

Modélisation de courbes de quaternions duaux par des courbes de Bézier et des splines

Gwenael GUILLARD, Chafiaa HAMITOCHE, Christian ROUX

Dépt. ITI, LaTIM INSERM U650, GET-ENST Bretagne
CS 83818, 29238 Brest Cedex, France
gwenael.guillard@enst-bretagne.fr

Résumé – Le travail présenté dans cet article concerne le problème de modélisation de courbes de quaternions duaux. Nous proposons une nouvelle méthode d’interpolation entre deux quaternions duaux basée sur la définition d’angle entre deux quaternions duaux unitaires. Ces notions sont alors utilisées pour définir des algorithmes pour des courbes de Bézier et des splines

Abstract – This paper deals with dual quaternion curve modeling. We propose a new method of interpolation between two dual quaternions based on the definition of two unit dual quaternions. These notions are thus used in order to define algorithms for Bezier curves and splines.

1 Introduction

Les quaternions duaux sont utilisés dans une grande variété de domaines tels que la stéréo-vision [1], le guidage de robot par vision [2], le recalage [3] et la mécanique en général. Dans chacun de ces domaines, il est nécessaire de pouvoir tant interpoler qu’approcher des courbes se situant dans l’espace des quaternions duaux. Les algorithmes existant, par exemple [4], présentent l’inconvénient de quitter cet espace.

Nous proposons ici une nouvelle méthode d’interpolation se basant sur la définition préalable de la notion d’angle entre deux quaternions duaux unitaires. Ensuite, ayant une interpolation, nous proposons deux algorithmes de génération de courbes. Le premier est un algorithme de De Casteljaou pour représenter des courbes de Bézier. Le second est un algorithme de Boor afin de générer des courbes splines.

Ces méthodes étant développées dans l’espace des quaternions duaux, il convient de prendre les plus grandes précautions à l’introduction de chaque nouvelle notion. En effet, cet ensemble n’est pas un espace vectoriel mais un module. Ces deux espaces algébriques présentent certes des similitudes mais aussi de grandes différences.

2 Les quaternions duaux

Cette partie présente rapidement les quaternions duaux. Après une description des quaternions puis des nombres duaux, nous introduirons les quaternions duaux avec de nouvelles méthodes d’approximation et d’interpolation.

2.1 Les quaternions

Introduit par Hamilton [5], l’ensemble des quaternions \mathbb{H} est l’extension des nombres complexes à \mathbb{R}^4 avec trois parties imaginaires. Un tel nombre est défini comme :

$$\mathbf{q} = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

où w, x, y et z sont des nombres réels. Les quaternions \mathbf{i}, \mathbf{j} et \mathbf{k} sont munis des propriétés suivantes :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},$$

ce qui permet de définir l’addition, la multiplication et la multiplication par un réel et de munir \mathbb{H} d’une structure de corps et d’espace vectoriel sur les réels. En plus de ces opérations algébriques, on peut définir un conjugué, une norme et un inverse \mathbf{q}^{-1} . Cette norme induit de plus un produit scalaire lequel permet de définir un angle non orienté θ . Enfin, une interpolation des quaternions unitaires (slerp¹) a été proposée dans [6].

2.2 Les nombres duaux

Introduits par Clifford [7] afin d’étudier la géométrie non euclidienne, les nombres duaux ont ensuite été développés par Study durant ses recherches sur la géométrie des droites. Un nombre dual est donné [8] par :

$$\bar{\lambda} = \lambda + \epsilon\hat{\lambda}$$

avec λ et $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ et ϵ un élément tel que $\epsilon^2 = 0$. L’ensemble de ces nombres, noté \mathbb{D} , peut être muni d’une addition, d’une multiplication et d’une multiplication par un réel faisant de \mathbb{D} un anneau mais pas un corps : seuls les nombres duaux dont la partie réelle est non nulle possède pour inverse $\bar{\lambda}^{-1} = \frac{1}{\lambda^2}\bar{\lambda}^*$, où $\bar{\lambda}^*$ est le conjugué de $\bar{\lambda}$ défini par $\bar{\lambda}^* = \lambda - \epsilon\hat{\lambda}$.

Fonction duale

Il est possible d’associer à une fonction réelle analytique f une fonction duale \bar{f} . Pour chaque nombre dual $\bar{x} = x + \epsilon\hat{x}$, on pose $\bar{f}(\bar{x}) = f(x) + \epsilon\hat{x}f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f [9]. Ainsi, on peut définir des fonctions cosinus et sinus duales :

$$\overline{\cos} \bar{\theta} = \cos \theta - \epsilon\hat{\theta} \sin \theta, \quad \overline{\sin} \bar{\theta} = \sin \theta + \epsilon\hat{\theta} \cos \theta$$

Elles vérifient les équations trigonométriques usuelles [8].

¹Acronyme anglais de Spherical Linear intERPolation

Vecteur dual

La notion de nombre dual s'étend aisément à celle de vecteur dual [10] $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \epsilon \hat{\mathbf{v}}$, où \mathbf{v} et $\hat{\mathbf{v}}$ sont des vecteurs réels de \mathbb{R}^3 . On peut définir une addition, une multiplication et une multiplication par un scalaire. Comme l'a montré Study, les vecteurs duaux sont très intéressants pour représenter les droites de l'espace. Une droite est notée $\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + \epsilon \hat{\mathbf{g}}$, où \mathbf{g} est son vecteur directeur et $\hat{\mathbf{g}}$ est son moment.

2.3 Les quaternions duaux

Les quaternions duaux sont définis comme les nombres et les vecteurs duaux [1][9] :

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \epsilon \hat{\mathbf{q}}$$

où \mathbf{q} et $\hat{\mathbf{q}}$ sont des quaternions. On notera $\mathbb{H}[\epsilon]$ cet ensemble. L'addition, la multiplication et la multiplication par un nombre dual sont définies :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_0 + \bar{\mathbf{q}}_1 &= (\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1) + \epsilon(\hat{\mathbf{q}}_0 + \hat{\mathbf{q}}_1), \\ \bar{\mathbf{q}}_0 \bar{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{q}_0 \mathbf{q}_1 + \epsilon(\hat{\mathbf{q}}_0 \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0 \hat{\mathbf{q}}_1), \\ \lambda \bar{\mathbf{q}} &= \lambda \mathbf{q} + \epsilon(\lambda \hat{\mathbf{q}}), \end{aligned}$$

Il est très important ici de remarquer que $\mathbb{H}[\epsilon]$ n'est pas un espace vectoriel sur \mathbb{D} mais un module. Cela tient au fait que \mathbb{D} lui-même n'est pas un corps mais seulement un anneau.

Norme et produit scalaire

Nous utilisons la pseudo-norme² présentée dans [1]. Tout d'abord, il convient de définir le conjugué d'un quaternion dual $\bar{\mathbf{q}}$ comme $\bar{\mathbf{q}}^* = \mathbf{q}^* + \epsilon \hat{\mathbf{q}}^*$, et, comme dans le cas des vecteurs réels ou celui des quaternions, on définit la pseudo-norme

$$\|\bar{\mathbf{q}}\|^2 = \bar{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{q}}^* = \mathbf{q} \mathbf{q}^* + \epsilon(\mathbf{q} \hat{\mathbf{q}}^* + \hat{\mathbf{q}} \mathbf{q}^*)$$

Il convient de remarquer que $\|\bar{\mathbf{q}}\|$ est un nombre dual et non un réel. Pour simplifier, nous parlerons de *norme* mais nous n'utiliserons aucune des propriétés des normes sans nous être assurés de leur véracité dans notre cas. Etant donnée cette norme, on définit un produit scalaire :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_0 \cdot \bar{\mathbf{q}}_1 &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{q}}_0 \bar{\mathbf{q}}_1^* + \bar{\mathbf{q}}_1 \bar{\mathbf{q}}_0^*) \\ &= \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_1 + \epsilon(\mathbf{q}_0 \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}}_0) \end{aligned} \quad (1)$$

Ici encore, le nombre n'est pas un réel mais un nombre dual. Ce n'est pas un vrai produit scalaire mais il est symétrique.

Interprétation géométrique

Tout comme les quaternions représentent les rotations, les quaternions duaux représentent les transformations rigides [1]. Une telle transformation est une vis : une rotation et une translation autour et le long d'un même axe. Elle dépend donc d'un vecteur dual (l'axe) $\bar{\mathbf{l}}$, d'un angle θ et d'un pas de translation d . Le quaternion dual associé est alors

$$\bar{\mathbf{q}} = \frac{\cos \theta + \epsilon d}{2} + \frac{\sin \theta + \epsilon d}{2} (\mathbf{l} + \epsilon \hat{\mathbf{l}}) \quad (2)$$

²Ce n'est pas une norme car elle ne satisfait pas le critère $\|q\| = 0 \Leftrightarrow \bar{\mathbf{q}} = 0$.

3 Interpolation de deux quaternions duaux

Nous présentons dans cette partie une nouvelle méthode d'interpolation entre deux quaternions duaux unitaires. Cette interpolation repose sur la notion d'angle entre deux quaternions unitaires.

3.1 Angle entre deux quaternions duaux unitaires

Nous ne considérons dans cette partie que les quaternions duaux unitaires, c'est à dire tels que $\|\bar{\mathbf{q}}\| = 1 = 1 + \epsilon 0$. L'idée est, par analogie avec \mathbb{R}^3 et \mathbb{H} de trouver un nombre dual $\bar{\theta} = \theta + \epsilon \hat{\theta}$ vérifiant

$$\bar{\mathbf{q}}_0 \cdot \bar{\mathbf{q}}_1 = \overline{\cos \bar{\theta}} = \cos \theta - \epsilon \hat{\theta} \sin \theta.$$

La condition $\|\bar{\mathbf{q}}\| = 1$ induit

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{q}} = 0. \quad (3)$$

Utilisant l'équation (1), la condition d'unité sur $\bar{\mathbf{q}}_0$ et $\bar{\mathbf{q}}_1$ amène $\|\bar{\mathbf{q}}_0\| = \|\mathbf{q}_0\| = 1 = \|\mathbf{q}_1\| = \|\bar{\mathbf{q}}_1\|$. Aussi il existe un réel $\theta \in [0, \pi]$ vérifiant

$$\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_1 = \cos \theta \quad (4)$$

Si $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$ alors $\sin \theta \neq 0$ et l'on peut considérer le réel

$$\hat{\theta} = -\frac{\mathbf{q}_0 \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}}_0}{\sin \theta}. \quad (5)$$

Dans le cas contraire, utilisant (3), on peut écrire

$$\bar{\mathbf{q}}_0 \cdot \bar{\mathbf{q}}_1 = 1 + \epsilon(\mathbf{q}_0 \cdot \hat{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}}_1) = 1$$

On considère alors, avec les notations (2)

$$\hat{\theta} = |d_1 - d_0|. \quad (6)$$

Cette équation est écrite dans l'espace des réels et se justifie en observant que $\sin \theta$ étant non nul, les quaternions unitaires \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_1 sont égaux ou opposés et représentent donc la même rotation [6]. Aussi les deux transformations associées respectivement à $\bar{\mathbf{q}}_0$ et $\bar{\mathbf{q}}_1$ ne diffèrent que d'une translation. On vérifie que l'on a bien

$$\overline{\cos \bar{\theta}} = \cos \theta + \epsilon \hat{\theta} \sin \theta = 1 + \epsilon \hat{\theta} = 1.$$

Dans les deux cas, nous avons bien trouvé un nombre dual $\bar{\theta} = \theta + \epsilon \hat{\theta}$, défini par les équations (4)(5)(6), vérifiant

$$\bar{\mathbf{q}}_0 \cdot \bar{\mathbf{q}}_1 = \overline{\cos \bar{\theta}}. \quad (7)$$

Nous appelons ce nombre $\bar{\theta}$ l'angle dual entre les quaternions duaux unitaires $\bar{\mathbf{q}}_0$ et $\bar{\mathbf{q}}_1$.

3.2 Interpolation entre deux quaternions duaux unitaires

Cette notion d'angle entre deux quaternions duaux unitaires va nous être utile pour proposer une alternative géométrique à l'interpolation proposée par [4][11]. Notre méthode présente l'avantage de rester dans l'espace des quaternions duaux. Cependant, si les quaternions duaux unitaires considérés sont tous deux des vecteurs réels (resp. des quaternions), alors l'interpolation proposée aboutit au même résultat qu'une interpolation linéaire (resp. une slerp).

Désirant interpoler entre deux quaternions duaux unitaires $\bar{\mathbf{q}}_0$ et $\bar{\mathbf{q}}_1$, nous cherchons une combinaison linéaire de $\bar{\mathbf{q}}_0$ et $\bar{\mathbf{q}}_1$ et donc deux nombres duaux \bar{c}_0 et \bar{c}_1 vérifiant

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{c}_0 \bar{\mathbf{q}}_0 + \bar{c}_1 \bar{\mathbf{q}}_1. \quad (8)$$

Comme $\bar{\mathbf{q}}$, $\bar{\mathbf{q}}_0$ et $\bar{\mathbf{q}}_1$ doivent être des quaternions duaux, on a

$$1 = \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{q}} = \bar{c}_0^2 + 2 \bar{c}_0 \bar{c}_1 \overline{\cos \bar{\theta}} + \bar{c}_1^2$$

où $\bar{\theta}$ est l'angle entre $\bar{\mathbf{q}}_0$ et $\bar{\mathbf{q}}_1$ défini en (7). Etant donné le réel $t \in [0, 1]$, on considère $\bar{\mathbf{q}}$ le quaternion dual unitaire faisant un angle $t\bar{\theta}$ avec le quaternion dual unitaire $\bar{\mathbf{q}}_0$. Alors, d'après la définition (7)

$$\bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{q}}_0 = \overline{\cos(t\bar{\theta})}.$$

Appliquer le produit scalaire (1) à l'équation (8) puis les formules trigonométriques duales mène à

$$\overline{\sin^2 \bar{\theta}} \bar{c}_0 = \overline{\sin((1-t)\bar{\theta})} \overline{\sin \bar{\theta}}. \quad (9)$$

De même, on montre que

$$\overline{\sin^2 \bar{\theta}} \bar{c}_1 = \overline{\sin(t\bar{\theta})} \overline{\sin \bar{\theta}} \quad (10)$$

Deux cas se présentent donc : soit $\overline{\sin \bar{\theta}}$ est un nombre dual inversible, c'est à dire que sa partie réelle $\sin \theta$ ne s'annule pas, soit il ne l'est pas. Dans le premier cas, d'après (8), (9) et (10)

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = \overline{\sin((1-t)\bar{\theta})} (\overline{\sin \bar{\theta}})^{-1} \bar{\mathbf{q}}_0 + \overline{\sin(t\bar{\theta})} (\overline{\sin \bar{\theta}})^{-1} \bar{\mathbf{q}}_1,$$

ou, avec un abus de notation,

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = \frac{\overline{\sin((1-t)\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_0 + \frac{\overline{\sin(t\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_1.$$

Dans le cas où, $\overline{\sin \bar{\theta}}$ n'est pas inversible, on considère comme quaternion dual unitaire interpolé

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = (1-t)\bar{\mathbf{q}}_0 + t\bar{\mathbf{q}}_1.$$

Nous pouvons donner deux raisons à ce choix. La première est que si $\overline{\sin \bar{\theta}}$ n'est pas inversible, cela signifie que les deux transformations représentées par les quaternions duaux ne diffèrent que d'une translation. Il est donc cohérent de choisir alors une interpolation linéaire. D'un autre côté, si $\overline{\sin \bar{\theta}}$ n'est pas inversible alors $\bar{\theta} = \epsilon \hat{\theta}$ et il vient

$$\overline{\sin \bar{\theta}} = \epsilon \hat{\theta}, \quad \overline{\sin(t\bar{\theta})} = \epsilon t \hat{\theta},$$

ce s'écrit, formellement et en abusant des notations, permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\sin((1-t)\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_0 + \frac{\overline{\sin(t\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_1 &= \frac{\epsilon(1-t)\hat{\theta}}{\epsilon \hat{\theta}} \bar{\mathbf{q}}_0 + \frac{\epsilon t \hat{\theta}}{\epsilon \hat{\theta}} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ &= (1-t)\bar{\mathbf{q}}_0 + t\bar{\mathbf{q}}_1 \end{aligned}$$

On en déduit les formules d'interpolation :

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}(t) &= \frac{\overline{\sin((1-t)\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_0 + \frac{\overline{\sin(t\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ &\quad , \text{ si } \overline{\sin \bar{\theta}} \text{ est inversible,} \\ \bar{\mathbf{q}}(t) &= (1-t)\bar{\mathbf{q}}_0 + t\bar{\mathbf{q}}_1 \\ &\quad , \text{ sinon.} \end{aligned}} \quad (11)$$

4 Génération de courbes dans l'espace des quaternions duaux

4.1 Un algorithme de De Casteljaou pour les quaternions duaux

L'algorithme de De Casteljaou est probablement l'un des plus importants dans le domaine de la génération de courbe. La première étape dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 est d'interpoler, pour chaque $t \in [0, 1]$ une seconde génération de points \mathbf{p}_0^1 depuis des paires de points successifs de la première génération \mathbf{p}_0^0 et \mathbf{p}_1^0 . Appliquant itérativement cette étape, on arrive à un seul point $\mathbf{p}(t)$, pour chaque $t \in [0, 1]$. La courbe résultante est appelée courbe de Bézier. Cet algorithme a été appliqué aux quaternions unitaires dans [6] en remplaçant l'interpolation linéaire par la slerp.

Nous proposons ici de remplacer ces deux interpolations par l'interpolation (11), auquel cas l'algorithme devient :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_0, \dots, \bar{\mathbf{q}}_n &\in \mathbb{H}[\epsilon] \text{ et } t \in [0, 1], \\ \bar{\mathbf{q}}_i^{(0)}(t) &= \bar{\mathbf{q}}_i, \text{ pour } i = 0, \dots, n \\ \bar{\mathbf{q}}_i^{(j)}(t) &= \frac{\overline{\sin((1-t)\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_i^{(j-1)}(t) + \frac{\overline{\sin(t\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_{i+1}^{(j-1)}(t), \\ j &= 1, \dots, n, i = 0, \dots, n-j, \\ \text{où } \bar{\theta} &\text{ est l'angle dual entre } \bar{\mathbf{q}}_i^{(j-1)}(t) \text{ et } \bar{\mathbf{q}}_{i+1}^{(j-1)}(t). \end{aligned}$$

4.2 Un algorithme de De Boor pour les quaternions duaux

Il est bien connu que les courbes de Bézier ne sont pas suffisamment flexible et qu'elles manquent de contrôle local. Par construction, chaque quaternion dual unitaire donné aura une influence sur la totalité de la courbe. Ceci aboutit de plus à un coût de calcul élevé. Une solution à ce problème sont les B-splines. S'il existe une définition analytique de ces courbes, nous préférons adapter l'algorithme géométrique de De Boor-Cox.

Dans cet algorithme, le processus d'interpolation est restreint à un plus petit sous-ensemble de points de contrôle. Comme pour l'algorithme de de Casteljaou, nous remplaçons l'interpolation linéaire et la slerp par l'interpolation (11) :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_0, \dots, \bar{\mathbf{q}}_n &\in \mathbb{H}[\epsilon] \text{ et } t \in [0, 1], \\ \text{il existe un entier } r &\text{ tel que } t \in [t_r, t_{r+1}]. \\ \bar{\mathbf{q}}_i^0 &= \bar{\mathbf{q}}_i \text{ pour } i = r-k+1, \dots, r \\ \bar{\mathbf{q}}_i^{(j)}(t) &= \frac{\overline{\sin((1-T)\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_i^{(j-1)}(t) + \frac{\overline{\sin(T\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_{i+1}^{(j-1)}(t) \\ \text{où } T &= \frac{t-t_i}{t_{i+k-j}-t_i} \text{ pour } j = 1, \dots, k-1 \text{ et } i = r-k+j, \dots, r, \\ \text{et où } \bar{\theta} &\text{ est l'angle dual entre } \bar{\mathbf{q}}_i^{(j-1)}(t) \\ &\text{ et } \bar{\mathbf{q}}_{i+1}^{(j-1)}(t). \\ \bar{\mathbf{q}}(t) &= \bar{\mathbf{q}}_{r,k} \end{aligned}$$

5 Résultats et discussion

Afin de visualiser ces algorithmes, nous avons séparés la partie duale de la partie réelle et sur chacune de ces parties, nous avons tracé les quatre composantes du quaternion, Fig. (2). Sur les résultats, le meilleur contrôle local d'une courbe spline par rapport à une courbe de Bézier apparaît clairement sur chacune des huit composantes. Les propriétés connues de ces deux types de courbes, tant dans \mathbb{R}^n que dans \mathbb{H} se retrouve ici, en particulier celle de l'enveloppe convexe : les courbes restent dans l'enveloppe convexe des points de contrôle.

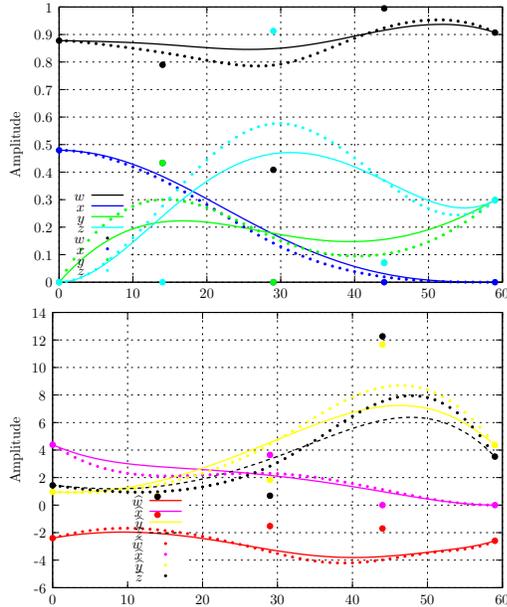


FIG. 1 – Approximation de quaternions duaux unitaires. En ligne pleine sont représentées les composantes de la courbe de Bézier, en pointillés les composantes de la courbe spline. En haut, les composantes de la partie réelle, en bas, celles de la partie duale.

Au delà de ces premiers résultats, il convient de tester ces résultats dans des contextes utilisant les quaternions duaux. Par exemple, il sera intéressant d'interpoler des transformations rigides et de comparer avec les méthodes existantes.

6 Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'interpolation des quaternions duaux unitaires. Nous avons pour cela défini la notion d'angle entre deux quaternions duaux unitaires. Il nous a été possible ensuite de construire deux algorithmes géométriques de génération de courbes, l'un pour des courbes de Bézier, l'autre pour les courbes spline. Le potentiel d'application est important, notamment pour le calcul de mouvement à partir de moment clés, mais aussi en stéréo vision et en mécanique. Ces algorithmes sont actuellement utilisés pour la modélisation du lien forme-fonction des complexes ostéo-articulaires par les surfaces réglées [12] (le mouvement est représenté par l'axode et la morphologie par la surface focale géodésique). Nous avons en effet montré la pertinence de cette représentation et, afin de nous munir d'outils d'analyse des surfaces réglées, nous avons choisi de représenter les surfaces réglées et leurs pro-

priétés différentielles par des quaternions duaux unitaires. Dès lors, grâce aux algorithmes présentés ici, il nous est possible d'interpoler et d'approximer de telles surfaces puis de les analyser.

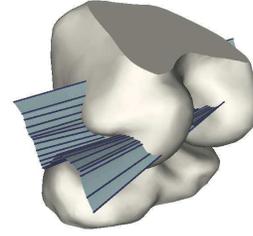


FIG. 2 – Surface réglée liée au mouvement de flexion d'un genou.

Références

- [1] K. Daniilidis, "Hand-eye calibration using dual quaternions," *International Journal of Robotics Research*, vol. 18, no. 3, pp. 286–298, 1999.
- [2] T. Horsch and H. Nolzen, "Local motion planning avoiding obstacles with dual quaternions," in *Proceedings of the IEEE Robotics and Automation Conference*, pp. 241–245, May 1992.
- [3] M. Walker, L. Shao, and R. Volz, "Estimating 3D location parameters using dual quaternions," *CVGIP : Image Understanding*, vol. 54, no. 3, pp. 358–367, 1991.
- [4] B. Jüttler, "Visualization of moving objects using dual quaternion curves," *Computer and Graphics*, vol. 18, no. 3, pp. 315–326, 1994.
- [5] W. R. Hamilton, *Lectures on quaternions*. McMillan and co. Ltd, 1905.
- [6] K. Shoemake, "Animating rotation with quaternion curves," *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, vol. 19, no. 3, pp. 245–254, 1985.
- [7] W. Clifford, "Preliminary sketch of biquaternions," *Proceedings of London Mathematical Society*, vol. 4, pp. 381–395, 1873.
- [8] A. Yang and F. Freudenstein, "Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 31, pp. 300–308, 1964.
- [9] J. Goddard, *Pose and motion estimation from vision using dual quaternion-based extended Kalman filtering*. PhD thesis, The University of Tennessee, TN, USA, 1997.
- [10] H. Stachel, "Instantaneous spatial kinematics and the invariants of the axodes," *Proceedings Ball 2000 Symposium*, 2000.
- [11] Q. J. Ge and B. Ravani, "Computer aided geometric design of motion interpolants," *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 116, no. 1, pp. 756–762, 1994.
- [12] G. Guillard, C. Hamitouche, D. Gil, C. Roux, and E. Stindel, "Analyse du lien forme-fonction du complexe ostéo-articulaire par identification axode-surface focale," in *Accepté à Forum GBM'05*.