# Un théorème limite et un test pour la détection non paramétrique de signaux dans un bruit blanc gaussien de variance inconnue.

Dominique PASTOR

GET - ENST Bretagne, CNRS FRE 2658 TAMCIC,
Technople de Brest Iroise, CS 83818, 29238 BREST Cedex, France
dominique.pastor@enst-bretagne.fr

**Résumé** – On s'intéresse à la détection statistique non paramétrique de signaux dont les distributions de probabilité et les probabilités de présence sont inconnues en présence de bruit blanc additif et indépendant d'écart-type lui-même inconnu. Sur la base d'un théorème limite énoncé dans ce papier, on introduit un algorithme de détection. Celui-ci estime l'écart-type du bruit pour décider de la présence d'éventuels signaux lorsque ceux-ci ont une probabilité de présence inférieure ou égale à 1/2 et une amplitude supérieure ou égale à une valeur donnée $A \in [0, \infty[$. Des résultats expérimentaux concernant la détection non paramétrique de porteuses sinusoïdales dans un bruit blanc sont présentés. Ces résultats suggèrent que les conditions asymptotiques du théorème ne sont pas très contraignantes dans la pratique. La détection de cibles radar est une application typique de ce travail.

**Abstract** – This paper concerns the non parametric statistical detection of signals that have unknown probability distributions and unknown probabilities of presence in a background of white Gaussian noise with unknown standard deviation. On the basis of a limit theorem stated below, a test is introduced. This test performs an estimate of the noise standard deviation and achieves the detection of signals that have probability of presence less than or equal to one half and norm larger than or equal to some known non negative real number $A$. Experimental results regarding the non parametric detection of sinusoidal carriers in white Gaussian noise are presented. These results suggest that the asymptotic conditions of the limit theorem can somewhat be relaxed and are not so constraining in practice. The radar target detection problem is a typical application of this work.

## 1 Introduction

L'observée en sortie d'un capteur résulte souvent de la présence aléatoire d'un signal dans un bruit blanc Gaussien additif et indépendant. Le modèle est simple mais la détection du signal peut être délicate. En effet, la distribution exacte du signal, voire l'écart-type du bruit, peuvent ne pas être connus. Ainsi, en traitement du signal radar, le niveau de bruit thermique fluctue et l'écho reçu d'une cible résulte d'une convolution entre le pulse émis et l'environnement.

Les critères usuels de décision basés sur le rapport de vraisemblance (Bayes, Neyman-Pearson, minimax, Rapport de Vraisemblance Généralisé) ne sont exploitables que si l'on dispose d'un modèle suffisamment précis où le nombre de paramètres à estimer reste limité ([7]). Les critères non paramétriques sont une alternative aux critères de vraisemblance. Dans une approche non paramétrique, le critère de décision garantit une mesure de performance constante sur toute une classe de signaux ([7]).

L'approche non paramétrique proposée dans [5] concerne la détection d'un signal dont la probabilité de présence est inférieure ou égale 1/2. C'est une hypothèse raisonnable dans des applications radar ou sonar car les cibles sont moins souvent présentes qu'absentes. La proposition suivante est alors une conséquence immédiate de [5, Théorème VII.1]. Dans l'énoncé de cette proposition, $\mathbf{I}_n$ désigne la matrice identité de taille $n \times n$; nous appelons seuillage de hauteur $T$ le test binaire d'hypothèses qui décide qu'un signal est présent dès que la norme de l'observée est supérieure ou égale à $T$ et qu'aucun signal n'est présent dans le cas contraire; ${}_0F_1$ est la fonction hypergéométrique généralisée ([4, p. 275]);

**Proposition 1.1** *Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, les vecteurs aléatoires $U, \Lambda, X : \Omega \to \mathbf{R}^n$ et une variable aléatoire $\epsilon : \Omega \to \{0, 1\}$ tels que $\Lambda$, $X$ et $\epsilon$ sont indépendants, $X \in \mathcal{N}(0, \sigma_0^2 I_n)$ et $U = \epsilon\Lambda + X$.*

*Soit $V$ la fonction définie pour tout $\rho \in [0, \infty[$ par*

$$V(\rho) = \frac{e^{-\rho^2/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^{\xi(\rho)} e^{-t^2/2} t^{n-1} {}_0F_1(n/2\,; \rho^2 t^2/4) dt + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2^{1-n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^{\xi(\rho)} e^{-t^2/2} t^{n-1} dt\right]. \quad (1)$$

*où $\xi(\rho)$ est l'unique solution en $x$ de l'équation*

$$ {}_0F_1(n/2; \rho^2 x^2/4) = e^{\rho^2/2}. \quad (2)$$

*Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle dans $\mathbf{R}^n$. On définit l'amplitude minimale $\varrho(\Lambda)$ de $\Lambda$ par*

$$\varrho(Y) = \sup\{\alpha \in [0, \infty] : \|Y\| \geq \alpha \ \ (\text{p.s}) \ \} \quad (3)$$

*où $\|\Lambda\| : \Omega \to [0, \infty[$ associe la valeur $\|\Lambda(\omega)\|$ à $\omega \in \Omega$.*

**(i)** *Si la probabilité de présence $P(\{\varepsilon = 1\})$ de $\Lambda$ est inférieure ou égale à $1/2$, $V(\varrho(\Lambda)/\sigma_0)$ est une borne supérieure pour la probabilité d'erreur du test du Maximum de Vraisemblance (MV) et du seuillage de hauteur $\sigma_0\xi(\varrho(\Lambda)/\sigma_0)$.*

**(ii)** *Il y a égalité entre $V(\varrho(\Lambda)/\sigma_0)$, la probabilité d'erreur du test MV et la probabilité d'erreur du seuillage de hauteur $\sigma_0\xi(\varrho(\Lambda)/\sigma_0)$ lorsque la distribution de probabilité de $\Lambda$ est uniforme sur la sphère centrée à l'origine et de rayon $\varrho(\Lambda)$ et $P(\{\varepsilon = 1\}) = 1/2$, .*

Aussi, pour $A \geq 0$, le seuillage de hauteur $\sigma_0\xi(A/\sigma_0)$ est non paramétrique pour la détection de tout signal de probabilité de présence inférieure ou égale à $1/2$ et de norme supérieure ou égale à $A$. La mesure de performance que ce test garantit sur cette classe de signaux est $V(A/\sigma_0)$, cette borne étant atteinte pour un signal dont la distribution de probabilité est uniforme sur la sphère de rayon $A$ et dont la probabilité de présence est $1/2$. Cependant, ce seuillage ne peut être utilisé dans la pratique que si l'écart-type du bruit est connu, ce qui n'est hélas pas toujours le cas. Ainsi, en traitement du signal radar, le niveau de bruit fluctue et une estimation régulière de l'écart-type est nécessaire pour maintenir constant le taux de fausse alarme. Nous proposons une approche purement probabiliste pour estimer cet écart-type et détecter les signaux.

## 2 Un théorème limite

Nous continuons à supposer que tous les vecteurs aléatoires et toutes les variables aléatoires rencontrées ci-après sont définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les suites de vecteurs aléatoires de dimension $n$, c'est-à-dire définis dans $\Omega$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. Nous dirons qu'une suite $X = (X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{S}$ est un *Bruit Blanc Gaussien* de dimension $n$ ($n$-BBG) d'écart-type $\sigma_0 > 0$ si les vecteurs aléatoires $X_k$, $k \in \mathbf{N}$, sont mutuellement indépendants, de dimension $n$ et de distribution Gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance $\sigma_0^2\mathbf{I}_n$ où $\mathbf{I}_n$ est la matrice identité $n \times n$ ($X_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2\mathbf{I}_n)$).

Pour estimer l'écart-type du bruit, nous étendons le modèle de la proposition 1.1 comme suit. Soient $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$, $\Lambda = (\Lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ un élément de $\mathcal{S}$ et $X = (X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ un $n$-BBG. On considère la suite $U = (U_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}$ définie par $U = \varepsilon\Lambda + X$ dans le sens où pour tout entier $k$, $U_k = \varepsilon_k\Lambda_k + X_k$. Cette suite modélise une suite d'observations où des signaux sont aléatoirement présents ou absents en présence d'un bruit blanc Gaussien additif et indépendant: la suite $X$ modélise évidemment le bruit; pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\Lambda_k$ est le signal aléatoire qui peut être présent ou absent et $\varepsilon_k$ modélise cette présence aléatoire. Pour chaque entier $k$, $P(\{\varepsilon_k = 1\})$ est donc la probabilité de présence de $\Lambda_k$.

Pour énoncer le théorème limite, nous avons besoin de quelques autres notations et de définitions.

Pour un nombre réel positif ou nul $a$, $L^a(\Omega, \mathbf{R}^n)$ est l'ensemble des vecteurs aléatoires $Y : \Omega \to \mathbf{R}^n$ pour lesquels $E[\|Y\|^a] < \infty$. L'ensemble des éléments $\Lambda = (\Lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{S}$ tels que $\sup_{k\in\mathbf{N}} E[\|\Lambda_k\|^a] < \infty$ est noté $\ell^\infty(\mathbf{N}, L^a(\Omega, \mathbf{R}^n))$.

Nous généralisons aussi (3) en définissant l'amplitude minimale d'un élément $\Lambda = (\Lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{S}$ comme la borne supérieure $\varrho(\Lambda)$ de l'ensemble des $\alpha \in [0, \infty]$ tels que, pour tout entier $k$, $\|\Lambda_k\| \geq \alpha$ (p-s):

$$\varrho(\Lambda) = \sup\{\alpha \in [0, \infty] : \forall k \in \mathbf{N}, \|\Lambda_k\| \geq \alpha \text{ (a-s)}\}. \quad (4)$$

Pour tout réel positif ou nul $q$, $\Upsilon_q : [0, \infty[ \to [0, \infty[$ est définie pour tout $x \in [0, \infty[$ par $\Upsilon_q(x) = \int_0^x t^{q+n-1} e^{-t^2/2} dt$.

Enfin, pour une variable aléatoire $Y$ et un sous-ensemble $B$ quelconque de $\mathbf{R}$, $\mathcal{I}(Y \in B)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\}$.

Avec ce matériel, nous énonçons le résultat suivant qui est un cas particulier d'un résultat plus général dont on trouvera la démonstration dans [6].

**Théorème 2.1** *Soit $U = (U_k)_{k\in\mathbf{N}}$ un élément de $\mathcal{S}$ tel que $U = \varepsilon\Lambda + X$ où $\Lambda = (\Lambda_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}$, $X = (X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est un $n$-BBG d'écart-type $\sigma_0$ et $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ .*

*Supposons que:*

**(H1)** *pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\Lambda_k$, $X_k$ et $\varepsilon_k$ sont mutuellement indépendants;*

**(H2)** *les vecteurs aléatoires $U_k$, $k \in \mathbf{N}$, sont mutuellement indépendants;*

**(H3)** *il existe une borne $p \in [0, 1[$ pour les probabilités $\{\{P(\{\varepsilon_k = 1\}) : k \in \mathbf{N}\}$ et les variables aléatoires $\varepsilon_k$, $k \in \mathbf{N}$, sont mutuellement indépendantes;*

**(H4)** *il existe $\nu \in ]0, \infty[$ tel que $\Lambda \in \ell^\infty(\mathbf{N}, L^\nu(\Omega, \mathbf{R}^n))$.*

*Soient deux réels $r$ et $s$ tels que $0 \leq s < r \leq \nu/2$. Pour tout entier $m$ et tout couple $(\sigma, T)$ de réels positifs ou nuls, définissons alors la variable aléatoire $\mathcal{D}_m(\sigma, T)$ par*

$$\mathcal{D}_m(\sigma, T) = \left| \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \|U_k\|^r \mathcal{I}(\|U_k\| \leq \sigma T)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \|U_k\|^s \mathcal{I}(\|U_k\| \leq \sigma T)} - \sigma^{r-s} \frac{\Upsilon_r(T)}{\Upsilon_s(T)} \right|$$

*L'écart-type $\sigma_0$ du bruit est le seul réel strictement positif $\sigma$, tel que, pour tout $\beta_0 \in ]0, 1]$,*

$$\lim_{\varrho(\Lambda)\to\infty} \left\| \overline{\lim_m} \mathcal{D}_m(\sigma, \beta\xi(\varrho(\Lambda)/\sigma)) \right\|_\infty = 0 \quad (5)$$

*uniformément en $\beta \in [\beta_0, 1]$.*

**Remarques:**

- De manière triviale, $\sigma = 0$ satisfait (5) et le critère de convergence introduit ne joue alors aucun rôle. C'est pour cela que le théorème précédent ne concerne que les solutions strictement positives de (5).
- Il est évident que (5) est vérifiée par tout $\sigma \in [0, \infty[$ dès que $r = s \geq 0$. C'est pour cette raison que l'énoncé repose sur l'hypothèse $r > s \geq 0$.
- En pratique, on aura souvent $\nu = 2$ et $p = 1/2$. En effet, les signaux sont en général d'énergie finie et moins souvent présents qu'absents.

# 3 Le test de la borne essentielle

Nous conservons les notations et hypothèses du théorème 2.1 avec $p = 1/2$ et $\nu = 2$, conformément à la dernière remarque de la section précédente. De plus, nous supposons que tous les signaux ont une norme supérieure ou égale à un certain $A \in [0, \infty[$. En d'autres termes, nous faisons l'hypothèse $\varrho(\Lambda) \geq A$. A partir de la proposition 1.1 et du théorème 2.1, nous proposons un test qui commence par estimer l'écart-type du bruit pour détecter ensuite la présence des signaux utiles. Nous l'appelons le test de la borne essentielle pour le rôle que joue la norme de la borne essentielle dans le théorème 2.1.

Considérons une suite finie $U_1, \ldots, U_m$ d'observations. Choisissons un entier $L$ et posons $\beta_\ell = \ell/L$ pour $\ell \in \{1, \ldots, L\}$. Le théorème 2.1 suggère alors d'estimer $\sigma_0(m)$ par un minimum $\hat{\sigma}_0$, éventuellement local, de

$$\sup \{\mathcal{D}_m(\sigma, \beta_\ell \xi(A/\sigma)) : \ell \in \{1, \ldots, L\}\} \tag{6}$$

avec, pour $(\sigma, T) \in [0, T] \times [0, T[$,

$$\mathcal{D}_m(\sigma, T) = \left| \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \|U_k\| \mathcal{I}(\|U_k\| \leq \sigma T)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathcal{I}(\|U_k\| \leq \sigma T)} - \sigma \frac{\Upsilon_1(T)}{\Upsilon_0(T)} \right|,$$

compte-tenu de note choix pour $p$ et $\nu$. Le calcul de ce minimum peut se faire par interpolation parabolique [3] (en utilisant la routine `MATLAB` `fminbnd.m` par exemple) dans l'intervalle de recherche que nous explicitons plus loin. La décision sur la présence ou l'absence de signal utile pour l'observée $U_k$ se fait ensuite en utilisant le seuillage de hauteur $\sigma_0 \xi(A/\sigma_0)$ en remplaçant $\sigma_0$ par son estimée: si $\|U_k\| \geq \hat{\sigma}_0 \xi(A/\hat{\sigma}_0)$, on décide qu'un signal est présent; sinon, on décide le contraire. Soit $U_{[k]}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ la suite des observées rangées en norme croissante. La borne supérieure de l'intervalle de recherche est $\sigma_{\max} = \|U_{[m]}\|/\sqrt{n}$. En effet, si nous cherchons une valeur $\hat{\sigma}_0(m)$ strictement supérieure à $\sigma_{\max}$, nous prenons le risque d'obtenir une estimée pour laquelle on aura $\|U_k\| \leq \hat{\sigma}_0(m)\xi(A/\hat{\sigma}_0(m))$, $k = 1, 2, \ldots, m$ puisque $\xi(\rho) \geq \sqrt{n}$ pour tout $\rho \in [0, \infty[$ ([5]). La décision serait donc qu'aucun signal n'est présent parmi nos $m$ observations, ce qui est improbable pour $m$ grand, à condition quand même, que la probabilité de présence ne soit pas trop petite. La borne inférieure de l'intervalle de recherche est ajustée de manière récursive comme suit. Cette borne est $\sigma_{\min} = \|U_{[i_0]}\|/\sqrt{n}$ où $i_0$ est initialisée à 1. On considère que l'observée de plus petite norme est due au bruit seul et devrait être détectée en tant que telle pour toute valeur de $A$, donc en particulier pour $A = 0$. La probabilité d'avoir un nombre supérieur à $m/2 - hm$ d'observées de bruit seul est supérieure ou égale à $Q = 1 - 1/4mh^2$. Aussi, en fixant $Q$ et donc $h$, tant que le nombre d'observées dont la norme est inférieure à $\hat{\sigma}_0(m)\xi(A/\hat{\sigma}_0(m))$ reste supérieur à $m/2 - hm$, on modifie $\sigma_{\min}$ en incrémentant $i_0$ de 1 pour calculer une nouvelle estimation de $\sigma_0$. En ajustant ainsi l'intervalle de recherche, on cherche à éviter un minimum local proche de 0 puisqu'on sait que 0 est une solution triviale de (5).

# 4 Résultats expérimentaux

Nous ne savons pas encore évaluer de manière théorique les performances de l'algorithme de la borne essentielle. L'algorithme fonctionnant sans connaissance a priori des distributions et probabilités de présence, une réponse expérimentale exhaustive à cette question est difficile. Aussi, nous nous limitons à des résultats expérimentaux concernant le cas suivant. Avec les notations introduites précédemment, on suppose que pour tout entier $k$, $U_k$, $\Lambda_k$ sont $X_k$ des vecteurs aléatoires de dimension 2 où la distribution de probabilité de chaque $\Lambda_k$ est uniforme sur le cercle centré à l'origine et de rayon $A$. Nous supposons aussi que la probabilité de présence de chaque $\Lambda_k$ est $P(\{\varepsilon_k = 1\}) = 1/2$. Ce cas n'est pas seulement académique. En effet, pour chaque entier, les deux composantes de $\Lambda_k$ peuvent être considérées comme les composantes en phase et en quadrature d'une porteuse sinusoïdale d'amplitude $A$ et de phase équirépartie sur $[0, 2\pi]$. L'exemple que l'on traite est donc celui de la "détection non cohérente d'une porteuse", dont on connaît toute l'importance dans de nombreuses applications ([7, Exemple III.B.5, p. 65]).

Le test du maximum de vraisemblance pour ce problème est un seuillage dont la hauteur est l'unique solution en $x$ de l'équation $I_0(A/\sigma_0 x) = e^{A^2/2\sigma_0^2}$, où $I_0$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce ([7, Exemple II.E.1, p. 34]). Ce résultat est aussi une conséquence de l'égalité $I_0(x) = {}_0F_1(1; x^2/4)$ ([1, Eq. 9.6.47, p. 377]) et de la proposition 1.1. Celle-ci étend d'ailleurs l'application de ce test. En effet, elle nous apprend que le même test à seuil garantit une probabilité d'erreur inférieure ou égale à $V(A/\sigma_0)$ même lorsque la probabilité de présence est inférieure ou égale à 1/2, l'amplitude du signal est supérieure ou égale à $A$ et la distribution de la phase n'est pas uniforme.

Lorsque $\sigma_0$ n'est pas connu et que l'on dispose de $m$ observations $U_k$, $k = 1, \ldots, m$, on peut espérer que le Taux d'Erreur Binaire (TEB) du test proposé dans cet article approche $V(A/\sigma_0)$ lorsque $A$ et $m$ sont suffisamment grands. On se propose de vérifier cette intuition en calculant les TEBs issus de simulations de Monte-Carlo. Pour cela, on suit la méthode généralement admise par les spécialistes des systèmes de télécommunication numérique pour estimer une probabilité d'erreur qui décroît rapidement avec le Rapport Signal à Bruit (RSB) comme c'est le cas de $V(A/\sigma_0)$ avec le RSB $A/\sigma_0$.

La simulation consiste à éprouver le test de la section précédente sur une succession d'ensembles distincts de $m$ observations. Pour chaque épreuve de $m$ observations, on compte le nombre d'erreurs commises par le test. Epreuve après épreuve, on additionne ces nombres d'erreurs jusquà ce que le nombre total $N_e$ d'erreurs soit supérieur ou égal à un nombre $N$ choisi préalablement. Le TEB est alors défini comme étant le rapport $N_e/(j \times m)$ où $j$ est le nombre d'épreuves qu'il a été nécessaire de réaliser pour obtenir $N_e \geq N$. En ce qui concerne le test de la borne essentielle, nous choisissons $L = m$ et $Q = 0.95$ sur la base de quelques expérimentations préliminaires. Le tableau 1 présente alors les résultats obtenus pour différentes valeurs

| $A/\sigma_0$ | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V(A/\sigma_0)$ | 0.4777 | 0.4183 | 0.3390 | 0.2566 | 0.1826 | 0.1225 | 0.0775 | 0.0462 | 0.0260 | 0.0138 |
| TEB ($m = 100$) | 0.5067 | 0.4233 | 0.3900 | 0.2775 | 0.2260 | 0.2017 | 0.1250 | 0.0567 | 0.0371 | 0.0227 |
| TEB ($m = 200$) | 0.4875 | 0.4375 | 0.2900 | 0.3350 | 0.2825 | 0.1525 | 0.0967 | 0.0694 | 0.0361 | 0.0178 |
| TEB ($m = 300$) | 0.4633 | 0.3767 | 0.3350 | 0.3733 | 0.2267 | 0.1222 | 0.0992 | 0.0589 | 0.0262 | 0.0179 |

Tab. 1: TEBs du test de la borne essentielle pour la détection non cohérente de sinusoïdes dans le bruit

| $A/\sigma_0$ | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V(A/\sigma_0)$ | 0.4777 | 0.4183 | 0.3390 | 0.2566 | 0.1826 | 0.1225 | 0.0775 | 0.0462 | 0.0260 | 0.0138 |
| TEB ($m = 100$) | 0.4680 | 0.4060 | 0.3014 | 0.2500 | 0.1918 | 0.1200 | 0.0693 | 0.0556 | 0.0287 | 0.0170 |
| TEB ($m = 200$) | 0.4433 | 0.3900 | 0.3583 | 0.2675 | 0.1586 | 0.0896 | 0.0564 | 0.0357 | 0.0244 | 0.0124 |
| TEB ($m = 300$) | 0.4733 | 0.3917 | 0.3717 | 0.2244 | 0.1527 | 0.1156 | 0.0703 | 0.0317 | 0.0214 | 0.0083 |

Tab. 2: TEBs du test de la borne essentielle pour la détection non cohérente de sinusoïdes dans le bruit

de $m$ et de $A$. Les écarts entre TEBs et valeurs théoriques sont irrgùliers car une mauvaise estimation de $\sigma_0$ engendre des erreurs corrélées en rafale puisque la décision se fait sur les observées qui ont servi à l'estimation. Cependant, les TEBs se rapprochent des valeurs théoriques lorsque $m$ et $A$ augmentent.

Lorsque le rapport $\varrho(\Lambda)/A$ entre l'amplitude minimale de la suite $\Lambda$ et la borne inférieure $A$ que l'on se donne pour la détection est suffisamment grand, le théorème 2.1 suggère que le TEB du test de la borne essentielle devrait être inférieur ou égal à $V(A/\sigma_0)$. En guise d'exemple, la figure présente les TEBs obtenus par le test de la borne essentielle lorsque $\varrho(\Lambda)/A = 1.2589$, c'est-à-dire lorsque les porteuses ont une amplitude 1 dB plus élevée que la borne inférieure que l'on donne au test de la borne essentielle. Au vu des résultats du tableau 2, nous pouvons dire que l'utilisation du test de la borne essentielle représente finalement une perte d'environ 1 dB par rapport au test optimal. Les résultats expérimentaux ainsi obtenus sont donc très encourageants.

## 5 Perspectives et extensions

On a présenté un résultat théorique et introduit le test de la borne essentielle dédié à la détection de signaux de distributions non connues et moins présents qu'absents dans un bruit blanc indépendant, additif et Gaussien d'écart-type inconnu. Les résultats expérimentaux suggèrent que les conditions asymptotiques de la théorie ne sont pas si contraignantes que cela dans la pratique. Il faut formaliser ces constatations expérimentales. Notamment, nous pensons que le cas traité à la section 4 est le plus défavorable pour le test de la borne essentielle comme il l'est pour le test du maximum de vraisemblance et le seuillage de la proposition 1.1. Nous travaillons aussi à améliorer la procédure de minimisation afin d'éviter les paquets d'erreurs corrélées. La conception de systèmes TFAC (Taux de Fausse Alarme Constant) utilisés pour la détection des cibles radar est un domaine d'application naturel de ce travail. Le débruitage des signaux en est un autre. A ce titre, nous travaillons à comparer et combiner l'approche proposée ici à décrite dans [2].

## Références


[1] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications Inc., New York, Ninth printing (1972).

[2] D. Donoho, I. Johnstone, "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage", *Biometrika*, **vol. 81**, 1994.

[3] G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler, *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice-Hall, 1976.

[4] N. N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Prentice-Hall, (1965).

[5] D. Pastor, R. Gay, B. Groenenboom, "A Sharp Upper-Bound for the Probability of Error of the Likelihood Ratio Test for Detecting Signals in White Gaussian Noise", IEEE Transactions on Information Theory, **vol. 48, N. 1**, 2002.

[6] D. Pastor, *A limit theorem for sequences of independent random vectors with unknown distributions and its applications to non parametric detection*, Rapport interne GET/ENST Bretagne, NRR-2004001-SC, 2004.

[7] H. V. Poor, *An Introduction to Signal Detection and Estimation*, Springer-Verlag, 2nd Edition, 1994.