

Géométrie des ensembles de chirps et détection des ondes gravitationnelles

Éric CHASSANDE-MOTTIN

CNRS, Observatoire de la Côte d’Azur, ARTEMIS
BP 4229 06304 Nice Cedex 4 FRANCE
ecm@obs-nice.fr

Résumé – Un réseau mondial de détecteurs a pour objectif la première détection directe des ondes gravitationnelles dont l’existence est prédite par la théorie de la relativité d’Einstein. On s’intéresse aux méthodes d’analyse des données de ce réseau, et en particulier ce qui concerne la détection des “chirps” gravitationnels en provenance de binaires d’étoiles à neutrons ou de trous noirs. Pour ces sources, un banc de filtres adaptés est mis en œuvre, calculant la corrélation entre les données et un ensemble de signatures caractéristiques. Une difficulté réside dans le choix de cet ensemble, dont on montre qu’il passe par la définition et l’utilisation d’une distance entre chirps. En partant de modèles généraux de chirps, nous obtenons une nouvelle formulation de cette distance offrant une vision simple de la géométrie sous-jacente. On applique ce résultat au cas spécifique des chirps gravitationnels.

Abstract – A worldwide network of detectors is targeting the first direct detection of gravitational waves whose existence is predicted by Einstein’s theory of general relativity. We are interested in the processing methods of the data of this network, and in particular in what concerns the detection of gravitational “chirps” coming from binaries of neutron stars or black holes. For such sources, a bank of matched filters is implemented, and calculates the correlation between the data and a set of generic signatures. A difficulty resides in the choice of this set, which as shown, requires the definition and use of a distance measurement between chirps. Starting from general chirp models, we obtain a new formulation of the distance which offers a simple understanding of the underlying geometry. We apply this result to the specific case of gravitational chirps.

1 Motivations

Dans la théorie de la relativité générale, la gravitation résulte de la courbure de l’espace-temps. L’évolution dynamique de la courbure est décrite par les équations d’Einstein. Leur résolution montre l’existence de solutions radiatives : les ondes gravitationnelles (OGs). Un réseau mondial de détecteurs [1], actuellement en cours de mise en service, vise à la vérification expérimentale de cette prédiction. L’objectif est de faire la détection directe des OGs en provenance de systèmes astrophysiques (formés d’objets suffisamment massifs pour provoquer un rayonnement gravitationnel d’amplitude détectable).

Les binaires d’étoiles à neutrons ou de trous noirs sont des candidats privilégiés pour la principale raison qu’elles émettent une signature gravitationnelle dont on sait obtenir un modèle. L’OG émise est un signal modulé en fréquence ou *chirp* $s(t) = A(t) \cos \varphi(t)$. Son amplitude $A(t) \equiv A a(t) > 0$ et sa phase $\varphi(t) \equiv \phi(t) + \theta$ sont connues à un facteur d’échelle $A > 0$ et une phase $\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$ près et suivent en première approximation (dite “newtonienne”) [3] les lois suivantes :

$$a(t) = \mathcal{A} (\tau - t)^\alpha U(\tau - t), \quad (1a)$$

$$\phi(t) = 2\pi C \left(\frac{\tau - t}{\mathcal{M}} \right)^\beta U(\tau - t), \quad (1b)$$

où $\alpha = -1/4$, $\beta = 5/8$, $C \approx 241$, \mathcal{A} est une constante de normalisation et $U(t) = 1$ si $t > 0$, $= 0$ sinon. Ces expres-

sions dépendent de paramètres physiques $p \equiv \{\tau, \mathcal{M}\}$ liés à la binaire considérée, à savoir le temps de coalescence τ et la *chirp mass* \mathcal{M} .

La détection d’un tel signal dans le bruit instrumental s’effectue à l’aide d’un filtre adapté mesurant la corrélation entre les données et un *patron d’onde* défini par les éqs. (1). À cause de la coloration du bruit, une opération de blanchiment est préalablement appliquée.

On ne connaît pas *a priori* les paramètres p . La mesure de corrélation doit donc être répétée pour toutes les valeurs de p physiquement admissibles, d’où la mise en œuvre d’un banc de filtres adaptés. Une difficulté réside dans le choix de l’ensemble des patrons d’ondes pour ce banc qui doit, à la fois, couvrir toutes les possibilités et ne pas être sur-dimensionné (pour des raisons d’économie de calcul numérique).

Qualitativement, on doit choisir une grille de patrons d’ondes aux mailles ni trop serrées (patrons d’onde corrélés entre eux) ni trop lâche (décorrélés). L’introduction d’une distance (voir par ex., [3]) mesurant le degré de corrélation entre deux chirps gravitationnels donne une réponse quantitative à cette question.

La distance dépend de la densité spectrale de puissance (DSP) du bruit instrumental. Les conditions de fonctionnement du détecteur peuvent fluctuer et causer des non-stationnarités. La distance et par conséquent la grille doivent être réactualisées régulièrement. La mise à jour n’est pas envisageable avec la méthode actuelle (trop coûteuse)

de calcul de la distance.

Nous proposons ici une méthode d'estimation rapide de la distance. En Sect. 2, nous reprenons la définition de la distance dans un cadre plus large que celui des OGs, en l'étendant à des modèles généraux de chirps. Le résultat est une formulation approchée qui donne une vision simple de la géométrie des ensembles de chirps. On utilise ce résultat en Sect. 3 dans le contexte des OGs.

2 Distance dans les ensembles de chirps arbitraires

On suppose que les signaux sont correctement échantillonnés à la fréquence $f_s \equiv 1/t_s$. On considère le problème de détection (H_1) : $x_k = s_k + b_k$ vs. (H_0) : $x_k = b_k$ avec $k = 0, \dots, N-1$ où le bruit b est gaussien et blanc et où l'amplitude $a_k = a(t_s k) > 0$ et la phase $\phi_k = \phi(t_s k)$ du chirp $s_k = s(t_s k) = A a_k \cos(\phi_k + \theta)$ sont arbitraires (ils n'obéissent donc pas aux éqs. (1)) à l'exception de la normalisation ¹ $\sum_k a_k^2 = N$.

Le rapport de vraisemblance généralisé (RVG) est une approche classique pour ce type de problème. La statistique est obtenue en remplaçant dans le rapport de vraisemblance, les paramètres inconnus, ici A et θ , par leurs estimateurs au maximum de vraisemblance. Ceci conduit au *filtre adapté à détection d'enveloppe* $\ell(x; a, \phi)$ qui s'exprime par [2]

$$\ell(x; a, \phi) = \frac{n_s x_c^2 - 2n_x x_c x_s + n_c x_s^2}{n_c n_s - n_x^2}, \quad (2)$$

où $x_c \equiv \sum_k x_k a_k \cos \phi_k$ et $x_s \equiv \sum_k x_k a_k \sin \phi_k$ désignent la corrélation des données avec les formes d'ondes en quadrature du patron d'onde, et $n_c \equiv \sum_k a_k^2 \cos^2 \phi_k$, $n_x \equiv \sum_k a_k^2 \cos \phi_k \sin \phi_k$ et $n_s \equiv \sum_k a_k^2 \sin^2 \phi_k$ servent à la normalisation de la statistique.

On veut évaluer l'erreur commise lorsque l'amplitude et la phase du chirp effectivement présent dans les données sont légèrement différentes de celles du patron d'onde. Autrement dit, on veut connaître la perte relative sur la hauteur maximale du pic de détection de la statistique ℓ .

Pour simplifier les notations, on concatène l'amplitude et la phase du chirp dans un vecteur caractéristique c de taille $2N$ tel que $c_k = a_k$ et $c_{N+k} = \phi_k$ pour $k = 0, \dots, N-1$. On distingue par un astérisque le patron d'onde c^* du chirp reçu c . L'erreur relative due à la désadaptation s'écrit :

$$\mathcal{L}(c; c^*) \equiv \frac{\ell(s; c) - \ell(s; c^*)}{\ell(s; c)}. \quad (3)$$

D'un point de vue géométrique, \mathcal{L} s'interprète comme une *distance* (au sens large). On vérifie que $\mathcal{L} \geq 0$ et que $\mathcal{L}(c; c) = 0$ (i.e., la distance séparant deux chirps identiques est nulle). En résumé, avec ces définitions, plus la distance entre chirp effectif et patron d'onde est petite (i.e., leur amplitude et phase sont proches), plus la perte de contraste à la détection est petite.

¹Dans la suite, toutes les sommes sont prises par défaut pour $k = 0, \dots, N-1$ et $i, j = 0, \dots, 2N-1$

Il est difficile de percevoir à partir des définitions (2) et (3) les variations de \mathcal{L} . Pour $c^* \approx c$, on obtient une expression approchée plus simple et intuitive par un développement de Taylor pour des petites variations de $c^* - c$. Le calcul, détaillé en Annexe, conduit à

$$\mathcal{L}(c; c^*) \approx \frac{1}{N} \sum_k a_k^2 [(\alpha_k - \bar{\alpha})^2 + (\Delta_k - \bar{\Delta})^2], \quad (4)$$

où $\bar{\alpha} = 1/N \sum_k a_k^2 \alpha_k$ et $\bar{\Delta} = 1/N \sum_k a_k^2 \Delta_k$. Ceci met en évidence le lien explicite de la distance et des différences de phase $\Delta_k = \phi_k^* - \phi_k$ et d'amplitude $\alpha_k = (a_k^* - a_k)/a_k$ (ce dernier s'apparente plutôt à l'écart du logarithme des amplitudes).

Dans la représentation donnée par l'amplitude et la phase du chirp, la distance \mathcal{L} est similaire à une distance L^2 , ce qui met en évidence la simplicité de la géométrie associée.

Tous ces développements se généralisent (par le biais d'une approximation de phase stationnaire) au cas d'un bruit coloré de DSP $\Gamma(f)$ en remplaçant a_k par $a_k/\sqrt{f_s \Gamma(f_k)}$ où $f_k = f(t_s k)$ et $f(t) \equiv (2\pi)^{-1} \dot{\phi}(t)$ est la fréquence instantanée.

3 Grilles de chirps newtoniens

Nous revenons à la question initiale de la définition d'une grille de patrons d'onde pour la détection des OGs. Nous désignons indifféremment un patron d'onde par son paramètre $p^* = \{\tau^*, \mathcal{M}^*\}$ ou le couple phase et amplitude $c^* = (a^*, \phi^*)$ tel que il est défini en éq. (1). Notons que l'amplitude est normalisée (à l'aide d'un choix adéquat de A) de manière à satisfaire la condition $\sum_k a_k^2 = N$.

L'idée est de construire une grille (i.e., un échantillonnage du plan p^*) de sorte que, pour tout signal effectif de paramètre p , la grille contienne un patron d'onde "suffisamment proche" i.e., $\mathcal{L}(c; c^*) \lesssim \lambda$ où λ est la distance maximale, typiquement $\lambda \approx 10\%$. L'échantillonnage de τ^* est fixé égal à celui du signal (régulier d'intervalle t_s) pour des raisons d'implémentation. Il reste donc à déterminer la discrétisation de la direction associée à la chirp mass \mathcal{M}^* , ce qui nous conduit à considérer

$$\check{\mathcal{L}}(\mathcal{M}; \mathcal{M}^*) = \min_{\tau^*, \tau \text{ fixé}} \mathcal{L}(p; p^*). \quad (5)$$

Pour la procédure de sélection des nœuds de la grille (ou le "placement" des patrons d'onde), on doit évaluer $\check{\mathcal{L}}(\mathcal{M}; \mathcal{M}^*)$ pour tout couple $\mathcal{M}, \mathcal{M}^*$ admissible (en pratique, on se limite à un voisinage $\mathcal{M}^* \approx \mathcal{M}$ à \mathcal{M} fixé). La minimisation dans la définition de $\check{\mathcal{L}}(\mathcal{M}; \mathcal{M}^*)$ demande des ressources de calculs conséquentes.

Nous proposons une méthode originale de calcul de la distance $\check{\mathcal{L}}(\mathcal{M}; \mathcal{M}^*)$ qui s'appuie sur l'approximation de la distance donnée en éq. (4).

Descente au gradient — En notant que $\partial_{\tau^*} \Delta_k = -2\pi f_k^*$ et $\partial_{\tau^*} \alpha_k = -\dot{a}_k^*/a_k$, la différentiation de l'approximation (4) montre que le gradient peut être évalué numériquement en $O(N)$ opérations par

$$\partial_{\tau^*} \mathcal{L}(p; p^*) \approx -\frac{2}{N} \sum_k a_k^2 \left[\frac{\dot{a}_k^*}{a_k} (\alpha_k - \bar{\alpha}) + 2\pi f_k^* (\Delta_k - \bar{\Delta}) \right], \quad (6)$$

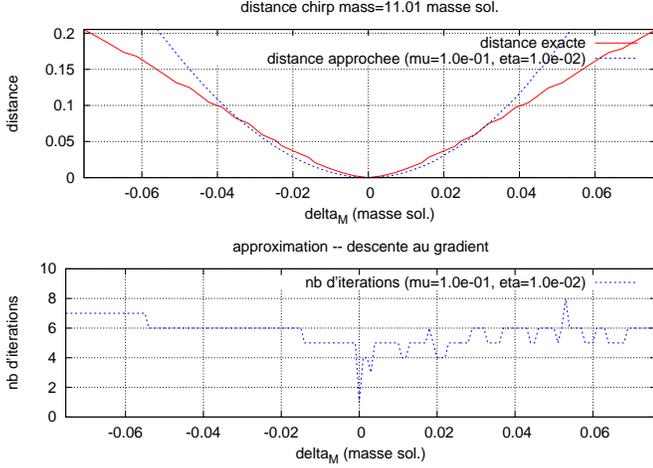


FIG. 1 – Valeur exacte de $\check{\mathcal{L}}(\mathcal{M}; \mathcal{M} + \delta_{\mathcal{M}})$ pour $\mathcal{M} = 11.01M_{\odot}$ comparée à son estimation $\check{\mathcal{L}}_{\infty}$ et le nombre d'itérations de la descente au gradient (avec $\mu = 10^{-1}$ et $\eta = 10^{-2}$) jusqu'à convergence.

et avec les expressions de \dot{a}_k^* et f_k^* obtenues des éqs. (1).

On dispose de la direction de plus grande pente que l'on peut employer pour calculer $\check{\mathcal{L}}$ par une descente au gradient. Pour $p = \{\tau, \mathcal{M}\}$ et un écart $\delta_{\mathcal{M}}$ fixés, on initialise au point $\{\tau_0^* = \tau, \mathcal{M}^* = \mathcal{M} + \delta_{\mathcal{M}}\}$, et on procède en itérant $\tau_{i+1}^* = \tau_i^* - \mu \partial_{\tau} \mathcal{L}(p; p_i^*)$ et en mettant à jour la distance $\check{\mathcal{L}}_{i+1} = \mathcal{L}(p; p_i^*)$ avec l'éq. (4) jusqu'à la convergence décidée par le critère $|\check{\mathcal{L}}_{i+1} - \check{\mathcal{L}}_i|/\check{\mathcal{L}}_i \leq \eta$. On note $\check{\mathcal{L}}_{\infty}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$, l'estimation ainsi obtenue.

La figure 1 montre le résultat d'une simulation faite dans le cas simplifié d'une amplitude a_k constante et d'un bruit blanc. L'algorithme converge rapidement (< 10 itérations). L'estimation approche la distance exacte à 10% près dans le voisinage utile du minimum (i.e., $\check{\mathcal{L}} \lesssim 0.1$). À titre d'illustration, on compare en figure 2 les distances \mathcal{L} (avant minimisation) exacte et approchée en limite du domaine de validité de l'estimation de $\check{\mathcal{L}}$. On note que l'approximation de \mathcal{L} est bonne pour des δ_{τ} proches de zéro, mais le minimum exact se trouve en limite de cette région et les termes d'ordre supérieur à 2 peuvent plus être négligés.

Conclusions

La représentation d'un chirp donnée par son amplitude et sa phase est agrémentée d'une géométrie locale simple, dans le sens où la distance entre deux individus (suffisamment proches) est reliée simplement à la paramétrisation choisie. Nous montrons comment cette distance est utile au calcul ou à la mise à jour des grilles de patron d'ondes gravitationnelles. L'approche proposée est validée dans son principe dans un cas simplifié.

Notons que l'algorithme de descente au gradient peut être remplacé par une minimisation du type quasi-Newton puisqu'on peut disposer en plus du gradient d'une estimation de la courbure locale $\partial_{\tau}^2 \mathcal{L}$.

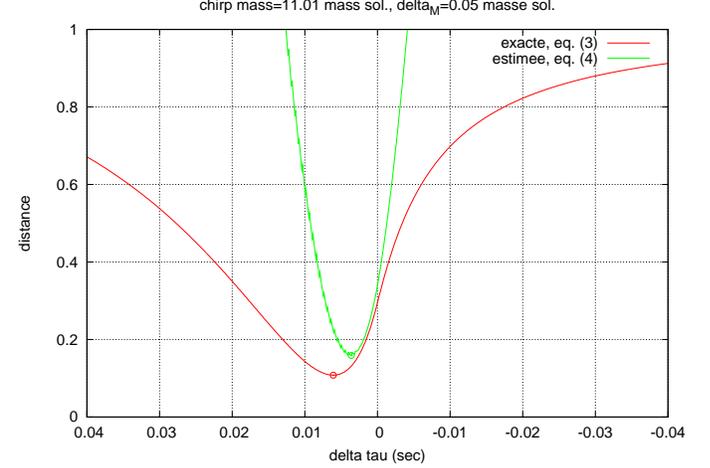


FIG. 2 – Valeurs exacte (éq. (3)) et approchée (éq. (4)) de $\mathcal{L}(p; p^*)$ pour $p = \{\tau \text{ fixé}, \mathcal{M} = 11.01M_{\odot}\}$ et $p^* = \{\tau + \delta_{\tau}, \mathcal{M} + \delta_{\mathcal{M}}\}$ avec $\delta_{\mathcal{M}} = 0.05M_{\odot}$, $f_s = 2048$ Hz et $N = 8192$ ($t_s N = 2$ s).

Références

- [1] GEO600 : <http://www.geo600.uni-hannover.de> ; LIGO : <http://www.ligo.org> ; Virgo : <http://www.virgo.infn.it> ; TAMA : <http://tamago.mtk.nao.ac.jp>.
- [2] É. Chassande-Mottin and A. Pai. Best chirplet chain : near-optimal detection of gravitational wave chirps. En préparation, 2005.
- [3] B. J. Owen. Search templates for gravitational waves from inspiraling binaries : Choice of template spacing. *Phys. Rev. D*, 53 :6749–6761, 1996.

Annexe : approximation de la distance entre chirps

On détaille ici l'approximation de Taylor de la distance pour des petites variations de $c^* - c$,

$$\ell(s; c^*) = \ell(s; c) + \sum_j \partial_j \ell|_{c^*=c} (c_j^* - c_j) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_{ij}^2 \ell|_{c^*=c} (c_i^* - c_i)(c_j^* - c_j) + \dots, \quad (7)$$

où l'on a noté $\partial_j \equiv \partial/\partial c_j^*$ et $\partial_{ij}^2 \equiv \partial^2/\partial c_i^* \partial c_j^*$.

Dérivée première, extremum local — On note respectivement n et d , le numérateur et le dénominateur de la statistique ℓ en Eq. (2). En supprimant les arguments par souci de compacité, on a $\partial_j \ell = (\partial_j n - \ell \partial_j d)/d$.

Les dérivées du numérateur

$$\begin{aligned} \partial_j n &= \partial_j n_s x_c^2 + 2n_s x_c \partial_j x_c \\ &\quad - 2(\partial_j n_x x_c x_s + n_x \partial_j x_c x_s + n_x x_c \partial_j x_s) \\ &\quad + \partial_j n_c x_s^2 + 2n_c x_s \partial_j x_s, \end{aligned}$$

et du dénominateur

$$\partial_j d = \partial_j n_c n_s + n_c \partial_j n_s - 2n_x \partial_j n_x,$$

peuvent être explicitement obtenues au point $c^* = c$ en y insérant les dérivées de chaque terme.

Pour $j < N$, la dérivée s'effectue par rapport à l'amplitude $c_j^* = a_k$ avec $k = j$ et conduit à

$$\partial_j n_c|_{c^*=c} = a_k(1 + \cos 2\phi_k)$$

$$\partial_j n_x|_{c^*=c} = a_k \sin 2\phi_k$$

$$\partial_j n_s|_{c^*=c} = a_k(1 - \cos 2\phi_k)$$

$$\partial_j x_c|_{c^*=c} = a_k/2(\cos \theta \cos 2\phi_k - \sin \theta \sin 2\phi_k + \cos \theta)$$

$$\partial_j x_s|_{c^*=c} = a_k/2(-\sin \theta \cos 2\phi_k - \cos \theta \sin 2\phi_k + \sin \theta).$$

et pour $j \geq N$, la dérivée s'effectue par rapport à la phase $c_j^* = \phi_k^*$ avec $k = j - N$,

$$\partial_j n_c|_{c^*=c} = -a_k^2 \sin 2\phi_k$$

$$\partial_j n_x|_{c^*=c} = a_k^2 \cos 2\phi_k$$

$$\partial_j n_s|_{c^*=c} = a_k^2 \sin 2\phi_k$$

$$\partial_j x_c|_{c^*=c} = a_k^2/2(-\sin \theta \cos 2\phi_k - \cos \theta \sin 2\phi_k + \sin \theta)$$

$$\partial_j x_s|_{c^*=c} = a_k^2/2(\cos \theta \cos 2\phi_k - \sin \theta \sin 2\phi_k + \cos \theta).$$

Après simplification et à l'aide des expressions suivantes

$$\ell(s; c) = n_c \cos^2 \theta + n_x \sin 2\theta + n_s \sin^2 \theta,$$

et respectivement pour $j < N$ et $j \geq N$,

$$\partial_j d|_{c^*=c} = a_k(N + (n_s - n_c) \cos 2\phi_k - 2n_x \sin 2\phi_k)$$

$$\partial_j d|_{c^*=c} = a_k^2((n_c - n_s) \sin 2\phi_k - 2n_x \cos 2\phi_k),$$

il apparaît que le numérateur peut se factoriser sous la forme

$$\partial_j n|_{c^*=c} = \ell(s; c) \partial_j d|_{c^*=c}.$$

On déduit que $\partial_j \ell|_{c^*=c} = 0$. Le point $c^* = c$ est donc un extremum local.

Dérivée seconde, métrique — La dérivée première s'annulant pour $c^* = c$, la dérivée seconde de ℓ peut être calculée en utilisant le fait que $\partial_{ij}^2 \ell|_{c^*=c} = [(\partial_{ij}^2 n - \ell(s; c^*) \partial_{ij}^2 d)/d]|_{c^*=c}$. Seules les dérivées secondes de n et d doivent donc être évaluées ce que l'on fait par un calcul direct similaire à celui produit pour la dérivée première.

Le résultat final est que l'on peut écrire la dérivée seconde de ℓ sous la forme générale

$$\partial_{ij}^2 \ell|_{c^*=c} = A^2(X_{kl} + D_k \delta_{kl}) + O(\delta + \epsilon) \quad \text{quand } \delta, \epsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

où δ_{kl} désigne le symbole de Kronecker qui est égal à 1 si $k = l$ et s'annule sinon.

Nous définissons les variables δ et ϵ et discutons leur ordre de grandeur, après avoir précisé les expressions des termes croisés X_{kl} et diagonaux D_k et de leurs indices (k, l) selon les cas de figure, en fonction de (i, j) :

- si $i, j < N$, on a $k = i$, $l = j$ et

$$X_{kl} = \frac{a_k a_l}{N} ((1 + \hat{c}_k)(1 + \hat{c}_l) + \hat{s}_k \hat{s}_l)$$

$$D_k = -1 + \hat{c}_k,$$

- si $i, j \geq N$, on a $k = i - N$, $l = j - N$ et

$$X_{kl} = \frac{a_k^2 a_l^2}{N} ((1 - \hat{c}_k)(1 - \hat{c}_l) + \hat{s}_k \hat{s}_l)$$

$$D_k = a_k^2(-1 + \hat{c}_k),$$

- si $i < N$ et $j \geq N$, on a $k = i$ et $l = j - N$,

$$X_{kl} = \frac{a_k a_l^2}{N} (\hat{s}_k(1 + \hat{c}_l) - (1 + \hat{s}_k)\hat{s}_l)$$

$$D_k = -a_k \hat{s}_k,$$

avec une expression symétrique pour le cas $i \geq N$ et $j < N$. Pour obtenir ces expressions, on a noté $\hat{c}_k \equiv \cos 2(\phi_k + \theta)$ et $\hat{s}_k \equiv \sin 2(\phi_k + \theta)$ et on a utilisé le fait que

$$\ell(s; c) = \frac{A^2 N}{2} (1 + \delta \cos 2\theta - \epsilon \sin 2\theta) = \frac{A^2 N}{2} + O(\delta + \epsilon)$$

$$d|_{c^*=c} = \frac{N^2}{4} (1 - \delta^2 - \epsilon^2) = \frac{N^2}{4} + O(\delta^2 + \epsilon^2),$$

lorsque $\delta, \epsilon \rightarrow 0$. Ces variables définies par $\delta \equiv (n_c - n_s)/(n_c + n_s)$ et $\epsilon \equiv 2n_x/(n_c + n_s)$ s'interprètent comme une mesure de l'écart à la quadrature des deux formes d'ondes $a_k \cos \phi_k$ et $a_k \sin \phi_k$, ou autrement dit, de l'écart à l'orthonormalité des vecteurs de \mathbb{R}^N formés de la collection de leur échantillons [2]. Il est intéressant de noter que δ et ϵ sont liés à la somme oscillante suivante :

$$\delta + i\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 \exp i2\phi_k.$$

Qualitativement, si la phase varie suffisamment rapidement, les contributions positives et négatives se compensent en sommant. Les quantités δ et ϵ prennent donc des valeurs intuitivement beaucoup plus petites que la majoration triviale $\delta, \epsilon \leq 1$. Un traitement quantitatif de cette intuition est possible dans le cas où l'amplitude $a_k = 1$ est constante [2]. On montre que, si la fréquence instantanée du chirp ne s'approche pas trop des fréquences nulles ou de Nyquist, δ et ϵ sont effectivement petits devant 1. Nous supposons que ceci est vérifié. Par conséquent, l'éq. (8) peut être considérée comme une bonne approximation de la dérivée seconde de ℓ .

Approximation de la distance — En combinant

$$\mathcal{L}(c; c^*) \approx \frac{-1}{2\ell(s; c)} \sum_{ij} \partial_{ij}^2 \ell|_{c^*=c} (c_i^* - c_i)(c_j^* - c_j)$$

avec l'éq. (8) et les expressions des termes X et D , on obtient une approximation de \mathcal{L} à l'ordre 2. L'expression qui en résulte (trop longue pour être écrite explicitement ici) peut être raisonnablement simplifiée en y sélectionnant les termes dominants. En particulier, les termes du type $1/N \sum_k a_k (a_k - a_k^*) \hat{c}_k$ et $1/N \sum_k a_k^2 (\phi_k - \phi_k^*) \hat{c}_k$ (et similaires avec \hat{s}_k) sont des sommes oscillantes. En supposant que les changements de signe de \hat{c}_k et \hat{s}_k sont plus rapides que ceux de $a_k - a_k^*$ et $\phi_k - \phi_k^*$, leur contribution peut être négligée par le même argument employé précédemment pour δ et ϵ . De cette sélection, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c; c^*) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (a_k^* - a_k)^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k (a_k^* - a_k) \right)^2 \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 (\phi_k^* - \phi_k)^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 (\phi_k^* - \phi_k) \right)^2 \end{aligned}$$

d'où découle l'équation (4).