

# Analyse statistique de la détection de planètes par imagerie directe

A. FERRARI<sup>1</sup>, J.-Y. TOURNERET<sup>2</sup>, E. SERRADEL<sup>1</sup>, C. AIME<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LUAN, Université de Nice-Sophia-Antipolis, 06108 Nice cedex 2, France

<sup>2</sup>ENSEEIH/TéSA, 2 rue Charles Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse cedex 7, France

ferrari@unice.fr, jean-yves.tourneret@tesa.prd.fr, eduard.serradell-domingo@unice.fr, aime@unice.fr

**Résumé** – Cette communication est consacrée à la détection de planètes par imagerie directe. L’accent est mis sur les deux facteurs dégradants : les résidus de turbulence atmosphérique et la présence du coronographe. Une modélisation statistique des mesures permet de proposer et d’étudier un détecteur utilisant des images à court temps de pose. Une simulation numérique met en évidence le gain de cette technique par rapport à une image long temps de pose ou au traitement courte pose habituel.

**Abstract** – This communication is devoted to exo-planet detection by direct imaging. Specific attention is given to degrading factors : the residues of atmospheric turbulence and the side effects of the coronagraph. Relying on a statistical modeling of the measurements, a detector based on short time exposure images is proposed and analyzed. A numerical simulation highlights the detection gain of this technique with respect to a long time exposure image or a classical short exposure processing.

## 1 Introduction

Depuis la première découverte d’une planète autour d’une étoile de type solaire par M. Mayor et D. Queloz en 1995, on assiste à une explosion de l’intérêt porté à la détection des exoplanètes. Plus d’une centaine de planètes ont ainsi déjà été détectées par différentes techniques *indirectes* comme par exemple la vélocimétrie radiale (effet Doppler de la composante radiale de la vitesse de l’étoile par rapport au centre de masse du système), les transits (variation photométrique de l’étoile lorsque la planète passe devant le disque stellaire), ...

La détection *directe* des planètes par imagerie constitue cependant un objectif essentiel car elle fournira des informations comme sa masse (en levant l’ambiguïté des mesures indirectes), son albédo et même la composition chimique de son atmosphère si une analyse du spectre est possible. Bien que des télescopes ayant une résolution angulaire suffisante existent, deux facteurs principaux rendent aujourd’hui impossible l’imagerie directe d’une planète :

1. La diffraction de la lumière de l’étoile au niveau de la planète : le rapport entre l’intensité de l’étoile diffractée et celle de la planète pour les systèmes visés est de l’ordre de  $10^6$  dans l’infrarouge et  $10^9$  dans le visible. La réalisation d’images de ces planètes nécessitera donc l’utilisation d’un *coronographe* afin de réduire la lumière de l’étoile, [2].
2. La dégradation de l’image liée à la turbulence atmosphérique dans la mesure où l’instrument envisagé n’est pas spatial : la solution passe ici par l’utilisation d’une *optique adaptative* [13] à très haute performance.

Un certain nombre de projets internationaux centrés sur ces deux aspects sont aujourd’hui en phase de construction

ou d’étude dans le but d’obtenir des images de planètes extrasolaires depuis le sol. L’objectif de cette communication est l’étude des performances d’un tel système prenant en compte les deux facteurs dégradants mentionnés.

Une première solution a été récemment proposée dans [3] reposant sur le calcul de la variance de l’image finale. L’étude proposée ici diffère de cette solution par le fait qu’elle envisage la possibilité où  $M$  images « courtes poses » sont acquises durant la même durée d’observation. En particulier elle a pour objectif d’étudier l’apport possible du traitement d’un ensemble d’images à court temps de pose par rapport à une image à fort flux.

Dans ce contexte une solution proposée en 1995 dans [12] et expérimentée dans [4], le dark-speckle, consiste à faire une carte des fréquences de l’événement « 0 photons ». La présence d’une planète, ayant pour effet d’augmenter légèrement le flux, apparaîtra en négatif sur la carte. Cette méthode avait été analysée dans [6], sans toutefois prendre en compte l’effet du coronographe. Elle avait permis de conclure que ses performances étaient très voisines de celles du détecteur optimal de Neyman-Pearson.

Cette communication propose d’étudier les performances de détection en tenant compte de la présence du coronographe, ce qui a pour effet de complexifier considérablement le développement analytique. Le modèle statistique des données est développé dans la section 2. Le problème est alors traité comme un test d’hypothèses binaire pour lequel une statistique de test est proposée. La technique du dark-speckle apparaît comme un cas particulier pour lequel un rapport signal à bruit est calculé dans la section 4. Cette quantité permet de mettre en évidence l’influence des différents paramètres et en particulier la perte de performance liée à la présence du coronographe. L’intensité de la planète étant inconnue, le détecteur optimal de Neyman Pearson ne peut être mis en œuvre. L’utilisation du

test localement le plus puissant est alors envisagé. Celui ci permet de mettre en évidence que, suivant la configuration envisagée, un gain peut être obtenu par traitement des images courte pose.

## 2 Modèle

On utilise ici le modèle développé dans [3] pour décrire l'intensité mesurée par un instrument comportant une optique adaptative et un coronographe. Dans ce modèle, l'amplitude complexe au foyer du télescope se décompose en la somme :

- d'une terme  $c(\vec{x})$  qui désigne la réponse du coronographe à l'étoile et qui donc est un terme déterministe réel et à symétrie de révolution :  $c(\vec{x}) = c(|\vec{x}|)$ .
- d'un terme  $\Psi_s(\vec{x})$  décrivant le résidu de turbulence atmosphérique. Nous supposons que ce terme qui est à l'origine des speckles résiduels possède une distribution Gaussienne :  $\Psi_s(\vec{x}) \sim \mathcal{N}_c(0, \sigma^2(|\vec{x}|))$ .

L'intensité instantanée  $i(\vec{x})$  au foyer du télescope en  $\vec{x}$  s'écrit alors :

$$i(\vec{x}) = |\Psi_s(\vec{x}) + c(\vec{x})|^2 \quad (1)$$

La présence d'une planète en  $\vec{x}$ , dont la lumière est incohérente avec celle de l'étoile, ajoute ainsi à  $i(\vec{x})$  un terme déterministe noté  $m(\vec{x})$ .

Alors que l'hypothèse Gaussienne sur l'amplitude complexe en un point est bien admise, la complexité des transformations mises en œuvres dans l'optique adaptative font que son extension à un vecteur d'amplitudes complexes en plusieurs points n'est pas naturelle. Par ailleurs l'utilisation d'une telle hypothèse, outre le fait qu'elle introduit des paramètres qui ne sont pas accessibles, ne permet pas d'aboutir à un résultat analytique, [7]. Compte tenu de cela nous nous limiterons dans la suite à une description monodimensionnelle du processus. Afin de simplifier les notations la dépendance envers la position  $\vec{x}$  sera omise.

Compte tenu des hypothèses précédentes,  $i$  est proportionnel à une variable aléatoire distribuée suivant une loi du  $\chi^2$  décentrée à deux degrés de liberté, [8] ou distribution de Rice modifiée, [3]. La présence d'une planète aura pour effet de décaler cette distribution de  $m$  :

$$p(i; m, c, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{i - m + c^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{2c\sqrt{i - m}}{\sigma^2}\right) H(i - m) \quad (2)$$

où  $I_0(x)$  désigne la fonction de Bessel modifiée du premier type d'ordre 0 et  $H()$  la fonction de Heaviside. Rapellons que :

$$E[i] = \sigma^2 + c^2 + m, \text{ var}[i] = \sigma^4 + 2c^2\sigma^2 \quad (3)$$

La figure 1 montre une image « longue pose » obtenue en utilisant le logiciel CAOS [5] permettant d'obtenir des simulations réalistes de la propagation atmosphérique ainsi que de la correction de l'optique adaptative. On peut voir autour de la « pastille » centrale (masquant le résidu d'étoile sur l'axe optique) la zone dans laquelle la lumière diffractée de l'étoile a été atténuée par le coronographe, rendant ainsi possible la détection de la planète. Cette dernière

est repérée par la flèche. Cette figure illustre parfaitement la difficulté du problème qui provient en partie de l'effet d'amplification des speckles aux endroits où la partie déterministe  $c(\vec{x})$  est importante comme le montre (3).

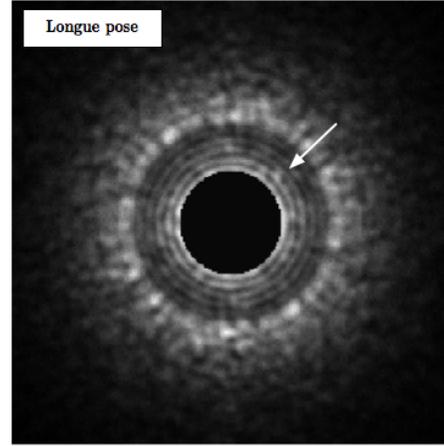


FIG. 1 – Image longue pose (4 sec.) obtenue en bande K. Les paramètres principaux sont : une atmosphère modélisée sous hypothèse de Taylor par 5 couches turbulentes, un télescope de 8m. de diamètre avec un coronographe de Lyot, une étoile de magnitude 5 et un rapport d'intensité entre la planète et l'étoile de  $5.10^{-5}$ . Dans cette simulation les effets de la turbulence atmosphérique sont réduits par une optique adaptative « extrême » corrigeant 95% des défauts du front d'onde.

Le modèle précédent décrit l'intensité à « fort flux » pour un pixel de l'image. Or, compte tenu de la faible intensité des objets observés, il est nécessaire de prendre en compte la nature quantique de la détection de la lumière. Le modèle physique associé est issu de la théorie semi-classique de la détection. Il définit la distribution des mesures comme étant la *transformée de Poisson Mandel* de la distribution de l'intensité à fort flux :

$$\Pr(N = n; m, c, \sigma) = \int_0^{+\infty} \frac{i^n}{n!} e^{-i} p(i; m, c, \sigma^2) di \quad (4)$$

En terme statistiques cette distribution correspond à un mélange « continu » de lois de Poisson généralement noté  $MP(p)$ . On pourra se référer par exemple à [10] pour une revue des principales propriétés de ces distributions.

Dans le cas  $m = 0$ , un calcul direct montre que :

$$\Pr(N = n; 0, c, \sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{c^2}{\sigma^2}\right)}{1 + \sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2}\right)^n {}_1F_1\left(n + 1; 1; \frac{c^2}{\sigma^2 + \sigma^4}\right) \quad (5)$$

où  ${}_1F_1(a; b; z)$  désigne la fonction confluyente hypergéométrique de Kummer, [1, p. 505]. En utilisant (13.1.27) et (13.1.2) de [1], cette fonction se simplifie en :

$${}_1F_1(n + 1; 1; z) = \exp(z) \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!k!(n-k)!} z^k \quad (6)$$

Dans le cas  $m \neq 0$ , en remplaçant (2) dans (4) on obtient après changement de variable :

$$\Pr(N = n; m, c, \sigma^2) = \exp(-m) \sum_{k=0}^n \frac{m^{n-k}}{(n-k)!} \Pr(N = k; 0, c, \sigma) \quad (7)$$

Cette relation de convolution montre que la présence d'une planète se manifeste par l'ajout à  $X \sim \Pr(N = n; 0, c, \sigma)$  d'une variable aléatoire  $Y$  ayant une distribution de Poisson de moyenne  $m$ ,  $Y \sim \mathcal{P}(m)$ . Soulignons le caractère général de ce résultat : la convolution d'une MP( $g$ ) avec une distribution de Poisson de paramètre  $m$  est une MP( $f$ ) avec  $f(i) = g(m - i)$  (voir par exemple [10]).

### 3 Statistique de test

On considère que l'on dispose de  $M$  images et on note  $n_k, k = 1, \dots, M$  les nombres de photons reçus sur le pixel à tester. La statistique de test du détecteur de Neyman Pearson pour les deux hypothèses  $m = 0$  et  $m \neq 0$  s'écrit :

$$T_\infty = \sum_{k=1}^M \log \left( \frac{\Pr(N = n_k; m, c, \sigma)}{\Pr(N = n_k; 0, c, \sigma)} \right) \quad (8)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k; m, c, \sigma^2) N_k \quad (9)$$

avec :

$$\alpha(k; m, c, \sigma) = \log \left( \frac{\Pr(N = k; m, c, \sigma)}{\Pr(N = k; 0, c, \sigma)} \right) \quad (10)$$

où  $N_k$  désigne le nombre de fois où  $k$  photons ont été mesurés sur le même pixel des  $M$  images. Les  $N_k$  suivent donc une distribution multinomiale de « probabilité de cellule »  $\Pr(N = k; 0, c, \sigma)$  (ou  $\Pr(N = k; m, c, \sigma)$ ) et d'indice  $M$ , [9].

L'évaluation des performances du détecteur reposant sur cette statistique est impossible compte tenu de la complexité du coefficient  $\alpha(k; m, c, \sigma)$ . Cependant, en substituant (7, 5) dans (10) on montre que :

$$\alpha(0; m, c, \sigma) = -m, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha(k; m, 0, \sigma) = \frac{m}{\sigma^2} \approx 0 \quad (11)$$

La figure 2 donne l'allure de  $\alpha(k; m, c, \sigma)$  en fonction de  $k$  pour différentes valeurs de  $c$  confirmant le fait que, dans la mesure où  $c$  est petit, seuls les  $\alpha(k; m, c, \sigma)$  pour  $k$  voisins de 0 possèdent des valeurs significatives et donc que seuls les  $N_k$  pour  $k$  petit joueront un rôle dans le processus de détection. Compte tenu de cela on définit une nouvelle statistique de test  $T_L$  obtenue en tronquant à  $L$  la somme dans (9).

Une façon d'évaluer les performances de  $T_L$  pour d'abord déterminer une valeur de  $L$  « optimale » et ensuite définir un rapport signal à bruit spécifique au problème consisterait bien entendu à utiliser une mesure de distance du type  $f$ -divergence entre  $T_L|m = 0$  et  $T_L|m \neq 0$ . Cependant, compte tenu de la difficulté de son calcul nous considérons comme critère d'évaluation le coefficient de déflexion

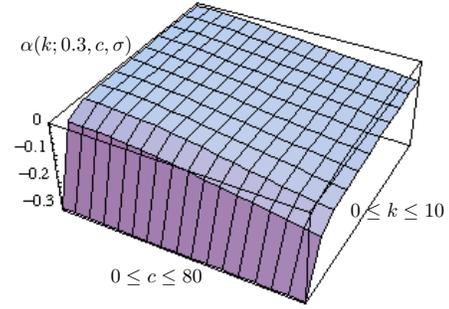


FIG. 2 – Allure de  $\alpha(k; m, c, \sigma)$  en fonction de  $k$  et  $c$ .

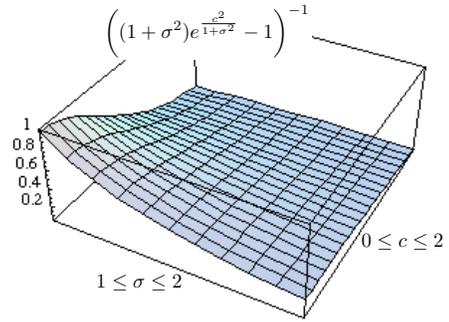


FIG. 3 – Rapport signal sur bruit  $d_0^2$  « normalisé ».

qui étant donné la loi des  $N_k$  s'écrit :

$$d_L^2 = \frac{(\mathbb{E}[T_L|m \neq 0] - \mathbb{E}[T_L|m = 0])^2}{\text{var}[T_L|m = 0]^2} \quad (12)$$

$$= \frac{N}{\xi} \sum_{k=0}^L (\Pr(N = k; m, c, \sigma) - \Pr(N = k; 0, c, \sigma)) \alpha(k; m, c, \sigma)^2, \quad (13)$$

avec :

$$\xi = \sum_{k=0}^L \Pr(N = k; 0, \cdot) (1 - \Pr(N = k; m, \cdot)) \alpha(k; \cdot)^2 - \sum_{k, q=0, k \neq q}^L \Pr(N = k; 0, \cdot) \Pr(N = q; 0, \cdot) \alpha(k; \cdot) \alpha(q; \cdot).$$

### 4 Étude de $T_0$

La technique dark-speckle correspond au cas extrême où l'on considère  $L = 0$ . En remplaçant (7,5) dans (13) on obtient après simplification :

$$d_0^2 = \frac{N(1 - e^{-m})^2}{(1 + \sigma^2)e^{\frac{c^2}{1+\sigma^2}} - 1} \quad (14)$$

La figure (3) représente le rapport signal sur bruit  $d_0^2$  « normalisé » en fonction de  $c$  et  $\sigma^2$ . Ce résultat montre que, dans la mesure où  $c$  et  $\sigma$  sont « petits », la statistique  $N_0$  contient une grande partie de l'information relative au

problème de détection posé, ce qui justifie l'utilisation de la technique de dark-speckle. Ceci n'est cependant plus vraie lorsque la composante déterministe  $c$  augmente, ce qui rend nécessaire l'utilisation des  $N_k$ ,  $k > 0$  pour la détection.

À ce titre, un développement limité de  $d_1^2$  donne :  $d_1^2 = d_0^2 + O(c^2)$  confirmant l'importance de l'utilisation de  $N_k$ , avec  $k > 0$  quand  $c$  est « grand ».

## 5 Test localement le plus puissant

Contrairement à  $T_0$ , l'utilisation de  $T_L$  pour  $L > 0$  nécessite la connaissance de  $m$  (diverses techniques « en ligne » ou « hors ligne » permettent d'obtenir des estimations de  $c(|\vec{x}|)$  et  $\sigma^2(|\vec{x}|)$ ). L'estimation de  $m$  à partir de (7) nécessitant une maximisation complexe pour chaque pixel de l'image et  $m$  étant supposé très « petit » on retiendra dans la suite l'utilisation du test localement le plus puissant (LMP), [11] :

$$T_\infty^{LMP} = \left. \frac{\partial T_\infty}{\partial m} \right|_{m=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{\partial \alpha(k; m, c, \sigma^2)}{\partial m} \right|_{m=0} N_k \quad (15)$$

L'utilisation des résultats de la section 2 conduit à :

$$T_\infty^{LMP} = -M + \sum_{k=1}^{\infty} \beta(k; c, \sigma^2) N_k \quad (16)$$

avec :

$$\begin{aligned} \beta(k; c, \sigma^2) &= \left. \frac{\Pr(N = n - 1; m, c, \sigma)}{\Pr(N = n; m, c, \sigma)} \right|_{m=0} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{{}_1F_1\left(n; 1; \frac{c^2}{\sigma^2 + \sigma^4}\right)}{{}_1F_1\left(n + 1; 1; \frac{c^2}{\sigma^2 + \sigma^4}\right)} \end{aligned}$$

Les performances de ce test tronqué à  $L$  fréquences,  $T_L^{LMP}$ , se calculent en utilisant une expression analogue à celle de la déflexion (13). Il est ainsi possible d'évaluer analytiquement la perte de performance de  $T_L^{LMP}$  par rapport à  $T_L$ . Soulignons enfin que les performances de  $T_\infty^{LMP}$  peuvent s'obtenir en utilisant la distribution asymptotique ( $M$  grand) du LMP.

Le test  $T_\infty^{LMP}$  a été calculé sur des images courtes poses obtenues dans la configuration de l'image de la figure 1 : durant les 4 sec. une image courte pose de 1 ms. a été retenue toutes les 5 ms. ce qui conduit à traiter  $M = 800$  images. La figure 4 montre le résultat obtenu. Ce résultat montre un gain sensible par rapport à une simple intégration, (c.f. figure 1) et à la technique de dark-speckle (c.f. figure 4) pour la configuration étudiée.

## Références

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1972.

[2] C. Aime and R. Soummer. *Astronomy with High Contrast Imaging*, chapter Introduction to Stellar Coronagraphy with Entrance Pupil Apodization. EAS Publications Series, 2002.

[3] C. Aime and R. Soummer. Influence of speckle and Poisson noise on exoplanet detection with a coronagraph. In *European Signal Processing Conference*, 2004.

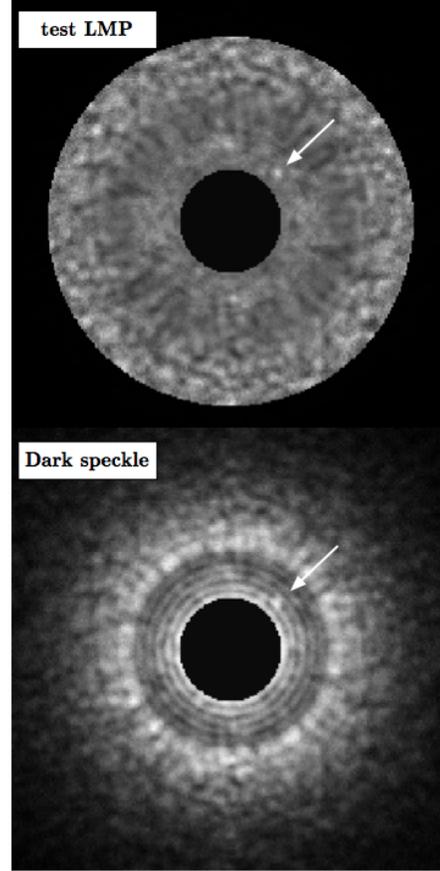


FIG. 4 – Test LMP et Dark-Speckle .

[4] A. Boccaletti, C. Moutou, and L. Abe. Refined laboratory simulations of dark-speckle coronagraphy. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 141 :157–164, 2000.

[5] M. Carillet, C. Vérinaud, B. Femenía, A. Riccardi, and L. Fini. Modelling astronomical adaptive optics : I. the software package caos. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2004.

[6] A. Ferrari and C. Aime. Étude statistique de la détection d'exo-planètes en imagerie courte pose. In *Colloque sur le Traitement du Signal et des Images, GRETSI*, Toulouse, 2001. Paper 256.

[7] A. Ferrari, G. Letac, and J.-Y. Tournet. Multivariate mixed Poisson distributions. In *European Signal Processing Conference*, Vienna, 2004.

[8] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. *Continuous Univariate Distributions*, volume 2. John Wiley, New York, 2nd edition, 1995.

[9] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. *Discrete Multivariate Distributions*. John Wiley, 1997.

[10] D. Karlis and E. Xekalaki. Mixed Poisson distributions. *International Statistical Review*, 73(1) :35–58, 2005.

[11] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Detection Theory*. Signal Processing Series. Prentice Hall, 1998.

[12] A. Labeyrie. Images of exo-planets obtainable from dark speckles in adaptive telescopes. *Astronomy and Astrophysics*, 298 :544–548, 1995.

[13] F. Roddier. *Adaptive Optics in Astronomy*. Cambridge University Press, 1999.