurs, la norme de Fröbenius pour les matrices et $A(j,:)$ représente la $j^{\text{ème}}$ ligne de toute matrice A .

[2] utilisent directement (6) et obtiennent l'estimation suivante du canal : $\hat{H}_f^{-1}(j,j) = X_f(j,:)Y_f(j,:)'[Y_f(j,:)Y_f(j,:)]^{-1}$ où $'$ dénote le transconjugué.

On peut cependant affiner cette estimation en utilisant la structure particulière de H_f . Si H_v est le vecteur des éléments diagonaux de H_f , on peut montrer que

$$H_v = C\mathbf{h} \quad (7)$$

où les éléments de C (de taille $P \times (L+1)$) sont $C_{nm} = e^{-\frac{2i\pi m(n-1)}{P}}$. [4] ont également utilisé cette propriété mais ensuite une technique d'EM (expectation maximisation) bien plus coûteuse que celle que nous allons développer ci-dessous.

On calcule la norme dans (6) :

$$\begin{aligned} & \|Y_f(j,:) - H_f(j,j)X_f(j,:)\|^2 \\ &= Y_f(j,:)Y_f(j,:)' - C(j,:)\mathbf{h}X_f(j,:)Y_f(j,:)' \\ & \quad - Y_f(j,:)\mathbf{h}'C(j,:)'X_f(j,:)' \\ & \quad + C(j,:)\mathbf{h}X_f(j,:)X_f(j,:)'C(j,:)\mathbf{h}' \end{aligned} \quad (8)$$

et sa minimisation par rapport à $h_m \forall m$,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial h'_m} \|Y_f(j,:) - H_f(j,j)X_f(j,:)\|^2 \\ &= -Y_f(j,:)C(j,m)'X_f(j,:)' \\ & \quad + C(j,:)\mathbf{h}C(j,m)'X_f(j,:)X_f(j,:)' \end{aligned} \quad (9)$$

En vectorisant ce résultat, on obtient :

$$\hat{\mathbf{h}} = (C' \text{diag}(\langle X_f, X_f \rangle) C)^{-1} C' \langle Y_f, X_f \rangle \quad (10)$$

où $\langle A, B \rangle = \text{diag}(AB')$ et, suivant les notations de Matlab, si V est une matrice $\text{diag}(V)$ est le vecteur de ses éléments diagonaux ; inversement, si V est un vecteur, $\text{diag}(V)$ est une matrice diagonale avec les éléments de V sur sa diagonale principale.

Comme $C' \text{diag}(\langle X_f, X_f \rangle) C$ est une matrice hermitienne Töplitz, on note qu'elle est aisément inversible.

3.2 Estimation des symboles

On pose $\mathcal{I}_{BP} = \mathcal{I}_P(1 : B, :)$. En utilisant la caractère diagonal de H_f , on obtient l'estimation des symboles suivante :

$$\hat{S} = \mathcal{I}_{BP} \hat{H}_f^{-1} Y_f \quad (11)$$

La dernière étape est une projection sur l'alphabet fini BPSK.

4 Améliorations

Dans cette partie, quelques idées sont proposées afin d'améliorer cette méthode, utilisant au mieux les données dont nous disposons et estimant la variance du bruit.

4.1 Estimation de la variance du bruit

On suggère ici de remplacer l'estimation par forçage à zéro (11) par une estimation des symboles par minimisation au sens des moindres carrés. Pour cela, on suppose que le bruit blanc Gaussien est de variance constante σ_n^2 . On peut montrer que l'estimée de cette variance $\hat{\sigma}_n^2 = \bar{\sigma}_y^2 - \|\hat{\mathbf{h}}\|^2$ où $\bar{\sigma}_y^2 = \sum_{k=1}^V \text{var}(\mathbf{y}^k)$. En effet, lors des simulations, on s'est aperçu qu'en deux itérations, on obtient une bonne estimation du canal. L'estimation de σ_n^2 est donc suffisamment précise dès la deuxième itération pour pouvoir être utilisée.

La variance du bruit reste inchangée par FFT. On modifie alors (11) de la manière suivante :

$$\hat{S} = \mathcal{I}_{BP} (\hat{H}_f' \hat{H}_f + \hat{\sigma}_n^2 I)^{-1} \hat{H}_f' Y_f \quad (12)$$

Cette idée est non seulement très attractive mais en plus très peu coûteuse : d'une part, on a besoin de calculer $\bar{\sigma}_y^2$ une seule fois et d'autre part, la matrice à inverser dans (12) reste diagonale.

4.2 Parties réelle et imaginaire

Comme les données sont réelles, on peut séparer le système d'équations (3) en ses parties réelle et imaginaire :

$$\begin{bmatrix} Y_{\mathcal{R}} \\ Y_{\mathcal{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{\mathcal{R}} \\ H_{\mathcal{I}} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} N_{\mathcal{R}} \\ N_{\mathcal{I}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

L'avantage d'utiliser ce système d'équations plutôt que (3) est qu'on a ainsi deux fois plus de degrés de liberté qu'au départ. Si on peut aisément montrer que (13) donne une estimation du canal équivalente à (3), on verra dans les simulations que l'utilisation de cette structure mène à une amélioration notable de l'estimation des symboles. Cette même idée est utilisée dans le domaine fréquentiel.

4.3 Réduction du bruit ?

Comme on connaît le CP et son estimée, il est tentant de réduire le bruit en déduisant sa partie due au CP. On va malheureusement montrer que ce n'est pas possible. De la même manière qu'on a estimé les symboles de données, on peut estimer la séquence d'entraînement (éq. 12) : $\hat{t}_V = \mathcal{I}_{MP} \hat{H}_f^{-1} Y_f$ où $\mathcal{I}_{MP}$ représente les M premières lignes de $\mathcal{I}_P$. Les définitions suivantes nous seront également nécessaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{PB} &= \mathcal{F}_P(:, 1 : B) & \mathcal{F}_{PM} &= \mathcal{F}_P(:, B + 1 : P) \\ S_f &= \mathcal{F}_{PB} S & t_{Vf} &= \mathcal{F}_{PM} t_V \end{aligned}$$

En supposant que $\hat{H}_f \simeq H_f$, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{t}_V - t_V \\ &= \mathcal{I}_{MP} H_f^{-1} (Y_f - H_f X_f) \\ &= \mathcal{I}_{MP} H_f^{-1} N_f \end{aligned} \quad (14)$$

Il semble donc naturel de remplacer Y_f par sa version moins bruitée : $Z_f = Y_f - H_f \mathcal{F}_{PM} \varepsilon_t$ dans (11). Cependant,

$$\begin{aligned} Z_f &= H_f \hat{S}_f + H_f \hat{t}_{Vf} - H_f \mathcal{F}_{PM} (\hat{t}_V - t_V) \\ &= H_f (S_f + \varepsilon_{Sf}) + H_f \hat{t}_{Vf} - H_f (\hat{t}_{Vf} - t_{Vf}) \\ &= H_f X_f + H_f \varepsilon_{Sf} \end{aligned} \quad (15)$$

où ε_{Sf} est l'erreur commise lors de l'estimation de S_f . En utilisant Z_f au lieu de Y_f dans (11), on peut ainsi voir qu'il n'y aura aucune amélioration : si $\varepsilon_S = \mathcal{I}_P \varepsilon_{Sf}$,

$$\begin{aligned} \hat{S}_Z &= \mathcal{I}_{BP} H_f^{-1} Z_f \\ &= \mathcal{I}_{BP} (X_f + \varepsilon_{Sf}) \\ &= S + \varepsilon_S \\ &= \hat{S} \end{aligned} \quad (16)$$

5 Résumé de l'algorithme

1. Calcul de la variance moyenne de l'observation.
2. Initialisation : des symboles de données aléatoires sont générés.
3. Estimation des coefficients du canal avec (10).
4. Si le nombre d'itérations est > 1 , estimation de la variance du bruit (cf section 4.1). Estimation des symboles (12) et projection sur l'alphabet BPSK.
5. Calcul de la différence entre l'estimation des symboles à cette itération et à l'itération précédente. Si elle est non nulle, retour à 3.

6 Simulations

Les simulations ont été faites avec un canal de Rayleigh. Les différentes dimensions utilisées sont les suivantes : $L = M = 5$, $V = 100$ et $P = 64$. On a fait 10000 simulations de Monté-Carlo pour un rapport signal à bruit allant de -10 à 20 dB par pas de 5dB (représenté sur l'axe x). Les figures suivantes montrent les résultats moyens relatifs à ces simulations.

Deux sortes de canaux ont été utilisés : le premier est un canal sélectif en fréquence ; le second vient d'un modèle proposé par France Télécom R&D [3]. Dans les figures, **meth** =

1 quand la technique de [2] a été utilisée, **meth** = 2 quand notre estimation de canal a été utilisée ; **noise** signifie qu'on a inclus $\hat{\sigma}_n$ dans l'estimation des symboles ; **RI** quand on a séparé les parties réelle et imaginaire de l'observation. Enfin **inHex** (resp. **inSex**) représente une itération de l'algorithme en initialisant le canal (resp. les symboles) à sa (resp. leur) vraie valeur. Pour **inHex**, toutes les variantes de **meth** = 2 donnent la même courbe tandis que pour **inSex**, les méthodes utilisant la décomposition RI donnent une même courbe tandis que les trois autres en donnent une autre. Pour chaque type

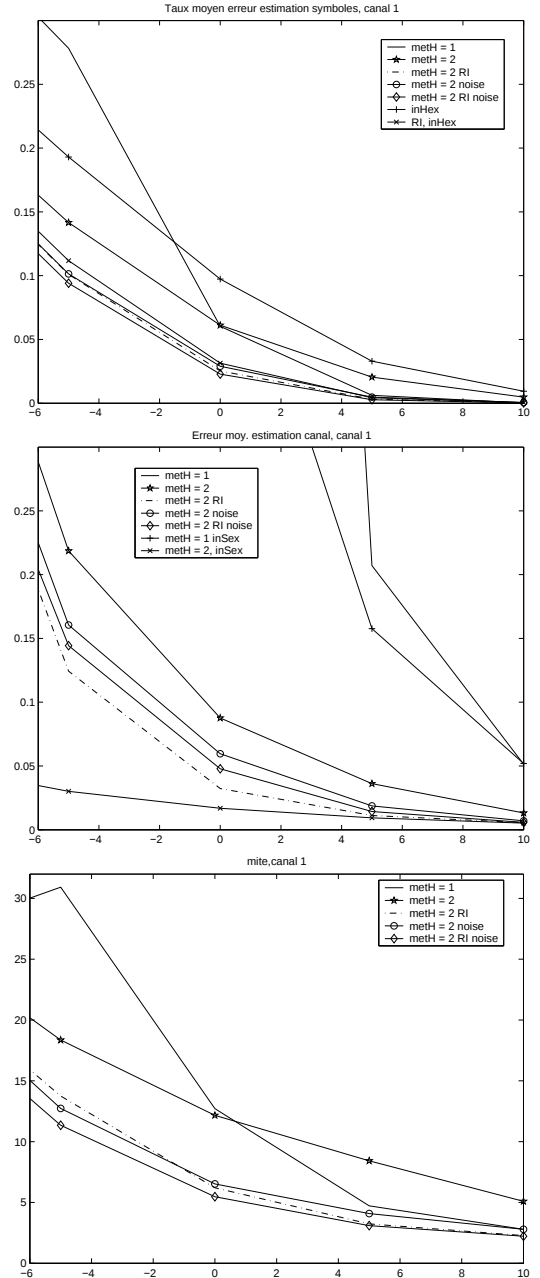


FIG. 1 – Erreurs moy. sur l'estimation des symboles, du canal et nombre moyen d'itérations, canal 1. Zoom de -5 à 10dB

de canal, sur la première figure, l'axe y représente la moyenne du taux d'erreur ; la deuxième figure donne l'erreur moyenne de l'estimation du canal normalisée : $\text{moy}(\|\hat{h} - h\|/\|h\|)$; la dernière donne une idée sur le nombre d'itérations moyen

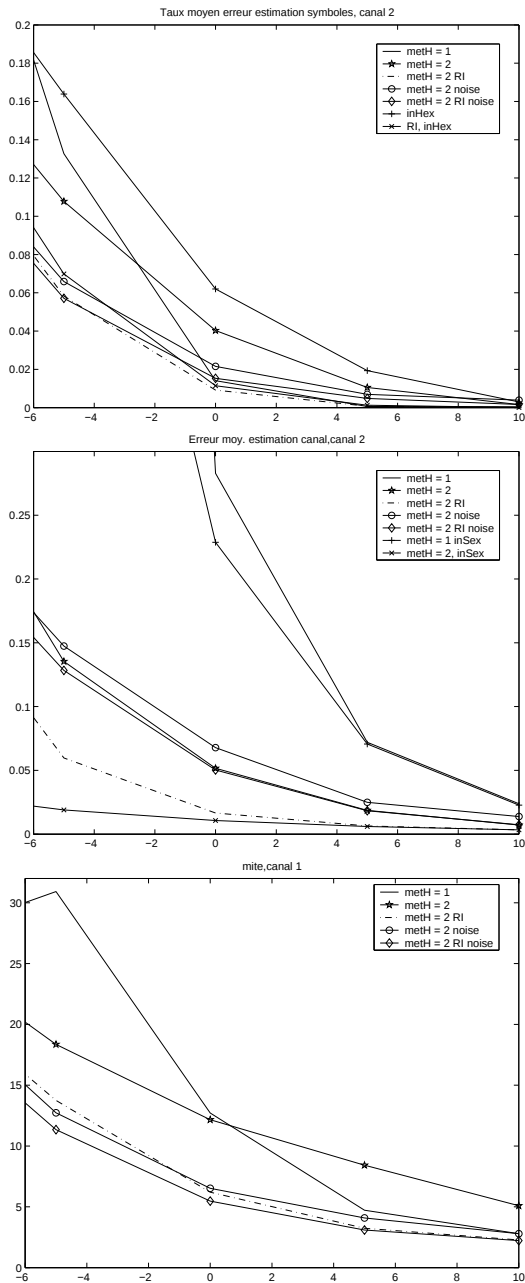


FIG. 2 – Erreurs moy. sur l'estimation des symboles, du canal et nombre moyen d'itérations, canal 2. Zoom de -5 à 10dB

nécessaire à la convergence des méthodes. Pour les trois aspects, notre méthode produit de biens meilleurs résultats que celle de [2]; dans le cas du taux d'erreur, cette conclusion est surtout vraie à partir d'une variance de bruit de 5dB. On note également une amélioration importante quand les parties réelles et imaginaires de Y sont séparées ainsi que lorsque on ajoute l'estimation du bruit (au niveau de l'estimation du canal et celle des symboles). Enfin, des courbes appelées **inHex** et **inSex** permettent de montrer la faiblesse inhérente à la méthode [2] par rapport à la nôtre (courbes sur $\hat{h}$) ainsi l'avantage de l'utilisation de la décomposition RI (courbes sur $\hat{S}$)

7 Conclusion

Ce communiqué présente une procédure de minimisation au sens des moindres carrés sous-optimale et peu coûteuse pour le problème de détection et estimation de systèmes mono ou multiporteuse avec canaux convolutifs inconnus et CP. Un algorithme ILSP a été utilisé, exploitant la structure particulière du canal : la FFT d'une matrice circulante est en effet diagonale, ce qui permet de découpler ce problème de minimisation.

On a montré que notre algorithme converge en très peu d'itérations même pour une variance du bruit de 10dB et qu'il présente d'excellents résultats tant sur l'estimation des coefficients du canal que sur la détection du bruit. Deux améliorations intéressantes ont également été proposées, l'une d'entre elles fournissant un moyen efficace d'estimer la variance du bruit, améliorant par là même l'estimation des données au prix d'un faible ajout de complexité.

8 Remerciements

Nous remercions les relecteurs pour leurs remarques constructives. Ce travail a été possible grâce au financement du projet SIGSENSUAL, ref. REN2003-08341-C03-C01-02 et CTM2004-04510-C03-02, conjointement réalisé avec l'Unité de Technologie Marine (UTM) du CSIC, l'Université Polytechnique de Catalogne (UPC) et l'Université de Navarre. Merci en particulier à Antoni Manuel pour la confiance qu'il m'a accordée.

Références

- [1] S. Talwar, M. Vilberg & A. Paulraj, "Blind separation of synchronous co-channel digital signals using an antenna array-Part I : Algorithms", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no 5, pp. 1184–1197.
- [2] O. Rousseaux, G Leus & M. Moonen, "A suboptimal Iterative Method for Maximum-Likelihood Sequence Estimation in a Multipath Context", *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, pp. 1437–1447, dec. 2002.
- [3] P. Pajusco, "Experimental characterization of DOA at the basse station in rural and urban area", *IEEE Vehicular Technology Conference*, Ottawa, pp. 993–997, 1998.
- [4] L. Mazet, V. Buzenac-Settineri, M. de Courville & P. Duhamel, "An EM based semi-blind channel estimation algorithm designed for OFDM systems", *Asilomar conference on Signals, systems, and computers*, pp. 1642–1646, 2002.