

Sur la Décomposition Modale Empirique des signaux échantillonnés

Gabriel RILLING, Patrick FLANDRIN

Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon
46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

Gabriel.Rilling@ens-lyon.fr, Flandrin@ens-lyon.fr

Résumé – On cherche ici à mieux comprendre le fonctionnement d'une technique récente de décomposition de signaux appelée Décomposition Modale Empirique (ou EMD pour "Empirical Mode Decomposition") et plus particulièrement l'influence de l'échantillonnage sur son comportement. Pour ce faire, on lui soumet des signaux sinusoïdaux échantillonnés en faisant varier les paramètres de l'échantillonnage. Les effets dus à l'échantillonnage observés sont tout d'abord caractérisés et quantifiés avant de faire l'objet d'une justification théorique.

Abstract – This paper is intended to give new insights into a recent technique of signal decomposition, referred to as "Empirical Mode Decomposition" (EMD) and more precisely into the effect of sampling on its behavior. Therefore we analyze the EMD of sampled sinusoidal signals while varying the sampling parameters. The observed effects related to sampling are first characterized and quantified and then justified theoretically.

1 Introduction

N.E. Huang et ses collaborateurs ont récemment introduit une technique de décomposition de signaux non stationnaires, appelée *Décomposition Modale Empirique* (ou EMD, pour "Empirical Mode Decomposition") [1]. Si celle-ci possède un caractère très intuitif, elle est restée jusqu'à présent rétive à une véritable évaluation théorique dans la mesure où sa définition n'est en fait donnée que par l'algorithme de décomposition proposé. L'EMD a néanmoins été appliquée à un certain nombre de situations réelles et a motivé des études systématiques de la méthode dans des conditions contrôlées afin de mieux cerner ses possibilités et limitations (cf., par exemple, [2, 3]).

2 Le problème de l'échantillonnage

L'EMD est un algorithme récursif dans lequel on itère une opération qui permet de séparer tout signal $x(t)$ en deux composantes, l'une oscillant à tout instant plus rapidement que l'autre. Ces deux composantes, qu'on appellera *détail local* et *moyenne locale*, sont usuellement obtenues par la procédure [1] :

1. extraire les extrema du signal $x(t)$
2. en déduire une enveloppe supérieure (resp. inférieure) par interpolation des maxima (resp. minima)
3. définir une *moyenne locale* $m(t)$ comme étant la demi-somme des enveloppes.
4. en déduire un *détail local* $d(t) = x(t) - m(t)$

En pratique, la procédure précédente, dite de « sifting », est généralement itérée sur le *détail local* pour affiner la

décomposition. On notera cependant que le résultat obtenu après une seule itération constitue habituellement une bonne approximation du résultat final, les itérations suivantes apportant des contributions moins importantes. On pourra trouver davantage de détails sur l'EMD dans [1, 4] et des codes MATLAB la mettant en œuvre sur internet [5].

Dans l'exposition qu'on vient de faire du principe de l'EMD, on a implicitement considéré les signaux comme étant à temps continu. Pourtant, en pratique, l'EMD ne peut être mise en œuvre que pour des signaux à temps discret. Or lorsqu'un signal est échantillonné, la position et l'amplitude de chacun de ses extrema est susceptible de varier. Compte tenu du rôle clé que jouent ces points dans l'EMD, ces variations peuvent avoir des répercussions sensibles sur la décomposition. C'est pourquoi il est généralement recommandé de n'appliquer l'EMD qu'à des signaux largement suréchantillonnés de manière à pouvoir négliger ces effets.

3 Quantification de l'influence de l'échantillonnage

3.1 Procédure d'évaluation

À l'heure actuelle, il n'existe aucun argument théorique permettant de distinguer un échantillonnage suffisant ou insuffisant. Dans cette optique et dans la continuité de [4], nous nous sommes intéressés au comportement de l'EMD lorsqu'on lui soumet un signal sinusoïdal échantillonné

$$x_{f,\varphi}[n] = \cos(2\pi fn + \varphi), \text{ avec } 1 \leq n \leq N,$$

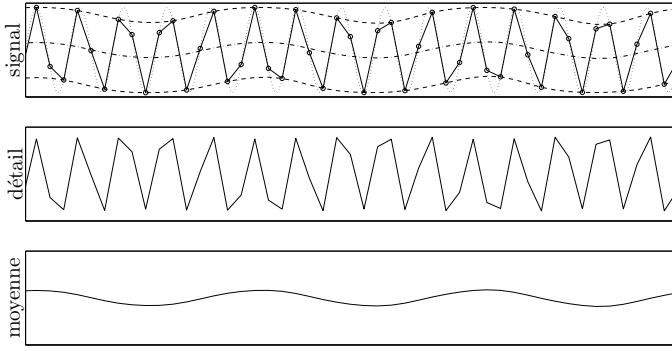


FIG. 1 – Illustration de l'influence de l'échantillonnage — En haut : le signal sinusoïdal continu (pointillés), échantillonné (trait plein), ses enveloppes (tirets) et leur demi-somme (tiret-point). Au milieu et en bas : le détail local et la moyenne locale correspondants.

en fonction de sa fréquence réduite f et de la phase φ . Sachant que l'équivalent à temps continu d'un tel signal est considéré comme une unique composante par l'EMD (sa *moyenne locale* étant nulle), on pourrait imaginer qu'il en soit de même avec la version échantillonnée. Cependant, l'échantillonnage modifiant les amplitudes des extrema, l'EMD le sépare en deux composantes (cf. figure 1). Parmi celles-ci, la composante *détail local* est plutôt proche du signal analysé tandis que la *moyenne locale*, apparaît comme une trace des effets de l'échantillonnage. C'est pourquoi, on choisit pour quantifier cette influence de s'intéresser à l'énergie de la *moyenne locale*. Plus précisément, on regarde l'évolution de la quantité

$$e(f, \varphi) = \left(\frac{\sum_{n=1}^N m_{f,\varphi}^2[n]}{\sum_{n=1}^N x_{f,\varphi}^2[n]} \right)^{1/2}$$

où $m_{f,\varphi}$ est la *moyenne locale* de $x_{f,\varphi}$. Dans la plupart des cas, la valeur de $e(f, \varphi)$ est pratiquement indépendante de φ . C'est pourquoi on s'intéressera également à la quantité moyennée par rapport à φ , notée $\bar{e}(f)$.

Pour mesurer ces quantités, nous avons effectué une série de simulations avec des échantillons de taille $N = 2048$. Les résultats sont présentés figure 2.

3.2 Interprétation — Modélisation

L'analyse de ces mesures met en évidence essentiellement deux caractéristiques. Premièrement, on constate que $e(f, \varphi)$ s'annule pour toutes les fréquences de la forme $f = 1/2k$ avec k entier. Deuxièmement, on voit qu'il est possible de trouver une majoration de $e(f, \varphi)$ de la forme $e(f, \varphi) \leq \lambda f^2$.

Pour ce qui est de l'interprétation, on peut aisément vérifier que lorsque $f = 1/2k$, le signal échantillonné a des enveloppes supérieure et inférieure constantes et symétriques. Il s'ensuit que sa *moyenne locale* est nécessairement nulle et donc $e(f, \varphi)$ aussi.

En ce qui concerne la majoration, on démontrera dans le paragraphe suivant que

$$e(f, \varphi) \leq \frac{1 - \cos \pi f}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi^2 f^2}{2\sqrt{2}}. \quad (1)$$

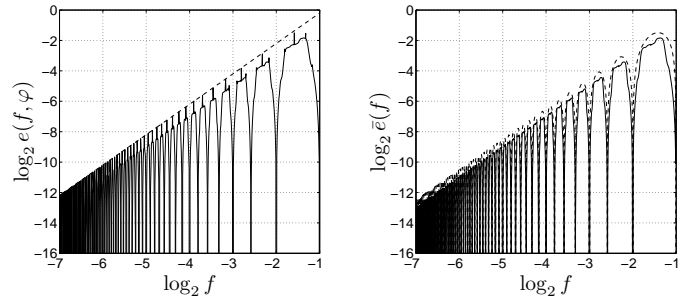


FIG. 2 – Influence de l'échantillonnage en fonction de la fréquence — À gauche, $e(f, \varphi)$ en fonction de la fréquence f pour $\varphi = 0$. À droite, $\bar{e}(f) := \langle e(f, \varphi) \rangle$ moyenné sur toutes les valeurs de φ possibles ». À gauche, on met en évidence une majoration par une droite de pente 2 sur le diagramme log-log correspondant à une majoration de la forme λf^2 . À droite, on a tracé en tirets le modèle correspondant à la section 3.2.2

On donnera également un modèle plus perfectionné fournissant un bon ordre de grandeur de $\bar{e}(f)$ permettant de rendre compte à la fois des deux caractéristiques mentionnées précédemment.

3.2.1 Majoration

La preuve du résultat (1) proposée ici est obtenue à l'aide de trois hypothèses simplificatrices :

1. L'enveloppe supérieure (resp. inférieure) interpolant les maxima (resp. minima) est toujours comprise entre la valeur du plus petit maximum (resp. plus grand minimum) et 1 (resp. -1).
2. Une unique itération de sifting suffit à séparer les deux composantes.
3. L'énergie de $x_{f,\varphi}$ vaut $N/2$.

Compte tenu de l'hypothèse 2, on peut exprimer la moyenne locale sous la forme

$$|m_{f,\varphi}| = \left| \frac{e_{min} + e_{max}}{2} \right| = \frac{|e_{max}| - |e_{min}|}{2},$$

où on note e_{max} et e_{min} les enveloppes supérieure et inférieure de $x_{f,\varphi}$. L'hypothèse 1 fournit alors la majoration

$$|m_{f,\varphi}| \leq \frac{1 - \alpha}{2},$$

où α est la valeur absolue du plus grand des minima de $x_{f,\varphi}$. Sachant qu'on peut montrer que $\alpha \geq \cos \pi f$, l'hypothèse 3 permet d'obtenir la première partie du résultat (1). La seconde partie découle alors directement du résultat classique « $\cos u \geq 1 - u^2/2$ ».

On pourra noter de plus que la majoration correspondant à la première partie du résultat (1) est atteinte dans le cas $\varphi = 0$ pour toutes les fréquences de la forme $f = 1/(2k + 1)$ avec k entier. Par conséquent, la majoration obtenue est optimale.

3.2.2 Ordre de grandeur

S'il rend bien compte de la majoration en f^2 , le modèle qu'on vient de présenter ne permet pas de justifier que

l'influence de l'échantillonnage s'annule pour toutes les fréquences de la forme $f = 1/2k$. Pour ce faire, il faut analyser plus finement le comportement de la *moyenne locale*. Si on reprend les mêmes hypothèses que pour le modèle de majoration, cette dernière est simplement la demi-somme des enveloppes supérieure et inférieure. Le problème se ramène donc à l'évaluation de l'ordre de grandeur de chacune des enveloppes. L'idée consiste alors à considérer que l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) est localement égale à la valeur du maximum (resp. minimum) le plus proche. De là, on obtient

$$m_{f,\varphi}^2[n] \approx \frac{[\cos(2\pi f n_{max} + \varphi) + \cos(2\pi f n_{min} + \varphi)]^2}{4},$$

où n_{max} et n_{min} correspondent aux positions des maximum et minimum les plus proches. Pour tout maximum situé à une position n_{max} , il existe un entier k tel que $\phi_{max} = 2\pi f n_{max} + \varphi - 2k\pi \in [-\pi f, \pi f]$. Dans la très grande majorité des cas, les différentes valeurs de ϕ_{max} correspondant aux différents maxima sont bien réparties dans $[-\pi f, \pi f]$. Par conséquent, on peut donner un ordre de grandeur de l'énergie de la *moyenne locale* de la façon suivante :

$$\sum_{n=1}^N m_{f,\varphi}^2[n] \approx N \mathbb{E}_{\psi} \frac{[\cos(\psi) + \cos(2\pi f n_{min}(\psi) + \psi)]^2}{4}$$

où on prend ψ uniformément réparti dans $[-\pi f, \pi f]$ et $n_{min}(\psi)$ correspond à la position du premier minimum de $\cos(2\pi f n + \psi)$, qu'on peut calculer en fonction de ψ . Finalement, le calcul aboutit à une expression de $\bar{e}(f)$ qui se simplifie sous la forme suivante

$$\bar{e}(f) \approx \frac{2\pi^2 f^2}{\sqrt{3}} \left(K + 1 - \frac{1}{2f} \right) \left(\frac{1}{2f} - K \right),$$

où K est la partie entière de $1/2f$. Cette dernière expression permet de retrouver à la fois le comportement en f^2 , mis en évidence dans le préfacteur, et le fait que $\bar{e}(f)$ s'annule pour les fréquences de la forme $f = 1/2k$ (cf figure 2 à droite).

4 Analyse spectrale de l'influence de l'échantillonnage

On s'intéresse maintenant à la manière dont se manifestent les effets de l'échantillonnage quantifiés dans la partie précédente. Par construction la composante *moyenne locale* correspond à des oscillations plus lentes que le *détail local* qui oscille à la fréquence f comme le signal analysé. Par conséquent, l'EMD d'un signal sinusoidal échantillonné fait apparaître de nouvelles fréquences inférieures à f . Pour tenter de caractériser ces nouvelles fréquences, on s'est intéressé au spectre de la composante *moyenne locale* en fonction de f . Ce spectre étant constitué de raies, on a représenté figure 3 les fréquences correspondant aux principaux pics du spectre de $m_{f,\varphi}$ en fonction de f .

L'analyse des spectres en fonction de f met en évidence l'existence de deux cas suivant la régularité du spectre. Celui-ci est constitué soit d'une série de pics régulièrement

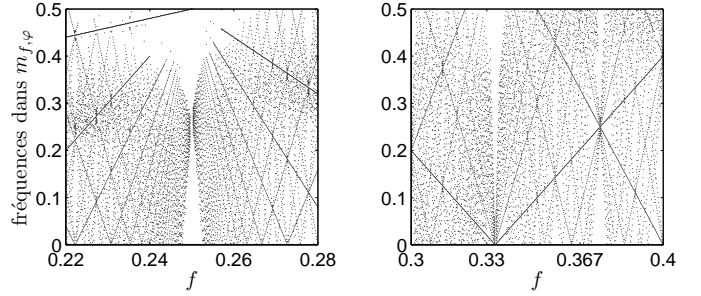


FIG. 3 – Répartition spectrale de l'influence de l'échantillonnage — Pour chaque valeur de f , en abscisse, on représente, en ordonnée, une série de points correspondant aux pics apparaissant dans le spectre de la moyenne locale et du détail local de $x_{f,\varphi}$. À gauche, on observe ce qui se passe autour de $f = 1/4$. À droite, autour de $f = 1/3$. Plus généralement, on retrouve les mêmes allures autour de toutes les fréquences de la forme $f = 1/2k$ et $1/(2k + 1)$ avec k entier.

espacés soit de pics répartis de manière dense sans régularité apparente. Dans le premier cas, l'analyse des diagrammes de la figure 3 permet de mettre en évidence que les fréquences f' qui apparaissent dans les spectres sont de la forme $f' = (2k + 1)f + k'$ avec k, k' entiers, ou encore $f' \in f + 2f\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$.

4.1 Interprétation

L'interprétation des spectres obtenus est liée à la nature non-linéaire de l'EMD. Si une grandeur x_1 dépend de manière non-linéaire d'une autre grandeur x_2 dont le spectre ne contient que deux fréquences f_1 et f_2 , on sait que le spectre de x_1 ne peut contenir des fréquences que dans l'ensemble $f_1\mathbb{Z} + f_2\mathbb{Z}$. Plus généralement, le spectre de x_1 est susceptible de contenir toutes les fréquences correspondant à des combinaisons linéaires à coefficients entiers des fréquences présentes dans le spectre de x_2 . Dans le cas qui nous intéresse, le spectre de $x_{f,\varphi}$, le signal échantillonné, contient les fréquences $\pm f + k$ avec k entier. Par conséquent, le spectre de $m_{f,\varphi}$ ne peut contenir que des fréquences appartenant à $f\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$.

De là, deux cas sont possibles. Si la fréquence f est irrationnelle, le spectre est alors constitué de pics répartis de manière dense. Ce cas correspond bien à un des deux types de spectre observés.

Supposons maintenant $f = p/q$ rationnel. On sait alors que l'ensemble $f\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est égal à l'ensemble $1/q\mathbb{Z}$. Dans le cas q impair, on ne peut rien dire de plus étant donné que $f\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = 1/q\mathbb{Z} = f + 2f\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Dans le cas où $q = 2q'$ est pair, le signal $x_{f,\varphi}$ est q -périodique avec la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \forall n, \quad x_{f,\varphi}[n + q'] &= \cos\left(2\pi \frac{p}{2q'}(n + q') + \varphi\right) \\ &= -x_{f,\varphi}[n]. \end{aligned}$$

Sachant que dans le cas de sinus échantillonnés, tous les maxima sont strictement positifs et tous les minima strictement négatifs, on en déduit que les positions des minima

peuvent se déduire de celles des maxima par un décalage de q' . Par conséquent, si on ignore les effets de bords dus à la taille limitée des signaux, l'enveloppe inférieure e_{min} de $x_{f,\varphi}$ peut se déduire de son enveloppe supérieure e_{max} par

$$\forall n, \quad e_{min}[n + q'] = -e_{max}[n].$$

À partir de là, on obtient que la *moyenne locale* m_1 obtenue après une seule itération de sifting aura également la propriété

$$\forall n, \quad m_1[n + q'] = -m_1[n].$$

Si on effectue plusieurs itérations de sifting cette propriété se transmet tout au long du processus et finalement, les deux composantes *moyenne locale* et *détail local* définitives la vérifient également. Si on regarde alors la composante de Fourier correspondant à la fréquence k/q dans le spectre de la *moyenne locale* $m_{f,\varphi}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_n m_{f,\varphi}[n] e^{-2i\pi \frac{k}{2q'} n} &= - \sum_n m_{f,\varphi}[n + q'] e^{-2i\pi \frac{k}{2q'} n} \\ &= - \sum_n m_{f,\varphi}[n] e^{-2i\pi \frac{k}{2q'} (n - q')} \\ &= (-1)^{k+1} \sum_n m_{f,\varphi}[n] e^{-2i\pi \frac{k}{2q'} n} \end{aligned}$$

ce qui implique que, si k est pair, la composante de Fourier à la fréquence k/q est nulle. Finalement, le spectre ne peut contenir que les fréquences de $1/q + 2/q\mathbb{Z}$ qui est identique à $f + 2f\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, ce qui correspond bien aux observations.

Dans l'interprétation qu'on vient de donner, on s'est appuyé sur la distinction rationnel/irrationnel. En pratique, cette distinction est un peu différente de sa définition mathématique. En effet, comme on réalise des estimations spectrales avec des résolutions limitées, le spectre de la *moyenne locale* obtenu avec une fréquence f irrationnelle peut être très semblable à celui obtenu avec une fréquence f' rationnelle proche de f . Par conséquent, il est tout à fait possible d'obtenir un spectre estimé dense avec une fréquence f rationnelle et un spectre estimé constitué de pics espacés régulièrement avec une fréquence f irrationnelle.

Plus précisément, si M est la longueur sur laquelle on calcule la transformée de Fourier pour l'estimation spectrale, le spectre de la *moyenne locale* correspondant à une fréquence f proche d'un rationnel p/q avec $q \lesssim M$ est très semblable à celui obtenu avec la fréquence p/q . En revanche si f n'est pas particulièrement proche d'un tel rationnel, alors le spectre de la *moyenne locale* apparaît comme un ensemble de pics dense comme dans le cas d'une fréquence irrationnelle. Si l'intervalle sur lequel on peut considérer que f est proche d'un rationnel p/q reste relativement confus, on peut tout de même signaler que sa taille est d'autant plus grande que q et M sont petits.

5 Conclusion

La décomposition modale empirique (ou « EMD ») est une méthode d'analyse de signaux qui a déjà motivé un certain nombre d'études. Étant donné qu'on n'a pour le

moment qu'une compréhension limitée de la méthode, une grande partie de ces travaux se concentrent sur l'analyse des performances de l'EMD appliquée à des signaux réels. Cependant, que l'approche proposée soit plutôt pratique ou plutôt théorique, la question de l'échantillonnage est généralement simplement ignorée. Or dans tous les cas étudiés, les données analysées sont implicitement largement suréchantillonnées. De fait, il apparaît que ce choix se justifie dans la mesure où les effets de l'échantillonnage sur l'EMD sont du même ordre de grandeur que les déplacements des extrema occasionnés et donc que les effets d'échantillonnage sur le signal analysé.

Dans un souci à la fois d'explorer le comportement de l'EMD et d'évaluer plus précisément la confiance qu'on peut y accorder en fonction de l'échantillonnage, nous nous sommes intéressés au cas de signaux sinusoïdaux. Cet exemple simple nous a permis de développer une première approche théorique au problème de l'échantillonnage. Parmi les résultats obtenus, on a montré en 3.2.1 que ces effets pouvaient être majorés par un terme proportionnel au carré de la fréquence réduite, soit inversement proportionnel au carré de la fréquence d'échantillonnage f_e . Or il apparaît que les arguments déployés pour justifier cette majoration restent en grande partie valables tant que le signal analysé possède une dérivée continue. La confrontation avec la pratique, en revanche, montre que cette majoration n'est en fait valable que dans la mesure où l'amplitude des oscillations varie peu à l'échelle d'une oscillation. Ceci est lié au fait que pour établir cette majoration, nous n'avons tenu compte que des variations d'amplitude des extrema. Si l'on tient compte en plus des variations de position, on peut montrer qu'un nouveau terme s'ajoute au précédent pour finalement obtenir une majoration de la forme $\lambda/f_e^2 + \mu/f_e$. Enfin, si l'on ajoute à cela qu'on peut réaliser des estimations des coefficients λ et μ directement à partir du signal analysé, il est alors possible d'évaluer pour tout signal, une majoration des effets dus à l'échantillonnage. Ceci fera l'objet d'une prochaine publication.

Références

- [1] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.L. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung et H.H. Liu, "The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis," *Proc. Roy. Soc. London A*, Vol. 454, pp. 903–995, 1998.
- [2] P. Flandrin et P. Gonçalves, "Sur la décomposition modale empirique," GRETSI-03, pp. 149–152, Paris.
- [3] P. Flandrin, G. Rilling et P. Gonçalves, "Empirical Mode Decomposition as a filterbank," *IEEE Sig. Proc. Lett.*, Vol. 11, pp. 112–114, 2004.
- [4] G. Rilling, P. Flandrin et P. Gonçalves, "On Empirical Mode Decomposition and its Algorithms", IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing NSIP-03, Grado (I), 2003.
- [5] <http://www.perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>.