

TEB de système OFDM codé multi-utilisateurs

Adrien RENOULT^{1,2}, Inbar FILAKOW¹, Marc CHENU-TOURNIER²

¹ETIS/ENSEA - Univ de Cergy-Pontoise - CNRS
6 av du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise France

²Thales Communication
160 bld de Valmy BP 92, 92704 Colombes Cedex, France
adrien.renault@fr.thalesgroup.com, renault@ensea.fr
fijalkow@ensea.fr
marc.chenu@fr.thalesgroup.com

Résumé – Le but de cet article est de présenter les performances analytiques d’un système OFDM codé multi-utilisateurs sans méthode d’accès multiple spécifique. Nous déterminerons les performances du système à la sortie de décodeur canal et à la sortie du détecteur de symboles. Le calcul est effectué de manière exacte dans le cas mono-utilisateur ou lorsque nous prenons les performances en sortie de détecteur de symboles, mais dans le cas multi-utilisateurs en sortie de décodeur canal une approximation est nécessaire. La validité de l’analyse est montrée par simulations.

Abstract – The BER of a multi-users multi-sensors array coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) system is investigated. We consider an almost optimal receiver with a soft output symbol detector and a soft input Viterbi channel decoder. We use the Viterbi bound and extend it to a multi-users case. We then obtain the performance conditionally to the channel and we integrate this performance over the different channel realisations. Finally the validity of our analysis is shown by simulations.

1 Introduction

Les systèmes à modulation multi-porteuses de type Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) ont été retenus pour les systèmes de transmission haut-débits. En effet, cette modulation permet une égalisation du canal très simple. Différents systèmes d’accès multiple peuvent être associés à cette modulation. Nous allons dans cet article étudier un système d’accès multiple sans séparation en code ou en fréquence. Nous ferons la détection des symboles envoyés par les différents utilisateurs en utilisant un critère au sens du maximum à posteriori afin de passer le plus d’information possible au décodeur de Viterbi.

A cause de la complexité d’un tel système il devient temporairement difficile de simuler ses performances dès que le nombre d’antennes et d’émetteurs dépasse trois ou quatre. Nous allons donc tenter en isolant un petit nombre de paramètres significatifs de dériver les performances analytiques du système. Ceci nous permettra ainsi d’obtenir une borne pour comparer les performances des systèmes utilisant des récepteurs sous-optimaux.

A notre connaissance aucune publication ne présente les performances d’un système OFDM codé multi-utilisateurs complet. Dans un article précédant [3], nous avons modélisé les Log Rapport de Vraisemblance (LLRs) en sortie d’estimateur de symboles comme des processus Gaussien consistant et simulé les performances de l’algorithme de Viterbi lorsque nous lui rentrions ces LLRs. Cependant deux limitations étaient présentes dans cet article, premièrement nous n’obtenions pas une formule analytique des

Taux d’Erreur Binaire (TEB) et de plus nous ne prenions pas en compte les interférences entre les différents utilisateurs ce qui amenait un décalage entre les performances analytiques et les simulations.

Dans ce papier nous étudierons le TEB en sortie de décodeur canal. Ce TEB sera exprimé en fonction des caractéristiques du système (nombre d’utilisateurs, nombre de capteurs à l’antenne de réception, type de code convolutif) et du Rapport Signal sur Bruit (RSB).

Dans une première partie, nous présenterons le modèle utilisé ensuite nous présenterons l’évènement d’erreur. Les parties trois et quatre comporteront la dérivation des performances. Ces performances étant validées par simulation. Enfin la section 5 conclura ce papier.

2 Modèle

Nous allons utiliser dans cet article un modèle OFDM multi-utilisateurs dans le domaine fréquentiel de la forme :

$$\mathbf{y}(k, n) = \sum_{t=1}^{N_T} \mathbf{h}_t(k, n) x_t(k, n) + \mathbf{w}(k, n)$$

où $\mathbf{y}(k, n)$ est le vecteur contenant les N_R échantillons reçus par les N_R capteurs de réception, $x_t(k, n)$ est le symbole envoyé par l’utilisateur t . $\mathbf{h}_t(k, n)$ est le canal entre l’utilisateur t et les différents capteurs du récepteur. Enfin $\mathbf{w}(k, n)$ est le vecteur de bruit additif blanc Gaussien associé aux différents capteurs de réception. Tous ces éléments étant définis pour la sous-porteuse k et le symbole OFDM n .

Nous supposons dans la suite de l'article une connaissance parfaite des coefficients du canal. Pour la détection des symboles nous utiliserons l'algorithme du Maximum A Posteriori (MAP). Pour le décodage canal nous utiliserons l'algorithme de Viterbi. Enfin afin de rester cohérent lorsque nous ferons varier le nombre d'utilisateur de notre système nous appliquerons le coefficient de pondération $\frac{1}{\sqrt{N_T}}$ aux coefficients du canal afin de garder une puissance d'émission constante.

3 Performance à la sortie du décodeur de Viterbi

Dans cette section nous définissons le TEB d'un utilisateur et nous dérivons ces performances en moyennant sur les différentes réalisations du canal.

3.1 Formulation du problème

Les différents utilisateurs de notre système ayant les mêmes performances moyennes, nous allons considérer les performances de l'utilisateur 1. De même nous considérons que les symboles envoyés sont une séquence de 1 car les performances ne dépendent pas des symboles émis. Nous utiliserons la borne de Viterbi [4] :

$$P_b \leq \sum_{d=d_{free}}^{\infty} c_d P_d \quad (1)$$

Dans cette équation P_d représente la probabilité de choisir un chemin faux de distance de Hamming d au chemin correct. c_d représente la moyenne du nombre de bits faux pour un chemin de distance de Hamming d .

Le calcul de P_d se fait par intégration sur les différents éléments du canal :

$$P_d = \int P_{d|\mathbf{H}} p(\mathbf{H}) d\mathbf{H}$$

où $P_{d|\mathbf{H}}$ est la probabilité de mauvais choix sachant la réalisation du canal $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{N_T}]$, et $p(\mathbf{H})$ est la probabilité d'avoir le canal \mathbf{H} .

3.2 Vraisemblance d'un chemin faux sachant le canal

Un chemin faux (indexé par i) de distance de Hamming d du chemin correct (indexé par j), sur le treillis du décodeur de Viterbi et pour le premier utilisateur est défini par le fait que sa métrique est plus petite que la métrique du bon chemin :

$$\begin{aligned} & \sum_{(k,n) \in \mathcal{C}_d} \|\mathbf{y}(k,n) - \sum_{t=1}^{N_T} \mathbf{h}_t(k,n) x_t^i(k,n)\|^2 \\ & < \sum_{(k,n) \in \mathcal{C}_d} \|\mathbf{y}(k,n) - \sum_{t=1}^{N_T} \mathbf{h}_t(k,n) x_t^j(k,n)\|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

où \mathcal{C}_d est défini un l'ensemble des d états erronés a travers le treillis pour le premier utilisateur et ayant n'importe

quel nombre d'erreurs pour les autres utilisateurs. Nous ne pouvons pas restreindre \mathcal{C}_d aux seuls trajets avec exactement d erreurs pour l'utilisateur d'intérêt et un décodage correct pour les autres utilisateurs, car comme dans [3] ceci reviendrait à négliger l'interférence entre symboles.

La probabilité de choisir un mauvais chemin en faisant une erreur de d peut être bornée par la somme des probabilités de couple (i,j) avec i un chemin à une distance de Hamming de d pour l'utilisateur d'intérêt. Ceci revient à utiliser la borne de l'union :

$$\begin{aligned} P_{d/\mathbf{H}} & \leq \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}_d} Prob \left(\sum_{(k,n) \in \mathcal{C}_d} \|\mathbf{y}(k,n) - \sum_{t=1}^{N_T} \mathbf{h}_t(k,n) x_t^i(k,n)\|^2 \right. \\ & \left. < \sum_{(k,n) \in \mathcal{C}_d} \|\mathbf{y}(k,n) - \sum_{t=1}^{N_T} \mathbf{h}_t(k,n) x_t^j(k,n)\|^2 \right) \end{aligned} \quad (3)$$

où \mathcal{I}_d est l'ensemble des chemins faux de distance de Hamming d pour le premier utilisateur.

Dans le cas d'un système mono-utilisateur (3) devient une égalité et la sommation sur tous les trajets i ce réduit à l'influence d'un seul trajet de distance de Hamming d . Ceci expliquera dans la suite l'analyse plus précise dans le cas mono-utilisateur.

3.3 Vraisemblance d'un chemin faux

Nous noterons

$$\begin{aligned} D_{i,j} & = \sum_{(k,n) \in \mathcal{C}_d} \|\mathbf{y}(k,n) - \sum_{t=1}^{N_T} \mathbf{h}_t(k,n) x_t^i(k,n)\|^2 \\ & \quad - \|\mathbf{y}(k,n) - \sum_{t=1}^{N_T} \mathbf{h}_t(k,n) x_t^j(k,n)\|^2 \end{aligned}$$

la différence de métrique entre un mauvais chemin i et le bon chemin j . La probabilité de l'évènement d'erreur de distance de Hamming d sera donc égale à la probabilité d'avoir une métrique $D_{i,j}$ négative. Comme dans [1], dans le cas d'une détection conjointe MIMO, nous pouvons exprimer $D_{i,j}$ comme la somme de dN_R termes :

$$D_{i,j} = \sum_{(k,n) \in \mathcal{C}_d} \sum_{r=1}^{N_R} \mathbf{z}_r^\dagger(k,n) \mathbf{F}_{i,j}(n,k) \mathbf{z}_r(k,n) \quad (4)$$

où $\mathbf{z}_r(k,n) = (y_r(k,n), h_{1,r}(n,k), \dots, h_{N_T,r}(n,k))^t$ et

$\mathbf{F}_{i,j}(n,k)$ la matrice de rang deux définis par

$\mathbf{u}_i(n,k) \mathbf{u}_i(n,k)^\dagger - \mathbf{u}_j(n,k) \mathbf{u}_j(n,k)^\dagger$ où

$\mathbf{u}_i(n,k) = (1, -x_1^i(n,k), \dots, -x_{N_T}^i(n,k))^t$. Nous supposons sans perte de généralité que le chemin correct est le chemin correspond à la séquence de bits tout à zéro ou de façon équivalente la séquence de symboles tout à un. Nous voulons maintenant moyennner sur toutes les réalisations du canal la probabilité de choisir le chemin faux i .

$$P_i = \int Prob(D_{i,j} < 0) p(\mathbf{H}) d\mathbf{H} \quad (5)$$

cette expression peut se développer comme dans [2] en utilisant les valeurs propres de $\mathbf{R} \mathbf{F}_{i,j}(n,k)$ (\mathbf{R} étant définis

comme $\frac{1}{2}E[\mathbf{z}_r(k, n)\mathbf{z}_r^\dagger(k, n)|\mathbf{x}_j]$). Le résultat de [2] peut être appliqué si $\mathbf{F}_{i,j}(n, k)$ n'est une fonction de i seulement. Dans notre cas, ceci sera vrai sous la condition suffisante suivante : pour un chemin faux i les utilisateurs de 2 à N_T seront soit entièrement correcte soit entièrement juste pour les indices $(k, n) \in \mathcal{C}_d$. Comme certains trajets de \mathcal{I}_d ne suivent pas cette condition nous devons restreindre la sommation de l'équation (3). Même si cette condition nécessaire n'est pas suffisante elle reste plus fine que de négliger intégralement l'interférence entre utilisateurs comme dans [3]. Nous obtenons alors le résultat suivant :

Lemme 1 *Le i^{th} terme de la partie droite de l'équation (3) peut être approximé par :*

$$P_i = \frac{1}{(1 - \mu_i)^{2dN_R - 1}} \sum_{r=0}^{dN_R - 1} \binom{2dN_R - 1}{r} (-\mu_i)^r \quad (6)$$

avec $\mu_i = \frac{a_i\gamma + \sqrt{a_i^2\gamma^2 + 2a_i\gamma}}{a_i\gamma - \sqrt{a_i^2\gamma^2 + 2a_i\gamma}}$, $a_i = \sum_{t=1}^{N_T} (1 - x_t^i)$, $\gamma = \frac{E_b}{N_0}$ et $i \in \mathcal{J}_d$. x_t^i est le symbole de l'utilisateur t pour le chemin i .

3.4 Probabilité d'erreur à la sortie du décodeur canal

En utilisant l'équation (6), qui nous donne la probabilité de choisir un chemin faux i de distance de Hamming d , nous pouvons trouver la probabilité de choisir un faux chemin et que ce chemin soit à la distance de Hamming d :

$$P_d \leq \sum_{i \in \mathcal{J}_d} \frac{1}{(1 - \mu_i)^{2dN_R - 1}} \sum_{r=0}^{dN_R - 1} \binom{2dN_R - 1}{r} (-\mu_i)^r \quad (7)$$

En utilisant alors l'équation (1), nous obtenons alors l'expression de la probabilité d'erreur à la sortie du décodeur.

$$P_b \leq \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \sum_{i \in \mathcal{J}_d} \frac{1}{(1 - \mu_i)^{2dN_R - 1}} \sum_{r=0}^{dN_R - 1} \binom{2dN_R - 1}{r} (-\mu_i)^r \quad (8)$$

4 Résultats de simulations

Nous présenterons dans cette section les résultats de simulation et leur comparaison avec les performances analytiques. Dans tous les cas le signal émis par les différents utilisateurs sera codé en utilisant un code convolutif non systématique non récursif de polynôme générateur (5, 7). Ceci nous donne un code de distance libre 3 et nous utiliserons les 20 premiers coefficients de c_d . Les courbes sont moyennées sur le canal et le bruit en utilisant une méthode de Monté-Carlo. Les coefficients du canal sont supposés parfaitement connus au récepteur.

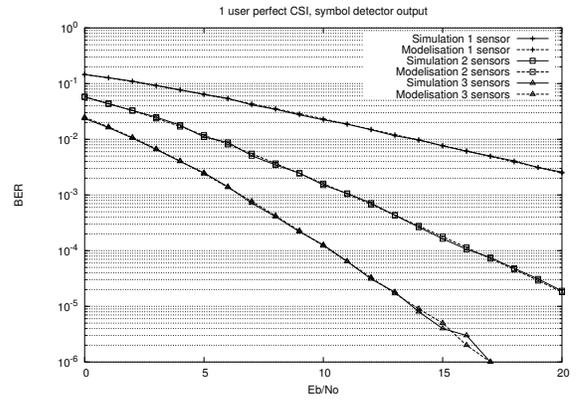


FIG. 1 – TEB à la sortie du détecteur de symboles, $N_T = 1$, présentant l'égalité entre les simulations et les performances analytiques du modèle (7) avec $d = 1$ dans un cas mono-utilisateur multi-capteurs.

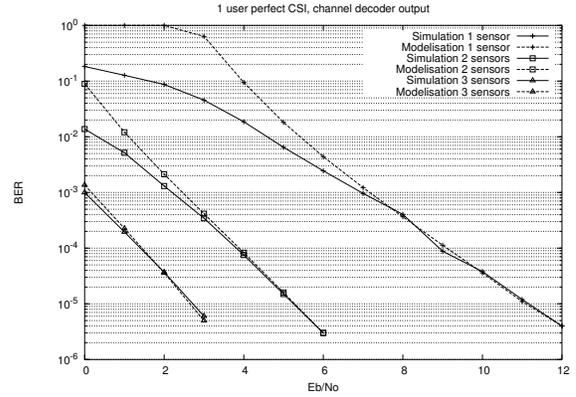


FIG. 2 – TEB à la sortie du décodeur canal, $N_T = 1$, présentant l'égalité entre les simulations et les performances analytiques du modèle (8) dans un cas mono-utilisateur multi-récepteurs.

4.1 Cas mono-utilisateur

Durant ces simulations le nombre d'utilisateurs est fixé à 1 et le nombre de capteurs variés de 1 à 3. La figure 1 montre la grande adéquation entre les performances analytiques et les performances simulées. A la sortie de détecteur de symboles. La figure 2 présente le cas en sortie de décodeur canal.

4.2 Cas multi-utilisateurs

Dans le cas multi-utilisateurs nous utilisons des systèmes avec le même nombre de récepteurs que d'émetteurs. La figure 3 présente les résultats en sortie de détecteur de symboles. Les résultats de la simulation et des performances analytiques sont identiques. Cependant dans le cas de la figure 4 présentant les résultats en sortie de décodeur canal les performances analytiques présentent un écart. Ce écart provient probablement de l'hypothèse que nous avons du faire pour dériver les performances du système.

5 Conclusion

Dans cet article nous avons dérivé les performances d'un système OFDM multi-utilisateurs codé. Le critère utilisé pour caractériser les performances a été le TEB. Les performances ont été calculées en sortie de détecteur de symboles et en sortie de décodeur canal. Comme les performances ne dépendent ni de l'utilisateur ni de la séquence envoyée nous avons choisi de les calculer pour le premier utilisateur et une séquence de symboles émise constitué de un.

Nous avons utilisé la borne de Viterbi. Cette dernière exprime le résultat comme une sommation des probabilités de choisir un mauvais chemin de distance de Hamming d .

Nous avons dérivé la probabilité P_d de choisir un mauvais chemin à la distance de Hamming d du chemin correct et pour ce faire nous avons du faire l'approximation que le chemin choisit par les utilisateurs de 2 à N_T était soit entièrement juste soit entièrement faux. Nous aboutissons ainsi à une formule analytique complète.

Dans la dernière partie de notre article nous avons comparé les performances analytiques trouvées avec les simulations du système. Nous obtenons une très bonne adéquation entre les performances analytiques et les simulations pour le cas mono-utilisateur ou en sortie de détecteur de symboles. Cependant dans le cas multi-utilisateurs en sortie de décodeur canal les performances analytiques présentent un écart avec les simulations. Ce écart est probablement dû à l'approximation dans la borne de Viterbi.

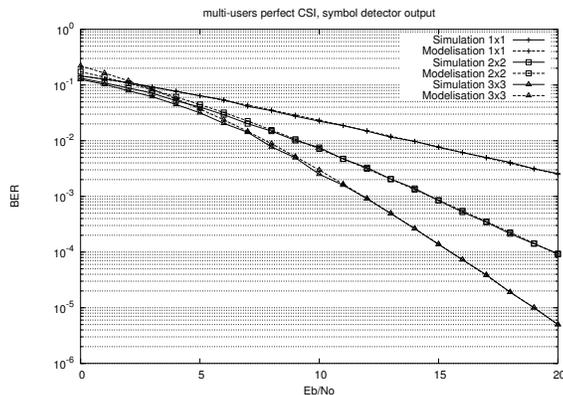


FIG. 3 – Mise en avant de la forte adéquation entre les performances analytiques en sortie de détecteur de symboles (équation (7) with $d = 1$) et les simulations dans le cas multi-utilisateurs multi-capteurs.

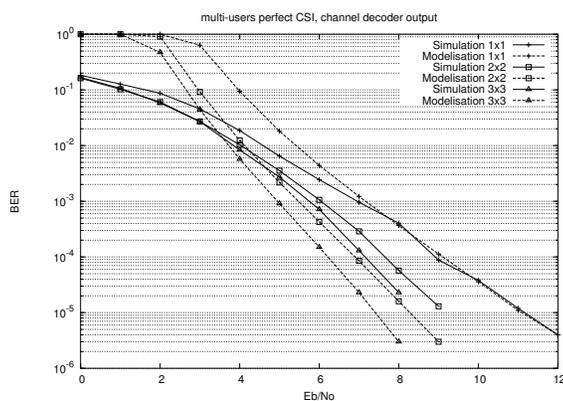


FIG. 4 – Mise en avant de l'écart entre les performances analytiques en sortie de decodeur canal (équation (8)) et les simulations dans un cas multi-utilisateurs multi-capteurs.

Références

- [1] Stephen J. Grant and James K. Cavers. Performance enhancement through joint detection of cochannel signals using diversity arrays. *IEEE Transactions on Communications*, Volume 46(8) :Pages 1038–1049, August 1998.
- [2] Stephen J. Grant and James K. Cavers. Further analytical on the joint detection of cochannel signals using diversity arrays. *IEEE Transactions on Communications*, Volume 48(11) :Pages 1788–1792, November 2000.
- [3] Adrien Renoult, Charly Poulliat, Marc Chenu-Tournier, and Inbar Fijalkow. On the performance of a multi-user multi-array cofdm system. In *proceeding of IEEE SPAWC*, July 2004.
- [4] Andrew J. Viterbi. Convolutional codes and their performance in communication system. *IEEE Transactions on communications technology*, Volume 19(5) :Pages 751–772, October 1971.