

ÉCLATEMENT DES CONTRAINTES EN RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE

Thomas D. CAPRICELLI, Patrick L. COMBETTES

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie – Paris 6
75005 Paris, France

capricelli@ann.jussieu.fr, plc@math.jussieu.fr

Résumé – Le problème de la reconstruction tomographique est formulé en tant que problème de programmation convexe. Une fonction-objectif convexe est minimisée sur l’intersection de convexes construits à partir des connaissances a priori et des observations. Les ensembles convexes sont associés à des contraintes sur l’image originale et sur son sinogramme. L’algorithme proposé pour résoudre ce problème procède par éclatement des contraintes et permet de les traiter par blocs en parallèle. Des résultats numériques sont fournis.

Abstract – The tomographic reconstruction problem is formulated as a convex programming problem. An objective function is minimized over the intersection of convex sets arising from a priori knowledge and the observations. The convex sets are associated with constraints on the original image and its sinogram. The basic principle of the algorithm we propose to solve this problem is to decompose the constraints and to process them by blocks in parallel. Numerical results are provided.

1 Introduction

Le problème de la tomographie bidimensionnelle est de reconstruire l’image \bar{x} d’un objet à partir de mesures de ses intégrales rectilignes suivant des directions $(\theta_i)_{1 \leq i \leq q}$. Mathématiquement, il s’agit donc d’estimer une fonction \bar{x} à partir d’une observation partielle et bruitée de sa transformée de Radon [3, 11, 13].

En tomographie assistée par ordinateur, l’image originale \bar{x} est discrétisée et représentée par un point dans l’espace euclidien \mathbb{R}^N , N étant le nombre total de pixels. Désignons par s_i ($1 \leq i \leq q$) la i^{e} observation, i.e., la mesure des intégrales rectilignes discrètes au travers de \bar{x} dans la direction θ_i . Chaque mesure s_i est discrétisée sur M points et est donc représentée par un vecteur de \mathbb{R}^M . Les vecteurs $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$ sont liés à \bar{x} par les relations

$$(\forall i \in \{1, \dots, q\}) \quad s_i = L_i \bar{x}, \quad (1)$$

où L_i est la restriction de la transformée de Radon à la direction θ_i ; cette transformation linéaire s’exprime en fonction de θ_i [3, 11]. Dans la pratique, le modèle idéal (1) doit être remplacé par

$$(\forall i \in \{1, \dots, q\}) \quad s_i = L_i \bar{x} + w_i, \quad (2)$$

où w_i représente un bruit modélisant divers phénomènes physiques. Il est notoire que le problème de la reconstruction de \bar{x} à partir de l’observation partielle $y = (s_i)_{1 \leq i \leq q}$ de son sinogramme est mal posé et que, pour obtenir des solutions fiables, il faut incorporer dans la méthode de reconstruction autant d’informations a priori que possible. En prenant comme cadre l’optimisation convexe, le problème peut se mettre sous la forme

$$\text{Trouver } x \in S = \bigcap_{i=1}^m S_i \quad \text{tel que } J(x) = \inf J(S), \quad (3)$$

où la fonction-objectif $J: \mathbb{R}^N \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est une fonction convexe et les ensembles-contrainte $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont des

convexes fermés de \mathbb{R}^N . Ces contraintes proviennent des connaissances a priori et des mesures. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les ensembles $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont de la forme

$$(\forall i \in \{1, \dots, m\}) \quad S_i = \{x \in \mathbb{R}^N \mid f_i(x) \leq \delta_i\}, \quad (4)$$

où $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une famille de fonctions convexes de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} et $(\delta_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}^m$ des paramètres réels. On supposera que le problème est bien formulé au sens où $S \neq \emptyset$.

Ce type d’approche remonte aux méthodes de reconstruction algébrique (ART) des années 1970 [11]. Dans ce cas, J était constante et les S_i étaient des intersections d’hyperplans associés aux relations idéales (1). Des fonctions-objectif quadratiques et entropiques ont également été proposées, sous contraintes affines associées aux mesures [3]. Le but de cette communication est de proposer une méthode générale pour résoudre (3)–(4) qui procède par éclatement et approximation des contraintes, et qui offre une grande souplesse quant à sa mise en œuvre sur des architectures à processeurs parallèles. Elle nous permet notamment d’introduire de nouveaux types de contraintes sur l’image originale et son sinogramme.

2 Algorithme

2.1 Projection sous-différentielle

Nous rappelons ici brièvement le concept de projection sous-différentielle (cf. [5] pour de plus amples détails).

Sous nos hypothèses, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, chaque fonction f_i admet au moins un sous-gradient en x , i.e., un point $g_i \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$(\forall y \in \mathbb{R}^N) \quad \langle y - x \mid g_i \rangle + f_i(x) \leq f_i(y). \quad (5)$$

L’ensemble des sous-gradients de f_i en x est le sous-différentiel de f_i en x et se note $\partial f_i(x)$; si f_i est différen-

tiable en x , alors $\partial f_i(x) = \{\nabla f_i(x)\}$. La projection sous-différentielle $G_i x$ de x sur S_i est définie en prenant un sous-gradient quelconque $g_i \in \partial f_i(x)$ et en posant

$$G_i x = \begin{cases} x + \frac{\delta_i - f_i(x)}{\|g_i\|^2} g_i, & \text{si } f_i(x) > \delta_i; \\ x, & \text{si } f_i(x) \leq \delta_i. \end{cases} \quad (6)$$

Le calcul de $G_i x$ est beaucoup plus économique que celui de la projection exacte $P_i x$, qui revient à résoudre un problème de minimisation sous contrainte ; on rappelle cependant que si la projection $P_i x$ de x sur S_i est facile à calculer, alors on peut prendre $G_i x = P_i x$ [5]. En général, $G_i x$ est la projection sur une approximation affine de S_i .

2.2 Méthode parallèle itérative par blocs

Pour ne pas surcharger l'exposition, nous décrivons l'algorithme dans le cas correspondant à nos simulations numériques, c'est-à-dire quand

$$J : x \mapsto \|x - r\|^2. \quad (7)$$

Il s'agit donc de trouver la meilleure approximation, dans l'ensemble des solutions admissibles S , d'une image de référence r .

Notre algorithme est tiré de [6, Section 6.5] ; on se reportera à [6, Section 6.4] pour le cas général et les détails.

Algorithme 1

1. Fixer $\varepsilon \in]0, 1/m[$. Poser $x_0 = r$ et $n = 0$.
2. Prendre un ensemble d'indices $\emptyset \neq I_n \subset \{1, \dots, m\}$.
3. Poser $z_n = x_n + \lambda_n (\sum_{i \in I_n} \omega_{i,n} p_{i,n} - x_n)$, où :
 - a. $(\forall i \in I_n) p_{i,n} = G_i x_n$;
 - b. $\{\omega_{i,n}\}_{i \in I_n} \subset [\varepsilon, 1]$ et $\sum_{i \in I_n} \omega_{i,n} = 1$;
- c. $\lambda_n = \begin{cases} \frac{\sum_{i \in I_n} \omega_{i,n} \|p_{i,n} - x_n\|^2}{\left\| \sum_{i \in I_n} \omega_{i,n} p_{i,n} - x_n \right\|^2}, & \text{si } x_n \notin \bigcap_{i \in I_n} S_i; \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$
4. Poser $\pi_n = \langle x_0 - x_n \mid x_n - z_n \rangle$, $\mu_n = \|x_0 - x_n\|^2$, $\nu_n = \|x_n - z_n\|^2$, et $\rho_n = \mu_n \nu_n - \pi_n^2$.
5. Poser

$$x_{n+1} = \begin{cases} z_n, & \text{si } \rho_n = 0 \text{ et } \pi_n \geq 0; \\ x_0 + \left(1 + \frac{\pi_n}{\nu_n}\right) (z_n - x_n), & \text{si } \rho_n > 0 \text{ et } \pi_n \nu_n \geq \rho_n; \\ x_n + \frac{\nu_n}{\rho_n} (\pi_n (x_0 - x_n) + \mu_n (z_n - x_n)), & \text{si } \rho_n > 0 \text{ et } \pi_n \nu_n < \rho_n. \end{cases}$$

6. Poser $n = n + 1$ et aller à l'étape 2.

Proposition 2 (cf. [6, Thm. 6.4(i)]) *Supposons que*

$$(\exists M \in \mathbb{N}^*) (\forall n \in \mathbb{N}) \bigcup_{k=n}^{n+M-1} I_k = \{1, \dots, m\}. \quad (8)$$

Alors toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ générée par l'Algorithme 1 converge vers l'unique solution de (3) sous les hypothèses (4) et (7).

Remarque 3

- Dans l'algorithme 1, l'ensemble des solutions admissibles S est «éclaté» et l'algorithme n'agit que sur les ensembles-contrainte $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ individuellement.
- Le noyau d'une itération consiste en le calcul simultané d'un bloc de projections sous-différentielles $(p_{i,n})_{i \in I_n}$ de x_n , qui sont ensuite recombinaées pour former le point z_n (étape 3). On calcule alors le nouvel itéré x_{n+1} en fonction de x_0 , x_n , et z_n (étape 5).
- La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit les blocs d'ensembles balayés à chaque itération. La règle (8) impose que chaque ensemble S_i soit utilisé au moins une fois au cours de M itérations consécutives.
- L'Algorithme 1 peut efficacement être mis en œuvre en adaptant, par le choix des blocs d'ensembles, la charge de calcul de chaque itération à la puissance des processeurs parallèles disponibles.
- Contrairement aux méthodes de projections (exactes ou sous-différentielles) classiques [1, 5, 15], qui produisent une image admissible *quelconque*, l'Algorithme 1 converge vers la solution admissible la plus proche de l'image de référence r . Plus généralement, la méthode de [6, Section 6.4] converge vers la solution admissible qui minimise un critère strictement convexe J .

3 Contraintes

3.1 Contraintes sur le sinogramme

Nous disposons de q observations bruitées du sinogramme de \bar{x} données par (2). Une contrainte naturelle sur une estimée x de \bar{x} est d'imposer que, pour chaque $i \in \{1, \dots, q\}$, le résidu $s_i - L_i x$ se comporte comme le bruit w_i .

Historiquement, ce type de contraintes remonte à [10, 11], où il est imposé que l'amplitude de chaque point de $s_i - L_i x$ soit statistiquement compatible avec la distribution du bruit w_i . Ceci conduit à des ensembles convexes de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid |\langle s_i - L_i x \mid e_k \rangle| \leq \delta_{i,k}\}, \quad (9)$$

où $(e_k)_{1 \leq k \leq M}$ est la base canonique de \mathbb{R}^M et $\delta_{i,k}$ est une borne sur les réalisations de la variable aléatoire $|\langle w_i \mid e_k \rangle|$. Notons qu'en pratique il est très délicat d'ajuster les paramètres $\delta_{i,k}$ sur ces qM ensembles de manière à aboutir à un niveau de confiance global satisfaisant [7] (ils doivent être suffisamment grands pour donner une région de confiance acceptable pour \bar{x} , tout en étant suffisamment petits pour que S soit sélectif). Une autre approche est celle de [12], qui consiste à considérer le bruit comme global sur l'ensemble du sinogramme. C'est une approche certes grossière et assez éloignée de la réalité physique, mais qui présente l'avantage de s'affranchir d'une modélisation fine du bruit sur les détecteurs.

La question de la modélisation du bruit en tomographie est difficile. Néanmoins, on sait que le bruit trouve son origine majoritairement au niveau des détecteurs. Il est donc raisonnable de supposer que les bruits sur deux vues différentes s_i et s_j sont indépendants. Suivant l'analyse de [9, 14], si Ψ est une propriété connue du bruit w_i dans (2), l'ensemble associé est

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^N \mid s_i - L_i x \text{ est compatible avec } \Psi\}. \quad (10)$$

Par exemple, l'expérience montre que, pour certaines classes de problèmes, on peut estimer avec une bonne précision l'énergie

du bruit sur le sinogramme à un angle donné θ_i , ce qui conduit à l'ensemble

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|s_i - L_i x\|^2 \leq \delta_i\}. \quad (11)$$

3.2 Contraintes sur l'image originale

Diverses contraintes sur l'image originale ont été utilisées en tomographie pour traduire des propriétés connues a priori [3, 4, 13]. Par exemple, les amplitudes minimale et maximale des pixels sont souvent connues. Après normalisation, cette contrainte est représentée par l'ensemble

$$S_1 = [0, 1]^N. \quad (12)$$

De même, on connaît souvent une approximation K du support de l'objet à reconstruire. L'ensemble associé est

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \cdot 1_K = x\}, \quad (13)$$

où 1_K désigne la fonction caractéristique de K .

Il est également possible d'imposer une contrainte de moment. En effet, la moyenne de l'image \bar{x} est invariante par la transformée de Radon à un angle donné. Donc, au vu de (2),

$$(\forall i \in \{1, \dots, q\}) \int_{\mathbb{R}^2} \bar{x} = \int_{\mathbb{R}} L_i \bar{x} = \int_{\mathbb{R}} s_i - \int_{\mathbb{R}} w_i. \quad (14)$$

Donc en supposant les moyennes des bruits $(w_i)_{1 \leq i \leq q}$ connues et en prenant les valeurs minimale et maximale des moyennes observées sur les q vues $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$, on obtient un encadrement de la moyenne de \bar{x} . L'ensemble associé à cette contrainte est de la forme

$$S_3 = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \mu \leq \langle x \mid \underline{1} \rangle \leq \nu\}. \quad (15)$$

Notons que les projections sur les trois ensembles ci-dessus peuvent être calculées explicitement [4].

Comme on l'a observé dans [8], dans de nombreux types de problèmes, la variation totale $\text{tv}(\bar{x})$ de l'image originale, qui est une mesure de la quantité d'oscillations, ne dépasse pas une certaine borne connue ζ (cf. [2] pour une autre utilisation de la variation totale en tomographie). Par exemple, en tomographie médicale, les images ont souvent un nombre fini de niveaux de gris et la variation totale s'identifie à la somme des longueurs des contours des objets élémentaires composant l'image. Il s'agit donc d'une quantité qui peut être estimée à partir d'expérimentations ou de banques d'images du même type. L'ensemble associé est

$$S_4 = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \text{tv}(x) \leq \zeta\}, \quad (16)$$

où la variation totale d'une image $x = [x^{i,j}] \in \mathbb{R}^{\sqrt{N} \times \sqrt{N}}$ est

$$\begin{aligned} \text{tv}(x) &= \sum_{i=0}^{\sqrt{N}-2} \sum_{j=0}^{\sqrt{N}-2} \sqrt{|x^{i+1,j} - x^{i,j}|^2 + |x^{i,j+1} - x^{i,j}|^2} \\ &+ \sum_{i=0}^{\sqrt{N}-2} |x^{i+1,\sqrt{N}-1} - x^{i,\sqrt{N}-1}| \\ &+ \sum_{j=0}^{\sqrt{N}-2} |x^{\sqrt{N}-1,j+1} - x^{\sqrt{N}-1,j}|. \end{aligned} \quad (17)$$

L'opérateur de projection sous-différentielle G_4 sur cet ensemble est donné dans [8].



FIG. 1 – Image originale.

4 Simulations numériques

Nos simulations sont basées sur l'image test classique de Shepp-Logan (cf. Fig. 1).

4.1 Simulation du bruit

Le bruit provient essentiellement du fait que des quanta ont été déviés de leur trajectoire initiale. Pour simuler le bruit w_i dans (2), nous ajoutons un bruit gaussien centré w à l'image originale \bar{x} . La vue correspondant à l'angle θ_i est donc

$$L_i(\bar{x} + w) = L_i \bar{x} + L_i w. \quad (18)$$

Puisque qu'un détecteur ne peut détecter qu'un nombre positif de quanta, nous tronquons les valeurs négatives et donc $w_i = \max\{L_i w, 0\}$. Le rapport signal-sur-bruit sera toujours défini par rapport au bruit «artificiel» w et exprimé en décibels (dB); sa valeur est donc $10 \log_{10}(\|\bar{x}\|^2/\|w\|^2)$.

4.2 Mise en oeuvre

Nous utilisons l'Algorithme 1 avec $r = 0$ dans (7). Le problème (3) est donc de trouver l'image admissible d'énergie minimale. Nous utilisons $q = 17$ vues, ce qui est très peu comparé au nombre de vues habituellement utilisées. Le rapport signal-sur-bruit est de 20 dB. La projection sur $S_1 \cap S_2$ de la reconstruction classique par rétroprojection apparaît dans la Fig. 2.

4.3 Contraintes

Nous utilisons les ensembles (12), (13), (15), et (16). Pour la prise en compte des données, nous utilisons les ensembles (11), à savoir,

$$S_{i+4} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|s_i - L_i x\|^2 \leq \delta_i\}, \quad 1 \leq i \leq q. \quad (19)$$

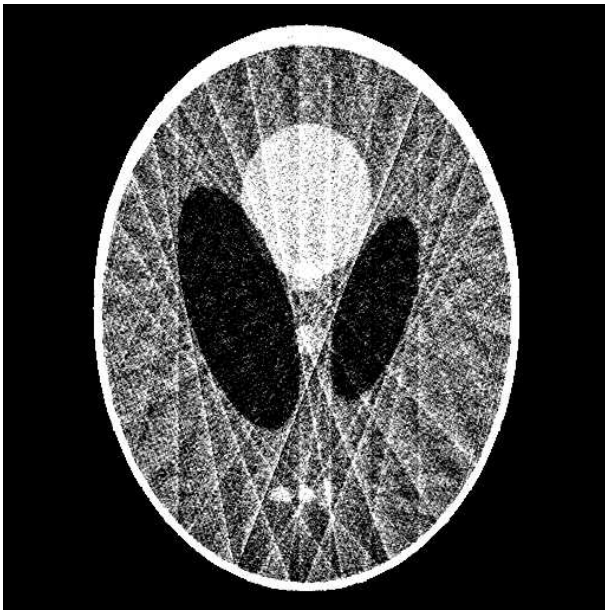


FIG. 2 – Reconstruction par rétroprojection classique sous les contraintes (12) et (13).

On tire de (6) que la projection sous-différentielle d'une image x sur cet ensemble est

$$G_{i+4}x = \begin{cases} x + \frac{\delta_i - \|L_i x - s_i\|^2}{2\|L_i^\top(L_i x - s_i)\|^2} L_i^\top(L_i x - s_i), & \text{si } \|L_i x - s_i\|^2 > \delta_i; \\ x, & \text{si } \|L_i x - s_i\|^2 \leq \delta_i. \end{cases} \quad (20)$$

On a donc un total de $m = q + 4 = 21$ contraintes. L'Algorithme 1 est porté sur une machine à 8 processeurs parallèles. On choisit donc des blocs de 8 ensembles à chaque itération, activés de manière cyclique, c'est-à-dire

$$I_n = \{(8n) \bmod(m) + 1, \dots, (8n + 7) \bmod(m) + 1\}. \quad (21)$$

Les poids $(w_{i,n})_{i \in I_n}$ sont pris égaux sur les contraintes actives de $(S_i)_{i \in I_n}$ et nuls sur les contraintes inactives.

4.4 Résultats

La Fig. 3 montre le résultat obtenu en appliquant l'Algorithme 1. On remarque que les ellipses de l'image originale sont toutes présentes et qu'il y a peu d'artefacts.

Références

[1] H. H. Bauschke and J. M. Borwein, "On projection algorithms for solving convex feasibility problems," *SIAM Rev.*, vol. 38, pp. 367–426, 1996.

[2] M. M. Bronstein, A. M. Bronstein, M. Zibulevsky, and H. Azhari, "Reconstruction in diffraction ultrasound tomography using nonuniform FFT," *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 21, pp. 1395–1401, 2002.

[3] Y. Censor and S. A. Zenios, *Parallel Optimization : Theory, Algorithms and Applications*. New York : Oxford University Press, 1997.

[4] P. L. Combettes, "The convex feasibility problem in image recovery," *Advances in Imaging and Electron Physics*, vol. 95, pp. 155–270. New York : Academic, 1996.



FIG. 3 – Reconstruction par la méthode proposée.

[5] P. L. Combettes, "Convex set theoretic image recovery by extrapolated iterations of parallel subgradient projections," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 6, pp. 493–506, 1997.

[6] P. L. Combettes, "Strong convergence of block-iterative outer approximation methods for convex optimization," *SIAM J. Control Optim.*, vol. 38, pp. 538–565, 2000.

[7] P. L. Combettes and T. J. Chaussalet, "Combining statistical information in set theoretic estimation," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 3, pp. 61–62, 1996.

[8] P. L. Combettes and J. C. Pesquet, "Image restoration subject to a total variation constraint," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 13, pp. 1213–1222, 2004.

[9] P. L. Combettes and H. J. Trussell, "The use of noise properties in set theoretic estimation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 39, pp. 1630–1641, 1991.

[10] G. T. Herman, "A relaxation method for reconstructing objects from noisy X-rays," *Math. Programming*, vol. 8, pp. 1–19, 1975.

[11] G. T. Herman, *Image Reconstruction from Projections, the Fundamentals of Computerized Tomography*. New York : Academic, 1980.

[12] H. Kudo and T. Saito, "Sinogram recovery with the method of convex projections for limited-data reconstruction in computed tomography," *J. Opt. Soc. Amer. A*, vol. 8, pp. 1148–1160, 1991.

[13] H. Stark (Ed.), *Image Recovery : Theory and Application*. San Diego, CA : Academic, 1987.

[14] H. J. Trussell and M. R. Civanlar, "The feasible solution in signal restoration," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 32, pp. 201–212, 1984.

[15] D. C. Youla and H. Webb, "Image restoration by the method of convex projections : Part 1 – theory," *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 1, pp. 81–94, 1982.