

# Amélioration de l'estimation spectrale par modélisation AR multi-dimensionnelle et découpage en sous-bandes

David BONACCI, Corinne MAILHES

IRIT/ENSEEIH/TS

2 rue Charles Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse cedex 7, France

david.bonacci@enseeiht.fr, corinne.mailhes@enseeiht.fr

**Résumé** – Le découpage en sous-bandes est réputé pour ses très bonnes performances en matière d'estimation fréquentielle, en particulier lorsqu'on utilise des méthodes paramétriques. Cet article présente une méthode d'estimation spectrale basée sur le découpage en sous-bandes et la modélisation auto-régressive multi-dimensionnelle qui permet d'exploiter la connaissance des inter-corrélations entre les signaux de sous-bande afin d'améliorer les performances de l'estimation fréquentielle. Le principe de la méthode est présenté puis appliquée à la résolution de 2 fréquences très proches dans le cas de signaux composés de deux fréquences pures très proches noyées dans du bruit. Des simulations effectuées sur des données synthétiques illustrent les performances de ce nouvel estimateur qui ouvre des perspectives intéressantes.

**Abstract** – Subband decomposition has been shown to achieve very good performances for frequency estimation, particularly when parametric methods are used. This paper introduces a subband multichannel autoregressive spectral estimation method allowing to exploit the knowledge of intercorrelations between subseries in order to improve frequency estimation performances. This method is detailed then applied to a signals composed by a sum of 2 close sinusoids embedded in noise. Simulation results illustrate the interest of the proposed method.

## 1 Introduction

L'intérêt du découpage en sous-bandes pour l'estimation spectrale en général a été démontré dans la littérature du traitement du signal par des auteurs tels que [1] ou [2]. En ce qui concerne l'estimation spectrale paramétrique, les principaux avantages du traitement appliqué à des signaux de sous-bande sont en particulier la réduction de l'ordre des modèles (conduisant à une diminution du nombre de conditionnement des matrices d'autocorrélation [3]), la blancheur des DSP (densités spectrales de puissance) [4] et la réduction des puissances d'erreur de prédiction linéaire pour la modélisation AR (auto-régressive) [1]. Dans le cas de signaux à spectre de raies, on montre très facilement que l'espacement entre 2 pics du spectre et les SNR (rapports signal à bruit) locaux augmentent d'un facteur égal au facteur de décimation  $M$  du banc de filtres [4]. L'estimation spectrale paramétrique dans les sous-bandes engendre bien sûr aussi divers problèmes. En particulier, le problème du recouvrement spectral peut se présenter : le même harmonique peut apparaître dans 2 sous-bandes différentes lorsque celui-ci se trouve au voisinage de la frontière de ces 2 sous-bandes. Ce problème a déjà été traité dans [5] et [6] qui proposent des procédures non temps-réel permettant d'éliminer les problèmes de recouvrement spectral et de discontinuité du spectre lorsqu'on fait du découpage en sous-bandes. Ces procédures s'appliquent aussi bien à des bancs de filtres uniformes tels que celui représenté figure 1 qu'à des bancs de filtres non-uniformes. Le deuxième problème de l'estimation spectrale paramétrique appliquée après découpage en sous-bandes est lié à la décimation : il s'agit de l'augmentation de variance des estimateurs d'auto-corrélation à cause de la diminution du nombre d'échantillons de signal disponibles. Cet article étudie les apports de la Modélisation AR Multi-dimensionnelle appliquée

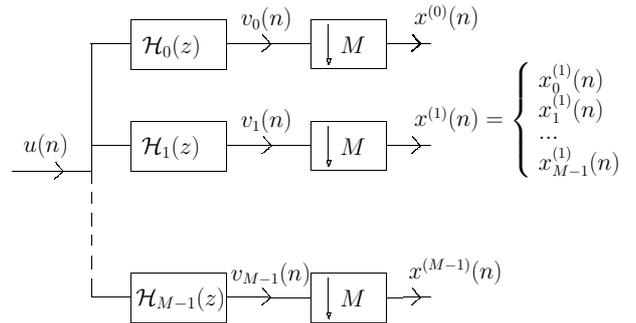


FIG. 1 – Banc de filtres d'analyse uniforme avec  $M$  sous-bandes et un facteur de décimation  $M$ .

aux sous-séries issues de la décimation après **D**écoupage en **S**ous-bandes (**MARM-DS**), dans le cas de signaux à spectre de raies.

## 2 Le modèle étudié

Soit la  $j^{\text{ème}}$  branche du banc de filtres représenté figure 1. On note  $u(n)$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$  la séquence d'entrée aléatoire,  $\mathcal{H}_j(z)$  la transmittance du filtre passe-bande associé et  $v_j(n)$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$  la sortie échantillonnée de ce filtre. La décimation de ce signal filtré  $v_j(n)$  est faite  $M$  fois (par un décimateur d'ordre  $M$ ) en prenant à chaque fois un instant initial différent  $n = 0, \dots, M - 1$ . Ceci conduit à la construction de  $M$  sous-séries  $x_m^{(j)}(n)$  comportant chacune  $N/M$  échantillons (voir fig. 1) :

$$x_m^{(j)}(n) = v_j(Mn - m) \quad \forall m = 0, \dots, M - 1. \quad (1)$$

Pour clarifier les notations, on omettra dans la suite de ce document l'indice  $j$  de la sous-bande considérée et on note  $\underline{x}(n) =$

$[x_0(n), \dots, x_{M-1}(n)]^T$  le vecteur de dimension  $M$  constitué des différents échantillons des sous-séries pris à l'instant  $n$ . La matrice d'auto-corrélation de ce vecteur est définie par :

$$K_x(q) = E[\underline{x}(n)\underline{x}^H(n-q)], \quad (2)$$

où  $q = -(N/M - 1), \dots, (N/M - 1)$ ,  $E[\cdot]$  désigne l'opérateur d'espérance mathématique et  $^H$  la transposée hermitienne. Les termes diagonaux de cette matrice  $K_x(q)$  sont les auto-corrélations des  $M$  sous-séries et les éléments non-diagonaux sont les inter-corrélations entre ces sous-séries issues de la même sous-bande. On peut montrer que ces inter-corrélations correspondent à l'autocorrélation du signal filtré  $v_j(n)$  avant le décodeur. Plus précisément :

$$r_{x_{m_1}x_{m_2}}(k) = r_v(Mk + m_2 - m_1), \quad \forall m_1, m_2. \quad (3)$$

Au lieu d'exprimer la valeur de  $x_m(n)$  pour  $m$  fixé en fonction de  $x_m(n-1), \dots, x_m(n-p)$  (où  $p$  représente l'ordre du modèle) comme dans le cas de la modélisation AR classique, l'ensemble du vecteur  $\underline{x}(n)$  est exprimé comme une fonction des vecteurs aux instants précédents  $\underline{x}(n-1), \dots, \underline{x}(n-p)$ . Une étude théorique approfondie de la modélisation AR multi-dimensionnelle se trouve dans de nombreux ouvrages tels que [7, p. 457]. Toutefois, l'application de l'AR multi-dimensionnel aux sous-séries de chaque branche du banc de filtres n'a jamais été étudiée à notre connaissance. Cette méthode que nous appelons MARM-DS permet ainsi de tirer parti de toute l'information connue a priori sur les sous-séries issues de la décimation, et en particulier de leurs inter-corrélations. L'expression du prédictor multi-dimensionnel d'ordre  $p$  est rappelé ci-dessous :

$$\hat{\underline{x}}(n) = -\sum_{k=1}^p A_k \underline{x}(n-k), \quad (4)$$

où les  $A_k$  sont des matrices de taille  $M \times M$  (matrices de prédiction). Le vecteur d'erreurs de prédiction linéaire  $\underline{e}(n)$  correspondant s'exprime alors par :

$$\underline{e}(n) = \underline{x}(n) - \hat{\underline{x}}(n) = \underline{x}(n) + \sum_{k=1}^p A_k \underline{x}(n-k). \quad (5)$$

### 3 Principe de l'estimation spectrale multi-dimensionnelle en sous-bandes

Étant donné le modèle (4), on commence par estimer les  $p$  matrices de prédiction  $A_k$ . De même que pour la modélisation AR classique, le principe est de minimiser la puissance d'erreur de prédiction linéaire. Dans le cas multi-dimensionnel, ceci revient à minimiser la somme des erreurs de prédiction associées à chaque composante mono-dimensionnelle de (5). Ceci conduit au système de  $p$  équations matricielles suivant [7] :

$$K_x(q) = -\sum_{k=1}^p A_k K_x(q-k), \quad \forall q \in \{1, \dots, p\}. \quad (6)$$

Le calcul des matrices  $A_k$  à partir de (6) nécessite l'inversion d'une matrice-bloc de matrices de Toeplitz de dimensions  $(Mp) \times (Mp)$ . Cette structure particulière pour l'inversion a été étudiée en détail par Wiggins et Robinson dans [8] qui ont mis au point un algorithme robuste, temps-réel, récursif en ordre et proche de l'algorithme de Levinson-Durbin pour la modélisation AR classique. La principale différence entre ces deux

algorithmes est que dans le cas multi-dimensionnel, les matrices de coefficients de prédiction arrière et avant ne sont plus liées par une simple relation. D'autres travaux intéressants sur les matrices-bloc de matrices de Toeplitz peuvent se trouver dans [9]. De même que pour la modélisation AR classique, il est facile de démontrer que le vecteur d'erreurs de prédiction est centré ( $E[\underline{e}(n)] = 0$ ). De plus, les propriétés statistiques au deuxième ordre de  $\underline{e}(n)$  sont les suivantes :

$$E[\underline{e}(n)\underline{e}^H(n-s)] = \begin{cases} 0 & \text{if } s \neq 0 \\ \Sigma & \text{if } s = 0 \end{cases} \quad (7)$$

où

$$\Sigma = K_x(0) + \sum_{k=1}^p A_k K_x^H(k). \quad (8)$$

Ceci montre que le vecteur d'erreurs de prédiction  $\underline{e}(n)$  d'un processus AR auto-régressif est un bruit blanc vectoriel. A noter qu'on montre dans [10] que ceci revient à supposer que chaque composante  $x_m(n)$  du vecteur  $\underline{x}(n)$  peut se modéliser par comme un processus ARMA. En utilisant ce dernier résultat, une estimée  $\hat{\Sigma}$  de la matrice  $\Sigma$  peut aisément s'obtenir à partir d'estimateurs d'auto-corrélation classiques.

Les matrices  $A_k$  et  $\Sigma$  étant estimées, l'analyse spectrale multi-dimensionnelle consiste à estimer une matrice de spectres croisée  $P_x(f)$ . Cette matrice est définie comme la transformée de Fourier discrète de la matrice de corrélations  $K_x(q)$  :

$$P_x(f) = DFT[K_x(q)], \quad (9)$$

où la transformée de Fourier est calculée séparément sur chaque composante de la matrice d'auto-corrélation. Cette définition entraîne que la matrice  $P_x(f)$  est à symétrie hermitienne. Les DSP recherchées de chaque composante mono-dimensionnelle de  $\underline{x}(n)$  sont situées sur la diagonale de  $P_x(f)$  et les éléments non diagonaux sont les inter-spectres entre ces différentes composantes. On pose :

$$A = I + \sum_{k=1}^p A_k e^{-i2\pi f k} \quad (10)$$

où  $I$  est la matrice identité de taille  $M \times M$ . La matrice  $A$  a les mêmes dimensions  $M \times M$ . L'estimateur AR multi-dimensionnel se calcule comme suit [7, p. 460] :

$$\hat{P}_{AR}(f) = (\hat{A})^{-1} \hat{\Sigma} (\hat{A}^{-1})^H \quad (11)$$

et les  $M$  DSP AR estimées de  $x_0(n), \dots, x_{M-1}(n)$  se situent sur la diagonale principale de  $\hat{P}_{AR}(f)$ . A noter que ces DSP sont théoriquement égales mais pas numériquement. Ainsi, l'estimateur final  $S_x(f)$  de la DSP des signaux de sous-bande s'obtient en moyennant les éléments diagonaux de  $\hat{P}_{AR}(f)$ . La DSP  $S_u(f)$  du signal à analyser se déduit ensuite de la connaissance du banc de filtres.

### 4 Résultats de simulations

La méthode employée pour conduire les simulations présentées ci-dessous sans problème de recouvrement spectral est celle présentée dans [6]. Celle-ci entraîne l'emploi d'un dispositif de glissement fréquentiel (par exponentielles complexes) placé en amont du banc de filtres et nécessite l'emploi d'un

banc de filtres RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) à encoches ("comb filters") d'ordre  $L$  multiple de  $M$ , centrés sur les milieux de chaque sous-bande. Plus précisément, le module au carré de la fonction de transfert du  $j^{\text{ème}}$  filtre est donné par

$$|\mathcal{H}_j(e^{i2\pi f})|^2 = \begin{cases} \frac{1}{L} \frac{\sin^2 \pi(f-F_j)L}{\sin^2 \pi(f-F_j)} & \text{if } f \neq F_j \\ L & \text{if } f = F_j \end{cases} \quad (12)$$

où  $j$  est l'indice de la sous-bande considérée ( $j \in \{0, \dots, M-1\}$ ) et  $F_j = j \frac{0.5}{M} + \frac{0.25}{M}$  est le centre de la  $j^{\text{ème}}$  sous-bande. La transmittance de ces filtres passe périodiquement par 0 avec la période  $1/L$ , ce qui représente la condition décrite dans [6] pour qu'il n'y ait pas de recouvrement spectral. La réponse fréquentielle du banc de filtres d'analyse est représentée figure 2 pour  $M = 4$  et  $L = 16$ .

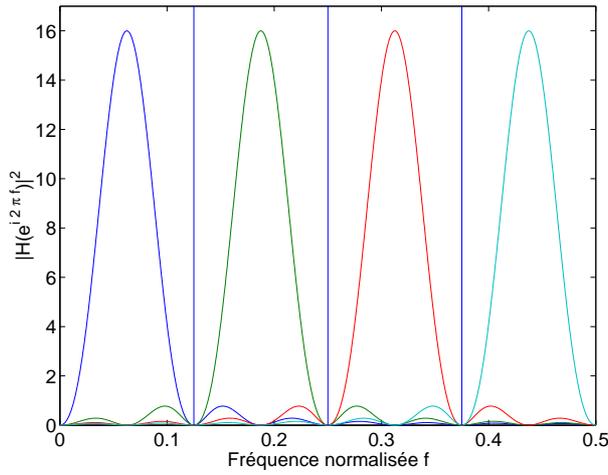


FIG. 2 – Transmittance du banc de filtres pour  $M = 4$  et  $L = 16$ .

Nous avons choisi d'illustrer l'intérêt de la méthode MARM-DS sur l'analyse spectrale d'un signal constitué de deux fréquences pures très proches noyées dans du bruit blanc additif. Dans l'exemple ci-après, les deux fréquences sont  $f_1 = 0.1$  et  $f_2 = 0.108$  pour un nombre d'échantillons de signal de  $N = 100$ . Le rapport signal à bruit est de  $7 \text{ dB}$ . L'analyse spectrale de plusieurs réalisations (10 sont représentées sur les courbes) de ce signal est effectuée de 3 façons différentes. Le premier estimateur est obtenu par analyse AR classique "large-bande" d'ordre  $p_{full} = 16$ , c'est-à-dire appliquée directement sur le signal original  $u(n)$ . Le second dérive de l'analyse AR classique "sous-bandes", appliquée sur l'un des sous-signaux en sortie des décimateurs de la figure 1 indifféremment pour  $m = 0, \dots, M-1$  (dans ce cas,  $L = 16$ ,  $M = 4$  et  $p = 4$ ). Enfin, le dernier estimateur est celui proposé dans cet article : MARM-DS. Notons qu'il est préférable d'utiliser un ordre  $p = p_{full}/M$  pour une juste comparaison de l'estimation spectrale paramétrique large-bande et sous-bande étant donné que le nombre d'échantillons d'autocorrélation disponibles est souvent limité par le nombre d'échantillons de signal  $N$ .

Le premier critère étudié pour comparer ces 3 estimateurs est la puissance d'Erreur de Prédiction Linéaire (EPL). Pour l'estimateur large-bande, il n'y a qu'une matrice d'autocorrélation quelque soit la fréquence considérée. En revanche, les estimateur sous-bande et MARM-DS reposent sur la procédure décrite dans [6] qui nécessite une estimation spectrale spécifique pour chaque fréquence considérée. C'est la raison pour laquelle

ces EPL dépendent de la fréquence. Sur la figure 3, celles-ci sont moyennées dans chaque sous-bande. Dans le cas de l'estimateur MARM-DS, les EPL mono-dimensionnelles représentées sont issues de la diagonale de la matrice  $\Sigma$  (8). Les résultats

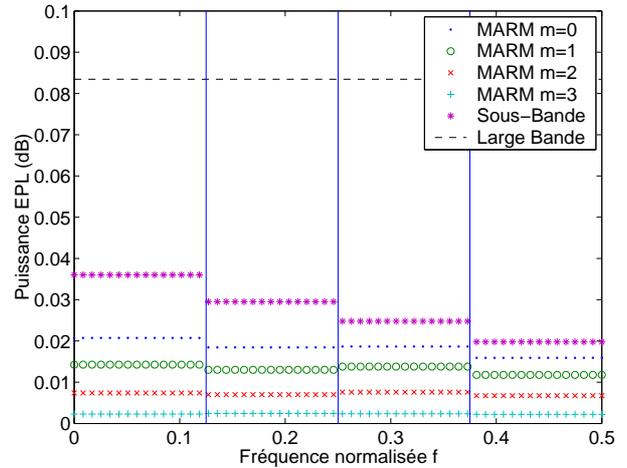


FIG. 3 – Erreurs de Prédiction Linéaire pour les 3 méthodes.

tats sont en faveur de la méthode MARM-DS pour laquelle les puissances d'EPL demeurent les plus faibles  $\forall m$ .

Concernant le critère de précision de l'estimateur fréquentiel, la figure 4 permet de comparer les variances des 3 estimateurs à la borne de Cramer-Rao pour un signal constitué d'une unique sinusoïde plongée dans du bruit (fréquence  $f_1 = 0.1$  et  $N = 200$  échantillons de signal). Le rapport signal à bruit est de  $10 \text{ dB}$  et les ordres de modélisation et paramètres des filtres d'analyse sont les mêmes que précédemment. Le tracé est effectué en fonction du nombre de réalisations afin de vérifier qu'on a bien convergé dans la statistique de Monte-Carlo. On constate que le fait de moyennner les  $M = 4$  estimateurs

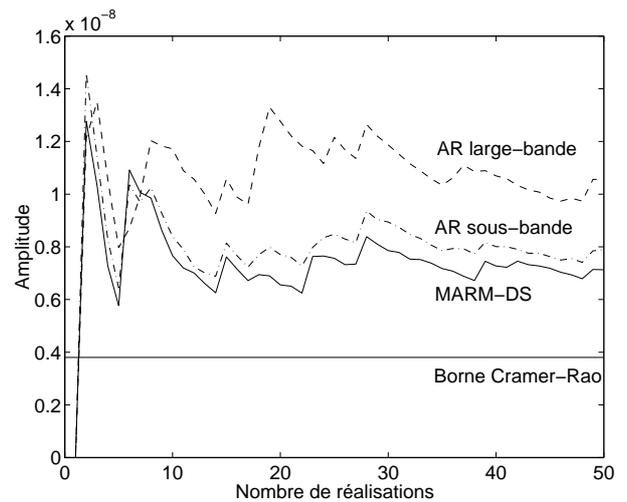


FIG. 4 – Variance en fonction du nombre de réalisations.

donnés par la méthode MARM-DS permet bien de réduire la variance.

Enfin, pour le critère de résolution fréquentielle sur le signal composé d'une somme de 2 fréquences pures, la figure 5 présente le résultat de l'analyse "large-bande" (ordre  $p_{full} = 16$ ).

Suivant les réalisations du signal, ce type d'analyse ne permet pas souvent de discriminer les 2 fréquences. La figure 6 fournit le résultat de l'analyse AR classique "sous-bandes". Le résultat est plus satisfaisant que l'analyse AR "large-bande", comme attendu [2]. La figure 7 met en évidence l'intérêt de la MARM-DS. Le banc de filtres utilisé est le même que dans la figure précédente, l'ordre du modèle également. Dans ce cas, les deux fréquences sont clairement résolues, pour toutes les réalisations du signal. Ceci s'explique par le fait que la MARM-DS sait utiliser toute l'information contenue dans les signaux issus des sous-bandes par l'utilisation des  $M$  sous-séries obtenues après décimation.

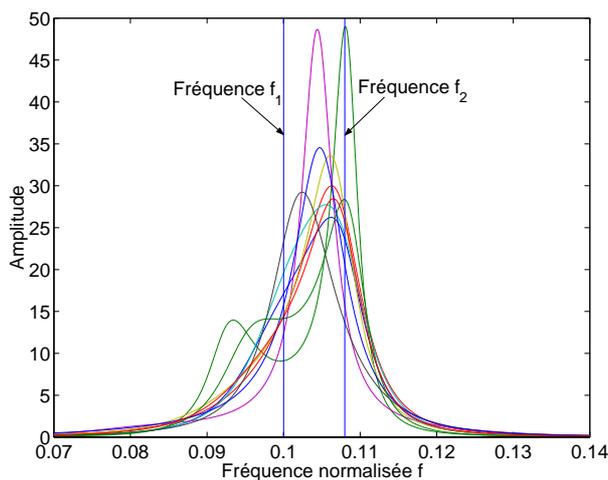


FIG. 5 – AR large-bande.

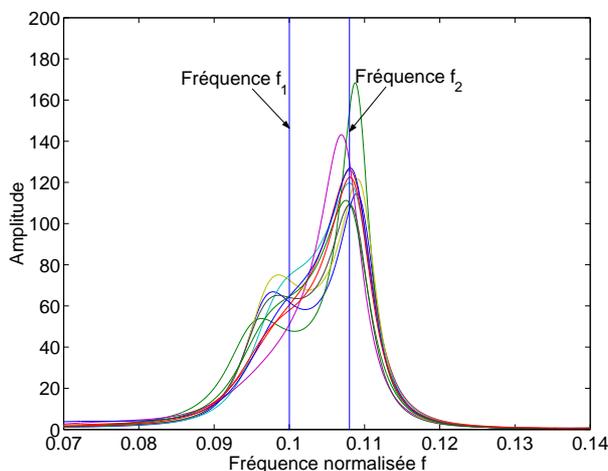


FIG. 6 – AR sous-bandes.

## 5 Conclusion

Cet article était destiné à étudier l'apport de la modélisation AR multi-dimensionnelle appliquée aux signaux de sous-bande en termes de résolution spectrale (résolution de pics très proches). Le gain observé par rapport à la modélisation AR classique s'explique en particulier par la capacité de la méthode proposée à exploiter toute l'information a priori dont on dispose par la connaissance de la fonction d'auto-corrélation du signal filtré  $v_j(n)$  sur une des branches du banc de filtres.

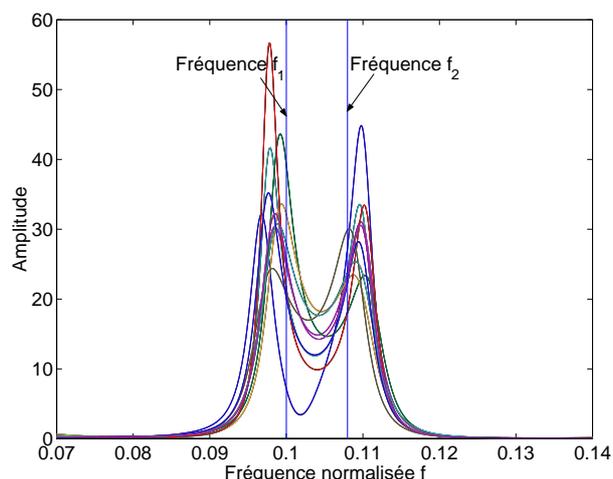


FIG. 7 – MARM-DS.

Une perspective intéressante serait d'utiliser un banc de filtres adaptatifs conçu pour minimiser la puissance d'erreur de prédiction linéaire multi-dimensionnelle des signaux de sous-bandes, sous la contrainte de respecter la condition d'anti-repliement.

## Références

- [1] S. Rao and W. A. Pearlman, "Analysis of linear prediction, coding and spectral estimation from subbands," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 42, no. 4, pp. 1160-1178, july 1996.
- [2] A. Tkacenko and P. P. Vaidyanathan, "Sinusoidal frequency estimation using filter banks," *Proc. IEEE ICASSP-01*, Salt Lake City, Utah, pp. 825-828, may 2001.
- [3] G. H. Golub and C. F. Van-Loan, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [4] A. Tkacenko and P. P. Vaidyanathan, "The Role Of Filter Banks in Sinusoidal Frequency Estimation," *J. Franklin Inst.*, vol. 338, no. 5, pp. 517-547, aug. 2001.
- [5] D. Bonacci, P. Michel and C. Mailhes, "Subband decomposition and frequency warping for spectral estimation," *Proc. EUSIPCO-2002*, Toulouse, France, pp. 147-150, sep. 2002.
- [6] D. Bonacci, C. Mailhes and P. M. Djurić, "Improving frequency resolution for correlation-based spectral estimation methods using subband decomposition," *Proc. IEEE ICASSP-03*, no. 6, pp. 329-332, apr. 2003.
- [7] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation : Theory and Applications*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1988.
- [8] R. A. Wiggins and E. A. Robinson, "Recursive solution to the multichannel filtering problem," *J. Geophys. Res.*, vol. 70, pp. 1885-1891, 1965.
- [9] M. Wax and T. Kailath, "Efficient inversion of doubly block Toeplitz matrix," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 8, pp. 170-173, apr. 1983.
- [10] M. Gharbi and N. Martin, "Filtrage Autoregressif Vectoriel," *Proc. GRETSI-1983*, Nice, France, vol. 2, pp. 971-976, may 1983.