Algorithmes du module constant en filtrage adaptatif : impact des progrès récents

M.BELLANGER

CNAM, 292 rue Saint-Martin, 75141 Paris cedex 03

bellang@cnam.fr

Résumé - Les avancées importantes obtenues récemment sur les algorithmes du module constant permettent de mieux cerner leur fonctionnement et leurs performances. Ces résultats sont rappelés et leur impact est analysé sur deux problèmes critiques pour les applications que sont les minima locaux et l'initialisation. Une approche est proposée pour l'initialisation, en relation avec le choix du retard appliqué au signal de référence dans l'algorithme de minimisation de l'erreur quadratique moyenne.

Abstract - *Important results have been obtained recently concerning the constant modulus criteria for adaptive filtering and their relationships to the minimum mean square error criterion. These results are reviewed and their impact on the behaviour and performance of the corresponding algorithms is assessed, with emphasis on two critical issues, namely local minima and initialization. The scheme proposed for initialization is related to the selection of the reference signal delay in the MMSE technique.*

1. Introduction

Les algorithmes du module constants ont été proposés il y a plus de vingt ans pour l'égalisation adaptative en transmission numérique et en radiodiffusion à modulation de fréquence. Bien qu'énormément de travaux leur aient été consacrés, ils sont à ce jour pas, ou peu, utilisés dans les matériels. En effet, les résultats obtenus ont été soit très théoriques et peu utilisables, soit empiriques et insuffisants pour donner confiance aux concepteurs de systèmes.

Un ensemble de progrès récents, qui permettent de mieux comprendre leur fonctionnement et de prévoir avec davantage d'assurance leurs performances, pourraient changer cette situation.

Le présent article a pour objectif d'apporter des éclaircissements sur deux problèmes importants des algorithmes du module constant. En effet, en utilisant les relations entre les critères de l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM) et du module constant, on peut déterminer la position des minima locaux les plus significatifs et en déduire une stratégie d'initialisation de l'algorithme.

2. Les résultats récents

Les critères du module constant sont généralement désignés par CM(p,q), où p représente l'exposant du module du signal en sortie du filtre et q l'exposant de l'écart dans l'expression de la fonction coût. Les signaux correspondants sont les signaux complexes, car ils peuvent posséder la propriété de module constant, alors que les signaux réels, mise à part la séquence binaire, ne peuvent avoir cette propriété qu'en moyenne.

En filtrage adaptatif, seules les valeurs q = 2 et p = 1 ou p = 2 sont à considérer en vue d'applications. En effet, la valeur q = 1 conduit à un algorithme du signe, avec un effet de seuil généralement inacceptable. Les fonctions coût correspondantes s 'écrivent :

$$J_{CM12} = E[(1-|y_n|)^2] \quad ; \quad J_{CM22} = E[(1-|y_n|^2)^2] \tag{1}$$

en désignant par y_n le signal complexe en sortie du filtre. Entre ces deux fonctions, par un développement direct, la relation suivante peut être établie:

$$J_{CM12} = \frac{1}{4}J_{CM22} + E[(1-|y_n|)^3] - \frac{1}{4}E[(1-|y_n|)^4] \tag{2}$$

En désignant par H le vecteur des coefficients du filtre, tel que $y_n = H^t X_n$ où X_n est le vecteur des données d'entrée, il est clair que J_{CM22} est une fonction des coefficients comprenant des termes du deuxième et du quatrième degré. Par contre J_{CM12} contient des termes du premier et du troisième degré par rapport à $|y_n| = \sqrt{y_n y_n^*}$ et c'est une fonction non rationnelle des coefficients. Dans ces conditions, les travaux sur les algorithmes basés sur le critère du module constant se sont concentrés presque exclusivement sur le critère J_{CM22}.

Les algorithmes du module constant peuvent être évalués par comparaison avec l'algorithme basé sur le critère de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne qui correspond à la fonction coût :

$$J_{EQMM} = E[|s_n - y_n|^2] \qquad (3)$$

où s_n est le signal de référence. Si E_0 désigne la valeur minimale de cette fonction à l'optimum des coefficients, un premier résultat a été de montrer que les coefficients qui minimisent j_{CM22} apportent un supplément d'erreur borné par E_0^2 [1]. C'est à dire que si l'erreur est petite, le supplément d'erreur est très petit. Un deuxième résultat est l'approximation de Suyama-Attux [2]. Cette approximation exploite la symétrie de J_{CM22} par rapport aux coefficients et fournit, quand l'erreur de sortie est faible, une relation entre les fonctions coût :

$$J_{CM\,22} \approx \frac{1}{2} J_{EQMM}(H)\, J_{EQMM}(-H) \qquad (4)$$

Cette relation permet de montrer que les coefficients du filtre obtenus par le critère du module constant sont en moyenne approximativement colinéaires avec ceux du critère EQMM et avec le facteur inférieur à l'unité suivant :

$$\frac{H_{CM\,2}}{H_{EQMM}} \approx 1 - \frac{1}{2} E_0 \left(1 - \frac{7}{4} E_0\right) \qquad (5)$$

Le critère CM(2,2) conduit alors à la valeur suivante de l'erreur de sortie :

$$E_{CM\,2} \approx E_0 + \frac{1}{4} E_0^2 \left(1 - \frac{9}{2} E_0\right) \qquad (6)$$

Cette approximation reste valable tant que l'inégalité suivante est vérifiée : $E_0 < 2/9 = 0.222$. Dans le domaine correspondant, le supplément d'erreur est inférieur à $E_0^2/4$, et, donc, nettement inférieur à la borne.

Ensuite, une relation a été établie entre les deux critères du module constant [3]. Elle montre que les coefficients obtenus avec J_{CM12} sont également en moyenne approximativement colinéaires avec ceux du critère EQMM, mais avec un facteur supérieur à l'unité donné par :

$$\frac{H_{CM\,1}}{H_{EQMM}} \approx 1 + \frac{E_0}{4} \qquad (7)$$

L'erreur de sortie s'exprime alors par :

$$E_{CM\,1} \approx E_0 + \frac{1}{16} E_0^2 \qquad (8)$$

C'est à dire que J_{CM22} contracte les coefficients du filtre, alors que J_{CM12} les dilate. Ces résultats sont remarquablement vérifiés par les simulations et ils confirment les observations de certains auteurs qui exprimaient une préférence pour les algorithmes basés sur le critère CM(1,2) [4].

3. Les minima des algorithmes du module constant

Avec le critère de l'EQMM, les minima de la fonction coût sont associés aux retards introduits sur le signal de référence. Par exemple, le système correspondant à l'égalisation est représenté à la figure 1.

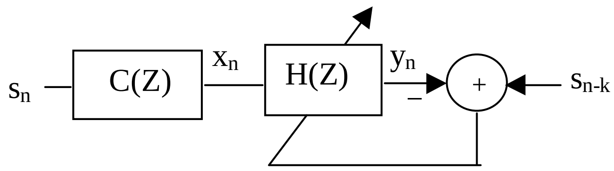

Fig.1. Filtre adaptatif en égalisation

Le signal reçu x_n s'exprime en fonction du signal source s_n et des coefficients c_i du canal par la convolution :

$$x_n = \sum_{i=0}^{L-1} c_i\, s_{n-i} \qquad (9)$$

où L désigne la longueur du canal. La valeur optimale des coefficients de l'égaliseur s'écrit :

$$H_{opt}(k) = R_{X^*X}^{-1}\, P_{sX^*}(k) \qquad (10)$$

où R_{X^*X} est la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée et $P_{sX^*}(k)$ le vecteur d'intercorrélation entre la référence et l'entrée :

$$P_{sX^*}(k) = E[s_{n-k} X_n^*] \qquad (11)$$

avec k le retard de la référence et $X_n^t = [x_n, \ldots, x_{n+1-N}]$, l'égaliseur comportant N coefficients. Le vecteur d'intercorrélation est non nul pour $0 \leq k \leq L+N-2$ et il existe donc L+N-1 valeurs du vecteur des coefficients $H_{opt}(k)$.

Le critère du module constant CM(2,2) conduit, par dérivation, à l'équation suivante pour déterminer les valeurs optimales des coefficients:

$$E[(1 - |y_n|^2)\, y_n X_n^*] = 0 \qquad (12)$$

ou encore :

$$E[(1-|y_n|^2)\, X_n^* X_n^t\,]H_{CM\,2} = 0 \qquad (13)$$

Cette équation fait apparaître une indétermination sur la phase du vecteur des coefficients, qui est levée si l'on impose, par exemple, qu'un élément particulier du vecteur soit réel.

En fonction des éléments du vecteur des coefficients, l'équation (13) est du troisième degré et le système possède donc au maximum 3^N zéros [5]. L'origine est l'un de ces zéros et il correspond à un maximum de la fonction coût. Les autres zéros apparaissent par couples puisqu'un changement de signe des coefficients ne modifie pas le système d 'équations (13).

Soit 2M le nombre de minima de la fonction coût. Deux minima quelconques sont nécessairement séparés par un point-selle. Il existe donc au moins 2M(2M-1)/2 points-selles. En fait, l'origine étant commune à tous les couples de minima, il faut retirer M-1 à cette valeur. Le nombre de valeurs extrémales du système est alors au moins égal à $2M^2$-2M+1+2M soit $2M^2$ +1, ce qui conduit à l'inégalité suivante :

$$2M^2 + 1 \leq 3^N \qquad (14)$$

Il vient ainsi pour les premières valeurs de M :

$$N = 2 \;;\; 2M^2 + 1 \leq 9 \;;\; M \leq 2$$
$$N = 3 \;;\; 2M^2 + 1 \leq 27 \;;\; M \leq 3$$
$$N = 4 \;;\; 2M^2 + 1 \leq 81 \;;\; M \leq 6$$

Comme illustration, soit le canal de fonction de transfert : $C(Z) = 1 + 0{,}5\, j\, Z^{-1}$ et un égaliseur à N=3 coefficients. Le critère de l'EQMM conduit à 4 minima, avec les erreurs résiduelles suivantes : $E_0 = [\,0{,}0118 \quad 0{,}0471 \quad 0{,}1882 \quad 0{,}7529\,]$. Les trois premières de ces valeurs sont inférieures à la borne indiquée précédemment dans la comparaison entre les critères EQMM et CM(2,2). On peut donc considérer qu'à chacun de ces trois minima de la fonction coût J_{EQMM} est associé un minimum voisin de la fonction coût $J_{CM\,22}$ et qu'il n'y a pas d'autres minima puisque M ≤ 3. En désignant par $H_{opt}(i)$ avec $0 \leq i \leq 3$ les vecteurs de coefficients associés aux 4 minima, on vérifie que, si l'algorithme du module constant est initialisé par les coefficients $H_{opt}(3)$, le vecteur des coefficients converge vers la valeur qu'il atteint quand il est initialisé par $H_{opt}(2)$. La même observation est faite avec le critère CM(1,2).

4. Initialisation de l'algorithme du module constant

Le critère CM(2,2) conduit à la mise à jour suivante pour le vecteur des coefficients du filtre adaptatif :

$$H_{n+1} = H_n + \delta\,(1-|y_{n+1}|^2)\, y_{n+1} X_{n+1}^* \qquad (15)$$

où δ est le pas d'adaptation de l'algorithme du gradient. Comme $y_{n+1} = X_{n+1}^t H_n$, cette équation s'écrit aussi :

$$H_{n+1} = [I_N + \delta\,(1-|y_{n+1}|^2)\, X_{n+1}^* X_{n+1}^t\,]H_n \qquad (16)$$

et, par suite :

$$H_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} [I_N + \delta\,(1-|y_i|^2)\, X_i^* X_i^t\,]H_0 \qquad (17)$$

D'où la nécessité de l'initialisation. Comme indiqué précédemment, on remarque qu'une rotation de phase sur le vecteur H_0 est conservée dans la suite de l'algorithme. En l'absence d'information particulière, le vecteur initial est choisi réel.

Pour le critère de l'EQMM, l'initialisation consiste à choisir la valeur du retard k appliqué au signal de référence Le vecteur des coefficients correspondant s'exprime en fonction des coefficients de prédiction linéaire du signal d'entrée et des coefficients du canal. La question se pose ensuite de choisir le vecteur d'initialisation pour le critère du module constant. Compte tenu des relations entre les critères EQMM et CM(2,2), il apparaît judicieux de choisir un vecteur qui s'approche du vecteur de l'EQMM, pour le retard choisi, de manière à atteindre le minimum correspondant après convergence.

Les vecteurs de l'EQMM s'expriment en fonction de l'inverse de la matrice d'autocorrélation qui se factorise comme suit en fonction des paramètres de la prédiction linéaire avant [6]:

$$R_{X^*X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots \\ & 1 & \ldots\ldots\ldots \\ & & \\ -A_{N-1} & -A_{N-2} & \ldots\ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{aN-1}^{-1} & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & E_{aN-2}^{-1} & \ldots\ldots \\ & & \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & -A_{N-1}^{*t} \\ 0 & 1 & -A_{N-2}^{*t} \\ & & \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Le terme A_{N-1} désigne le vecteur des coefficients de prédiction avant à l'ordre N-1 et E_{aN-1} est la puissance de l'erreur de prédiction avant correspondante. Pour le retard k=0, il vient :

$$H_{opt}(0) = R^{-1}_{X^*X} \begin{bmatrix} c_0^* \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} = c_0^* E^{-1}_{aN-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -A_{N-1} \\ \\ \end{bmatrix} \quad (19)$$

c'est à dire que l'égalisation correspond à la prédiction linéaire avant d'ordre N-1, avec un facteur d'échelle . De même, pour k=1, on obtient :

$$H_{opt}(1) = [c_1^* - a^*_{1N-1} c_0^*] E^{-1}_{aN-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -A_{N-1} \\ \\ \end{bmatrix} + c_0^* E^{-1}_{aN-2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -A_{N-2} \\ \\ \end{bmatrix} \quad (20)$$

Ces expressions montrent que, si le signal reçu x(n) est faiblement corrélé, l'élément dominant dans le vecteur des coefficients de l'EQMM est celui dont l'indice correspond au retard. Dans ces conditions, la stratégie d'initialisation consiste à retenir pour vecteur d'initialisation le vecteur ayant tous ses éléments nuls, sauf l'élément dont l'indice est égal au retard k, qui est pris égal à l'unité : $H_0 = [0,.....,0,1,0,......0]$. Le choix de l'unité est lié au fait que c'est le choix optimal si le canal introduit simplement un retard égal à k. Pour tenir compte de la puissance du signal reçu, σ_x^2, on peut aussi prendre la valeur $1/\sigma_x$.

5. Conclusion

Le choix du vecteur initial des coefficients est une des difficultés de la mise en œuvre des algorithmes du module constant. La stratégie qui a été proposée est liée à l'initialisation de l'EQMM. Dans le domaine de l'égalisation, en l'absence d'information sur le canal, on prend généralement un retard égal à la demi longueur de l'égaliseur pour l'EQMM, ce qui conduit à placer le « 1 » au milieu du vecteur initial pour le module constant. Pour un signal reçu peu corrélé, c'est à dire un canal avec peu de distorsion, le vecteur des coefficients converge alors vers la solution de l'EQMM correspondante. Les conditions dans lesquelles il s'écarte de cette solution restent à étudier.

Les développements ont été menés pour le critère CM(2,2) et ils devraient s'appliquer également au critère CM(1,2). Cependant, une étude spécifique serait sans doute nécessaire pour tenir compte des particularités de ce critère et en particulier des positions des minima autres que les minima principaux.

Bibliographie

[1] P.Schniter and C.R.Johnson, « Bounds for the MSE performance of Constant Modulus Estimators », IEEE Trans. on Information Theory, vol.46, N°7, Nov.2000, pp.2544-2560.

[2] R.Suyama, R.Attux et al., « Relations entre les Critères du Module Constant et de Wiener », Actes du colloque GRETSI'03, Paris, 8-11 septembre 2003.

[3] M.Bellanger, « A Simple Comparison of Constant Modulus and Wiener Criteria for Equalization with Complex Signals », Digital Signal Processing, N°14, 2004, pp.429-437.

[4] O.W.Kwon, C.K.Un and J.C.Lee, « Performance of Constant Modulus Adaptive Filters for Interference Cancellation », Signal Processing, Vol.26, N°2, Feb.1992, pp.185-196.

[5] H.Jamali and T.Ogunfunmi, « Stationary Points of Finite Length Constant Modulus Optimization », Signal Processing 82, 2002, pp.625-641.

[6] M.Bellanger, « Adaptive Digital Filters », Marcel Dekker Inc., 2nd edition, 2001.