

Opérateurs tomographiques pour la reconstruction d'objets à symétrie de révolution

François LAVALLOU, Jean Michel LAGRANGE

CEA, centre DAM Ile de France
BP 12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France
prenom.nom@cea.fr

Résumé — Cet article propose de nouveaux résultats pour la reconstruction d'objets à symétrie de révolution à partir de leurs projections parallèles en exploitant quelques propriétés d'une famille d'opérateurs tomographiques issue des opérateurs de Weyl. Notant f la fonction densité de l'objet et $\mathcal{Y}$ une projection perpendiculaire à l'axe de symétrie, nous donnons une nouvelle expression de l'inversion d'Abel et le moyen de calculer les moments de f en fonction de $\mathcal{Y}$. Nous étudions aussi les transformations à noyau intégral de f et déterminons une nouvelle relation permettant leur évaluation à partir de $\mathcal{Y}$ seulement. Nous illustrons ce procédé par le calcul numérique de la transformée en cosinus d'une fonction f à l'aide de sa projection $\mathcal{Y}$.

Abstract — This article provides new results for the reconstruction of radial objects from their parallel projections by introducing the properties of a particular class of tomographic operators stemming from the Weyl operators. Introducing f the density function of the object and $\mathcal{Y}$ the projection normal to its symmetry axis, we present a new formulation for the Abel inverse operator and indicate how to calculate the moments of f as a function of $\mathcal{Y}$. We also study the integral kernel transforms of f and determine a new relation allowing their evaluation from $\mathcal{Y}$ only. As a conclusion we apply our method to the numerical evaluation of the cosine transform of a function f given its projection $\mathcal{Y}$.

1 Introduction

Dans certaines expériences radiographiques réalisées au CEA/DAM, les contraintes liées au dispositif d'émission et de mesure d'un rayonnement X très dur sont telles que nous ne pouvons disposer que d'une unique vue des objets, recueillie sur un détecteur plat de type couple écran renforceur/film ou bien sur une γ caméra. En imposant de fait une hypothèse de symétrie cylindrique (parfaitement adaptée à nos objets), ce problème de reconstruction tomographique en rayonnement parallèle peut être résolu et a d'ailleurs fait l'objet de nombreux travaux proposant des approches inverses (rétroprojection filtrée, Abel inverse [1], inversion de la matrice de projection [2]) ou directes (par minimisation d'un critère pénalisé [2] ou par déformation d'un modèle des objets [3] [4]).

Dans cet article, nous fournissons de nouveaux résultats sur la résolution du problème de reconstruction à partir des projections parallèles d'un objet à symétrie radiale en utilisant une famille d'opérateurs $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui généralise l'opérateur d'Abel [1], noté $\mathcal{A}$ par la suite.

Dans la section 2, nous décrivons les principales propriétés de cette famille A_n , et en particulier la composition qui permet de faire le lien entre l'opérateur d'Abel inverse $\mathcal{A}^{-1}$ et la "reprojection des projections" d'un objet. Nous donnons également une expression de tous les moments de la solution du problème (la fonction densité f) à partir de ces projections parallèles itérées.

Dans la section 3, nous présentons une méthode d'intégration par parties qui permet de calculer des trans-

formations à noyau intégral du type $\int K(x, y).f(y)dy$ à partir des projections de f . Pour illustration, nous en déduisons une expression de la transformée en cosinus ($K(x, y) = \cos(xy)$) de f qui constitue un résultat concurrent au théorème coupe-projection.

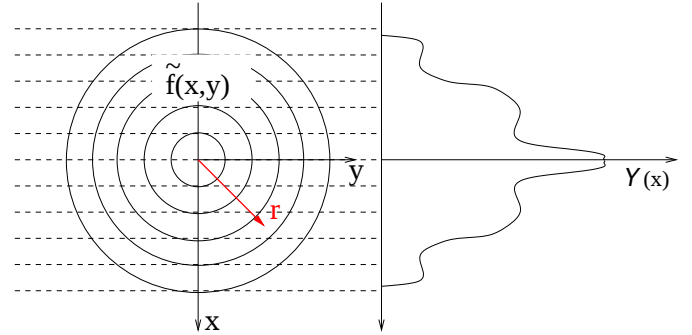


FIG. 1 – $\tilde{f}(x, y)$ représente la carte de densité de la coupe plane d'un objet à symétrie cylindrique et nous avons $f(r) = \tilde{f}(r \cos \theta, r \sin \theta), \forall \theta$.

La projection parallèle de cet objet (voir fig. 1) est notée $\mathcal{Y}$ avec :

$$\mathcal{Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x, y) dy$$

Dans le cas cylindrique, cette projection $\mathcal{Y}$ est la transformée d'Abel $\mathcal{A}$ de la fonction f :

$$\mathcal{Y}(x) = \mathcal{A}[f](x) = 2 \int_x^\infty \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} f(r) dr$$

2 Opérateurs tomographiques

Pour toute fonction f de L^1 à support compact, nous définissons pour tout entier $n > 0$ les opérateurs d'Abel généralisés ou opérateurs tomographiques suivants, complétés, par prolongement analytique, par l'identité en composition pour $n = 0$:

$$A_n[f](x) = \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_x^\infty u \cdot f(u) \cdot (u^2 - x^2)^{-1+\frac{n}{2}} du \quad (1)$$

Cette famille d'opérateurs, issue de l'étude de la tomographie divergente d'un objet à symétrie de révolution [6], est liée à une sous famille des opérateurs de Riesz [7][8], les intégrales de Weyl [9] notées $(W_\alpha)_{\alpha>0}$, dont nous utilisons les propriétés suivantes [10] :

$$\begin{aligned} W_\alpha \circ W_\beta &= W_{\alpha+\beta} \\ \frac{d}{dx} W_{\alpha+1}[f](x) &= -W_\alpha[f](x) \\ W_\alpha[f](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty f(u) \cdot (u-x)^{-1+\alpha} du \end{aligned}$$

En notant $\tau_p[f](x) = f(x^p)$ et en définissant les opérateurs d'Erdélyi-Kober [11] :

$$W_{\alpha,p} = p^{-\alpha} \tau_p \circ W_\alpha \circ \tau_{\frac{1}{p}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, p > 0$$

nous avons, en particulier pour $p = 2$:

$$A_n[f](x) = 2^{\frac{n}{2}} \cdot W_{\frac{n}{2},2} = W_{\frac{n}{2}}[\tau_{1/2}[f]](x^2) \quad (2)$$

avec $A_1[f](x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{A}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{Y}(x)$

Par l'intermédiaire de la relation (2), les propriétés des opérateurs d'Erdélyi-Kober se transposent directement aux opérateurs tomographiques A_n .

Propriété 1 *La composition entre opérateurs tomographiques est un homomorphisme additif :*

$$A_n \circ A_m = A_{n+m} \quad (3)$$

et, en conséquence, l'opérateur A_1 composé n fois vaut A_n :

$$(A_1)^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A_1 \circ A_1 \circ \dots \circ A_1}_{n \text{ fois}} = A_n$$

En recherchant des correspondances entre des décompositions de l'objet et de sa projection dans des bases, nous avons obtenu la propriété suivante :

Lemme 1 *L'opérateur adjoint de A_n étant donné par :*

$$A_n^*[f](x) = \frac{2 \cdot x}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \int_0^x f(u) \cdot (x^2 - u^2)^{-1+\frac{n}{2}} du$$

l'image de la base de Fourier par A_n^* est donnée par :

$$\begin{cases} A_n^*[\cos mx](x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot m \cdot J_{\frac{n-1}{2}}(mx) \cdot \left[\frac{2x}{m}\right]^{\frac{n+1}{2}} \\ A_n^*[\sin mx](x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot m \cdot \mathcal{H}_{\frac{n-1}{2}}(mx) \cdot \left[\frac{2x}{m}\right]^{\frac{n+1}{2}} \end{cases} \quad (4)$$

avec J_n une fonction de Bessel de première espèce et $\mathcal{H}_n$ une fonction de Struve.

Cet opérateur adjoint, lié aux opérateurs de Riemann-Liouville (d'aux de W_n), introduit, d'après (4), la transformée de Hankel TH_n d'ordre n par projection de l'opérateur tomographique A_{2n+1} sur une base trigonométrique :

$$\begin{aligned} (A_{2n+1}[f], \cos(mx)) &= (f, A_{2n+1}^*[\cos(mx)]) \\ &= \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{m}\right)^n TH_n[x^n f(x)](m) \end{aligned}$$

Ce résultat est établi par une autre voie dans [8] pour $n = 0$.

La propriété qui suit est fondamentale pour les opérateurs A_n et résulte d'une intégration par parties de la définition 1.

Propriété 2 *Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la dérivée de $A_n[f]$ s'obtient à partir de $A_{n-2}[f]$:*

$$A_n[f]'(x) = -2x A_{n-2}[f](x) \quad (5)$$

Nous retrouvons, pour $n = 2$, une autre formulation de la reconstruction tomographique par inversion de l'opérateur d'Abel à partir des projections $\mathcal{Y}$. Il suffit de projeter un objet virtuel, à symétrie de révolution, de densité d égale à la projection $\mathcal{Y}$ (soit $d(r \cos \theta, r \sin \theta) = \mathcal{Y}(r)$) et d'évaluer :

$$A_2[f](x) = A_1[A_1[f]](x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{A}[\mathcal{Y}](x)$$

et

$$f(x) = \frac{-A_2[f]'(x)}{2x} \quad (6)$$

Les figures 2 et 3 illustrent la comparaison entre une reconstruction par inverse généralisé [2] et notre approche pour inverser la transformée d'Abel.

Propriété 3 *Tous les moments $\{M_n[f]\}_{n \in \mathbb{N}}$ de f se calculent à partir de la projection $\mathcal{Y}$:*

$$M_{n-1}[f] = \int_{\mathbb{R}^+} u^{n-1} f(u) du = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2} A_n[f](0) \quad (7)$$

avec

$$A_n[f] = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} (\mathcal{A})^{n-1} [\mathcal{Y}]$$

Numériquement, dans un cas discrétisé, il est plus aisé d'évaluer les opérateurs tomographiques selon leur parité à l'aide des relations 3 et 5 car ils se calculent de proche en proche par application successive de l'opérateur A_2 dont la forme matricielle, discrétisant l'expression

$$A_2[f](x) = 2 \cdot \int_x^{+\infty} u \cdot f(u) du,$$

peut être donnée par :

$$\mathbf{A_2} \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2N-1 \\ 0 & 3 & 5 & \dots & 2N-1 \\ 0 & 0 & 5 & \dots & 2N-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2N-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ \vdots \\ f(N) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons, par exemple, calculer les moments de Legendre μ_i à partir des M_i (voir [5]) ce qui fournit une décomposition de la solution du type :

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} L_i(x) \mu_i(\mathcal{Y})$$

avec L_i , le $i^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre [5]. Sur la figure 4, nous illustrons le calcul des 12 premiers moments de Legendre de f (voir encadré de la figure 4) à partir de sa projection et les comparons avec leur valeur théorique. Les premiers ordres sont bien restitués mais, de manière classique, nous obtenons rapidement des divergences numériques pour les ordres élevés.

3 Calcul de la transformation en cosinus et autres noyaux à partir d'une projection

Dans cette section, nous considérons des transformations intégrales de noyau K et nous nous proposons de calculer la transformée d'une fonction f à support compact à partir de sa projection $\mathcal{Y}$.

Pour cela, nous utilisons le résultat suivant dont les éléments de preuve sont donnés en annexe :

Propriété 4 Pour des noyaux K de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+2}$,

$$\int_{\mathbb{R}^+} K(x, y) \cdot f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^+} \Phi(x, y) A_2[f](y) dy \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial y}(x, 0) A_2[f](0) + \frac{1}{2} K(x, 0) \mathcal{Y}(0)$$

avec

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{y} \frac{\partial K}{\partial y}(x, y) + \frac{K(x, 0) - K(x, y)}{y^2} \right]$$

Les contraintes imposées au noyau K , suffisantes mais non nécessaires, permettent de traiter un bon nombre de noyaux K classiques ; ainsi, en prenant $K(x, y) = \cos(xy)$, nous obtenons une expression de la transformée en cosinus $T_c[f]$ de la fonction f en fonction de sa projection $\mathcal{Y}$:

$$T_c[f](x) = \int_{\mathbb{R}^+} \Phi_c(x, y) \mathcal{A}[\mathcal{Y}](y) dy + \frac{1}{2} \mathcal{Y}(0) \quad (9)$$

avec

$$\Phi_c(x, y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{x \sin(xy)}{y} + \frac{1 - \cos(xy)}{y^2} \right)$$

Contrairement au théorème coupe projection qui nous fournit une approximation de la transformée de Fourier 2D de $\tilde{f}$, via l'incontournable interpolation polaire→cartésien, nous obtenons directement l'expression exacte de la transformée de Fourier d'une méridienne de $\tilde{f}$.

Nous illustrons, sur la figure 5, le calcul de $T_c[f]$ de la fonction de densité valant 1 entre 0 et 200 et dont la projection parallèle est donnée sur le graphe Gr.a. Malgré une discrétisation "brutale" de l'équation (9), la transformée estimée est très proche de la valeur exacte.

4 Travaux futurs

Nous étudions actuellement la sensibilité au bruit des différentes reconstructions ainsi que d'autres transformations à noyaux dans le cadre de la propriété 4. Parmi les nombreuses propriétés des opérateurs tomographiques, nous cherchons de plus à établir des relations entre les coefficients d'une fonction densité et de sa projection dans des bases couplées par un opérateur dual A_n^* , comme illustré dans le lemme 1.

Annexe : Eléments de preuve de la propriété 4

Notons Δ l'opérateur "taux d'accroissement" et Q l'opérateur dérivée :

$$\Delta f(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad ; \quad Qf(x) = f'(x)$$

Puisque, d'après (6), $f(x) = -\frac{1}{2x} Q A_2[f]$, nous obtenons par intégration par parties :

$$\begin{aligned} (g, f) &= \int_{\mathbb{R}^+} g(u) \cdot f(u) du \\ &= g(0) \cdot M_0[f] + \int_{\mathbb{R}^+} [g(u) - g(0)] \cdot f(u) du \\ &= g(0) \cdot M_0[f] - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \Delta g(u) \cdot Q A_2[f](u) du \\ &= g(0) \cdot M_0[f] + g'(0) \cdot M_1[f] \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^+} (Q \circ \Delta) g(u) \cdot A_2[f](u) \cdot du \end{aligned}$$

En prenant $g = K(x, \cdot)$ et en utilisant la relation 7, nous établissons la propriété 4.

Notons que l'équation 8 est la version avec reste intégral de la décomposition en série d'une transformation obtenue en réitérant le processus d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} T[f](x) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{K^{(0, 2n)}(x, 0)}{2^{2n} n!} \cdot A_{2n}[\mathcal{Y}](0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{n! \cdot K^{(0, 2n+1)}(x, 0)}{(2n+1)!} \cdot A_{2n+2}[f](0) \end{aligned}$$

$$\text{avec } K^{(m, n)} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \cdot \partial y^m} \cdot K.$$

Références

- [1] R. N. BRACEWELL. The Fourier transform and its applications. McGraw-Hill editions.
- [2] J. M. DINTEN. Tomographie à partir d'un nombre limité de projections : régularisation par des champs markoviens. Thèse de doctorat, Université Paris Sud, centre d'Orsay, 1990.
- [3] J. M. LAGRANGE. Reconstruction tomographique à partir d'un petit nombre de vues. Thèse de doctorat de l'ENS Cachan soutenue le 16 Décembre 1998.

- [4] I. et R. ABRAHAM. An active curve approach for tomographic reconstruction of binary radially symmetric objects. *Accepté à Inverse Problems*.
- [5] G. TALENTI. Recovering a function from a finite number of moments. *Inverse Problems*, vol. 3, pp. 501-517, 1987.
- [6] F. LAVALLOU. Réflexions sur le monde conique. Rapport interne CEA 2004.
- [7] J. HADAMARD. Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Paris, Herman, 1932.
- [8] M. RIESZ. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes. CRIM de Juillet 1937, Paris, Gauthiers-Villars, 1939.
- [9] A. D. POULARIKAS. The transforms and applications handbook. CRC Press, 1996.
- [10] A. ERDELYI et al. Tables of integral transforms. Vol. II, chap. 13, Mc GrawHill, NY 1954.
- [11] C.A.M. VAN BERKEL, S.J.L. VAN EIJNDHOVEN Fractional calculus, gegenbauer transformations, and Integral Equations *J. of Math. Analysis and Applications*, Vol.194, pp.126-146, 1995.

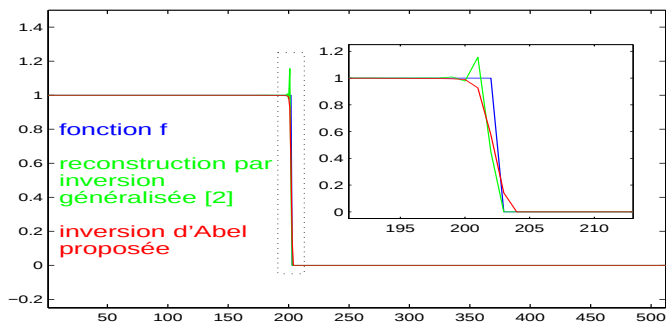


FIG. 2 – Comparaison de la reconstruction d'une densité f constante par inverse généralisé et par "reprojection". L'atténuation de l'oscillation (voir zoom) est due au lissage inhérent au mode de calcul de la dérivée de $A_2[f]$ (demie somme de la dérivée à droite et à gauche) qui produit un front de montée indépendant du rayon du cylindre.

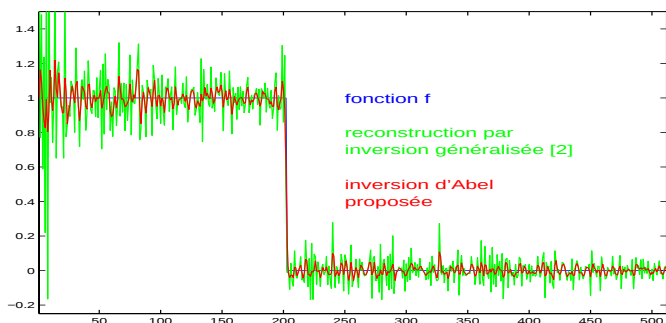


FIG. 3 – Pour les conditions de calcul de la figure 2, le bruit sur une reconstruction dépend de la méthode numérique utilisée pour l'inversion de la transformée d'Abel. La moins grande sensibilité au bruit de la "reprojection" provient du lissage intégral de $\mathcal{Y}$ dans l'équation 6.

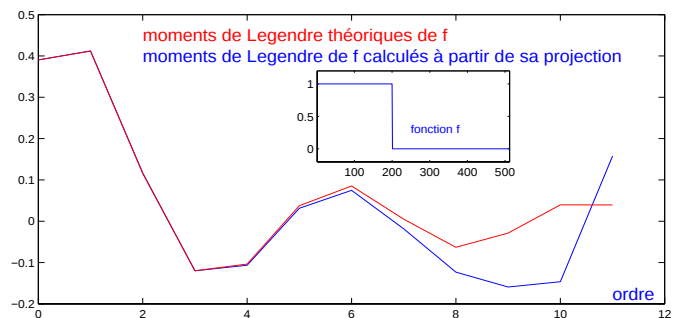


FIG. 4 – Le calcul des itérés de la projection de f permet de calculer les moments de la fonction densité en appliquant 7. Nous en déduisons la valeur des moments de Legendre de cette fonction densité (voir encadré) qui illustre un corps cylindrique de densité constante. Nous constatons un bon accord jusqu'à l'ordre 6, au-delà le cumul des erreurs numériques rend cette évaluation inopérante.

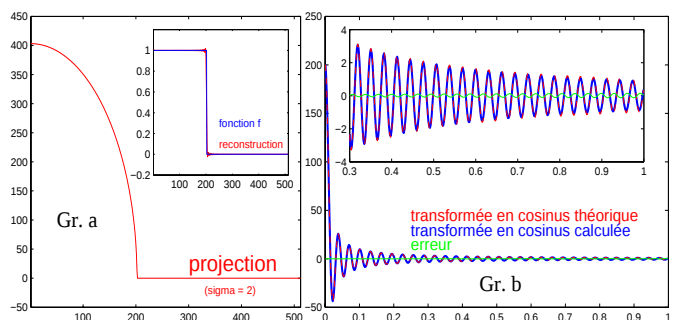


FIG. 5 – Le graphe Gr.a fournit la projection (en rouge) d'un objet cylindrique de densité constante (la fonction f en bleu). En superposition, est représentée la reconstruction obtenue par la transformée en cosinus inverse. Le graphe Gr.b illustre le calcul de la transformée en cosinus de la fonction f à partir de sa projection $\mathcal{Y}$ par discrétisation "brutale" de l'équation (9).

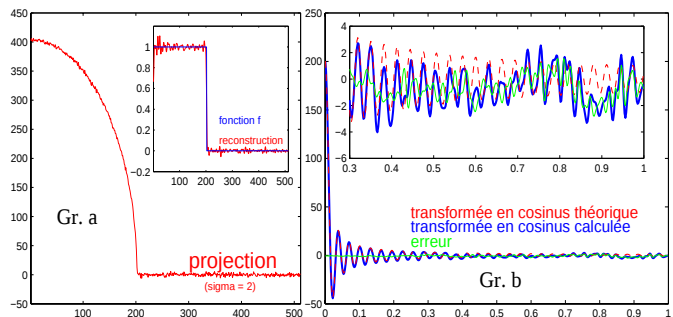


FIG. 6 – Avec la projection de la figure 5 bruitée ($\sigma = 2$), nous constatons que l'erreur sur l'estimation de $T_c[f]$ croît avec la fréquence, mais est très inférieure à celle que l'on obtiendrait par application du théorème coupe-projection.