

Restauration des images floues et bruitées multiplicativement*

Luc KLAINE¹, Benoit VOZEL², Kacem CHEHDI³

^{1, 2, 3}Équipe TSI2M de l'IETR de l'Université de Rennes I
6 rue de Kerampont, BP 80518, 22305 Lannion Cedex

luc.klaine@enssat.fr,

benoit.vozel@enssat.fr,

kacem.chehdi@enssat.fr

Résumé – Dans cet article, nous décrivons une méthode de restauration des images floues et bruitées multiplicativement inspirée du filtre de Kuan. Un modèle variationnel de forme intégrale ou différentielle est obtenu à partir de l'erreur quadratique moyenne globale. La forme intégrale introduit un noyau d'estimation locale équivalent à une réponse impulsionnelle localement adapté à l'image et ouvre des perspectives d'extension à d'autres types de noyau. La forme différentielle conduit à un nouveau modèle où l'*a priori* d'homogénéité dépend du gradient et de l'image.

Abstract – In this paper, we describe a method of restoration of the images perturbed by a blur and a multiplicative noise inspired by the Kuan filter. A variational model in an integral or a differential form is obtained from the total mean square error. The integral form introduces a kernel of local estimates, that is equivalent to a point spread function locally adapted to the image and opens perspectives for extension to other kind of kernel. The differential form leads to a new model in which the *a priori* homogeneity depends on the gradient and the image.

1 Introduction

Une nouvelle méthode de restauration par minimisation de l'erreur quadratique moyenne globale est décrite. L'image observée est supposée dégradée par un flou et un bruit multiplicatif de moyenne 1 décorrélié de l'image originale. L'idée est d'établir un lien entre le principe du filtre de Kuan et les méthodes de restauration variationnelles.

Trois formulations alternatives de l'erreur quadratique moyenne globale sont présentées dans la **section 2**. La première est stochastique et coïncide avec l'erreur quadratique moyenne de l'image globale. Elle justifie le couplage de cette énergie de régularisation avec un terme d'attache aux données. La seconde est intégrale et consiste à incorporer des statistiques locales. Elle autorise l'utilisation d'un noyau d'estimation locale adapté à la configuration locale de l'image. La troisième est différentielle et correspond au cas limite où le pas d'échantillonnage est proche de zéro. Le traitement devient alors indépendant de la résolution de l'image et permet d'établir un lien avec les méthodes variationnelles où l'*a priori* d'homogénéité est caractérisé par le gradient.

Enfin, les résultats expérimentaux de la nouvelle méthode de restauration comparant les formes intégrale et différentielle sont présentés dans la **section 3**.

2 Formulations alternatives de l'erreur quadratique moyenne globale

2.1 Forme stochastique

Supposons d'abord que l'image est simplement bruitée.

* Ces travaux sont financés par le Conseil Régional de Bretagne et le FEDER à travers du projet Interreg 3B PIMHAI.

Pour rendre globale l'erreur quadratique moyenne locale (dépend de chaque pixel), il suffit de l'intégrer sur le support de l'image (*déf. 2.1*). Les propriétés du bruit conduisent à une simplification de l'erreur quadratique moyenne globale stochastique (*prop. 2.1*).

Définition 2.1 Soient $u(\cdot)$ l'image originale, $n(\cdot)$ le bruit et $K(\cdot)$ le gain alors on définit l'erreur quadratique moyenne globale ou énergie potentielle EQMG stochastique $J(\cdot)$ par :

$$J(u, K) \triangleq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{E} \left[\left(u - [\mathbb{E}[u \cdot n] + K((u+n) - \mathbb{E}[u+n])] \right)^2 \right] \quad (1)$$

représentant la moyenne de l'erreur quadratique moyenne entre l'image originale $u(\cdot)$ et la sortie du filtre de Kuan [9, 8].

Proposition 2.1 Soit σ_n^2 la variance du bruit alors l'énergie potentielle EQMG s'exprime également :

$$J(u, K) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[(1-K)^2 \mathbb{V}[u] + K^2 \sigma_n^2 \mathbb{E}[u^2] \right]. \quad (2)$$

PREUVE : Conformément au modèle de pseudo-observation introduit par Kuan, on pose $b = u \cdot (n-1)$. D'après les hypothèses sur le bruit multiplicatif, on a $\mathbb{E}[b] = 1$, $\mathbb{V}[b] = \mathbb{E}[u^2] \sigma_n^2$ et $\mathbb{E}[(u - \mathbb{E}[u])(b - \mathbb{E}[b])] = 0$ et on obtient :

$$\begin{aligned} J(u, K) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{E} \left[(u - \mathbb{E}[u])^2 + K^2 (u - \mathbb{E}[u])^2 + K^2 ((b) - \mathbb{E}[b])^2 \right. \\ &\quad \left. - K^2 (u - \mathbb{E}[u])(b - \mathbb{E}[b]) - 2K(u - \mathbb{E}[u])^2 \right. \\ &\quad \left. - 2K(u - \mathbb{E}[u])(b - \mathbb{E}[b]) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\mathbb{V}[u] + K^2 \mathbb{V}[u] + K^2 \mathbb{V}[b] - 2K \mathbb{V}[u] \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[(1-K)^2 \mathbb{V}[u] + K^2 \mathbb{E}[u^2] \sigma_n^2 \right]. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'image est également dégradée par un flou. On décide arbitrairement de ne pas introduire le flou dans l'énergie potentielle EQMG. On impose cependant au minimum de rester suffisamment proche de l'image observée conformément au modèle de dégradation. L'énergie potentielle EQMG perturbée par un terme d'attache aux données est appelée énergie totale EQMG :

$$J(\lambda; u, K) \triangleq J(u, K) + \lambda \int_{\Omega} \left| \frac{u_0}{H(u)} - 1 \right|^2. \quad (3)$$

Le terme d'attache aux données caractérisant le bruit multiplicatif est issu des travaux de Rudin-Osher [11]. Le procédé est largement utilisé pour les méthodes variationnelles [2]. L'énergie potentielle EQMG est perçue comme une énergie de régularisation. Elle permet d'introduire un *a priori* d'homogénéité pour reconstruire proprement l'image. L'énergie potentielle ou totale EQMG dépendent de l'image mais aussi du gain. La première raison est que la sortie du filtre de Kuan ne donne pas la meilleure image au sens de l'erreur quadratique moyenne. La seconde raison est que l'énergie potentielle EQMG est quadratique donc convexe par rapport à l'image ou au gain séparément. L'algorithme naturel qui en découle consiste à minimiser alternativement [3, 4] l'énergie totale EQMG bien qu'il n'y ait aucune garantie quant à l'existence d'un couple gain et image optimal.

2.2 Forme intégrale

Jusqu'à présent l'énergie potentielle EQMG était stochastique, on désire la rendre déterministe. L'espérance et la variance sont remplacées par des statistiques locales. On obtient l'énergie potentielle EQMG intégrale (déf. 2.2)

Définition 2.2 Soient $\Phi(\cdot) \in L^\infty(\Omega^2)$ un noyau d'estimation locale, $u(\cdot) \in L^2(\Omega)$ l'image originale et $K(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ le gain alors on définit l'énergie potentielle EQMG intégrale par :

$$J(u, K) \triangleq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[(1 - K)^2 \text{var}_{\Phi}[u] + K^2 \sigma_n^2 \text{moy}_{\Phi}[u^2] \right]. \quad (4)$$

On rappelle que les statistiques locales peuvent être définies à partir d'un noyau d'estimation locale $\Phi(\cdot) \in L^\infty(\Omega^2)$ par :

$$\begin{aligned} \text{moy}_{\Phi}[u](x) &\triangleq \|\Phi(x)\|_{L^1(\Omega)}^{-1} \int_{\Omega} \Phi(x, y) u(y) dy, \\ \text{var}_{\Phi}[u](x) &\triangleq \|\Phi(x)\|_{L^1(\Omega)}^{-1} \int_{\Omega} \Phi(x, y) |u(y) - \text{moy}_{\Phi}[u](x)|^2 dy \end{aligned}$$

où la densité d'estimation locale vaut $\Phi(x)(y) \triangleq \Phi(x, y)$. Afin de minimiser alternativement l'énergie totale EQMG, on détermine l'image optimale en fonction du gain et le gain optimal en fonction de l'image par dérivation au sens de Gâteaux (prop. 2.2 et 2.3).

Proposition 2.2 Le gain optimal $K(\cdot)$ lorsque l'image $u(\cdot)$ est fixée vaut :

$$K(x) = \frac{\text{var}_{\Phi}[u](x)}{\text{var}_{\Phi}[u](x) + \sigma_n^2 \text{moy}_{\Phi}[u^2](x)}. \quad (5)$$

PREUVE : La dérivée de $J(u, \cdot)$ par rapport à $K(\cdot)$ vaut :

$$\langle J_K(u, K), K_h \rangle = \int_{\Omega} \left[K(\text{var}_{\Phi}[u] + \sigma_n^2 \text{moy}_{\Phi}[u^2]) - \text{var}_{\Phi}[u] \right] K_h.$$

et s'annule pour le gain $K(\cdot)$ donné par la proposition. ■

Proposition 2.3 L'image optimale $u(\cdot)$ lorsque le gain $K(\cdot)$ est fixé vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\Phi(y)\|_{L^1(\Omega)}^{-1} \Phi(y, x) \left[(1 - K)^2(y) [u(x) - \text{moy}_{\Phi}[u](y)] \right. \\ \left. + K^2(y) \text{moy}_{\Phi}[u](y) \right] dy \\ - \lambda H^* \left[\frac{u_0}{H(u)^2} \right] \left[\frac{u_0}{H(u)} - 1 \right] (x) = 0 \text{ sur } \Omega \end{aligned} \quad (6)$$

où $H^*(\cdot)$ est l'adjoint de $H(\cdot)$.

PREUVE : Les dérivées de $\text{moy}_{\Phi}[u^2](x)$ et $\text{moy}_{\Phi}[u^2](x)$ par rapport à $u(\cdot)$ valent respectivement :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \left[\text{moy}_{\Phi}[(u + \varepsilon u_h)^2] - \text{moy}_{\Phi}[u^2] \right] (x) \\ = \int_{\Omega} 2 \|\Phi(x)\|_{L^1(\Omega)}^{-1} \Phi(x, y) u(y) u_h(y) dy \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \left[\text{moy}_{\Phi}[u + \varepsilon u_h]^2 - \text{moy}_{\Phi}[u^2] \right] (x) \\ = \int_{\Omega} 2 \|\Phi(x)\|_{L^1(\Omega)}^{-1} \Phi(x, y) \text{moy}_{\Phi}[u](x) u_h(y) dy. \end{aligned}$$

La dérivée de Gâteaux de $J(\cdot, K)$ par rapport à $u(\cdot)$ vaut :

$$\begin{aligned} \langle J_u(u, K), u_h \rangle = \int_{\Omega} u_h(x) \int_{\Omega} \|\Phi(y)\|_{L^1(\Omega)}^{-1} \Phi(y, x) \\ \left[(1 - K)^2(y) [u(x) - \text{moy}_{\Phi}[u](y)] + K^2(y) \text{moy}_{\Phi}[u](y) \right] dy dx \end{aligned}$$

La dérivée du terme d'attache aux données s'identifie à :

$$-H^* \left[\frac{u_0}{H(u)^2} \right] \left[\frac{u_0}{H(u)} - 1 \right],$$

celle de l'énergie totale s'annule pour l'image $u(\cdot)$ donnée par la proposition. ■

En toute rigueur, les propriétés ne sont valables que pour un noyau d'estimation locale indépendant de l'image. Toutefois, si le noyau d'estimation est construit à l'aide d'une fonction de seuillage, la dérivée est nulle presque partout sur la sous-fenêtre. En d'autre terme, la contribution de la réponse impulsionnelle par rapport à l'image reste négligeable. Par conséquent, il est possible d'utiliser un noyau d'estimation locale adaptatif dans l'algorithme de restauration.

2.3 Forme différentielle

Intéressons-nous au cas limite où le pas d'échantillonnage spatial est très faible ou tend vers zéro. De manière équivalente, la taille de la sous-fenêtre tend également vers zéro. En conséquence, les opérateurs intégraux deviennent des opérateurs différentiels. Afin de bien le comprendre, on étudie trois noyaux d'estimation locale significatifs.

- SUR LE DISQUE DE RAYON ε : la moyenne locale est consistante avec le Laplacien à l'ordre 2, la variance locale avec le carré du gradient à l'ordre 2 (lem. 2.1). On retrouve la propriété d'isotropie du Laplacien puisque le disque est invariant par rotation ;

Lemme 2.1 Soit $\Phi(x, y) = \psi_\varepsilon(y - x)$ où $\psi_\varepsilon(\cdot)$ est la fonction indicatrice sur le disque de rayon ε alors pour toute image $u(\cdot) \in C^3(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \text{moy}_\Phi[u](x) &= u(x) + \frac{\varepsilon^2}{8} \Delta u(x) + o(\varepsilon^2), \\ \text{var}_\Phi[u](x) &= \frac{\varepsilon^2}{4} |\nabla u(x)|^2 + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (7)$$

- SUR LE MASQUE DE LEE DE RAYON ε : la moyenne locale est consistante avec le gradient à l'ordre 1, la variance locale avec le carré du gradient à l'ordre 2 (lem. 2.2). La moyenne locale n'est finalement pas très bien adaptée puisque elle se ramène simplement à un opérateur à l'ordre 1 ;

Lemme 2.2 Soit $\Phi(x, y) = H(-\langle \nabla u(x), y - x \rangle) \psi_\varepsilon(y - x)$ où $\psi_\varepsilon(\cdot)$ est la fonction indicatrice sur le disque de rayon ε et $H(\cdot)$ la fonction de Heavyside alors pour toute image $u(\cdot) \in C^3(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \text{moy}_\Phi[u](x) &= u(x) - \frac{4\varepsilon}{3\pi} |\nabla u(x)| + \frac{\varepsilon^2}{8} \Delta u(x) + o(\varepsilon^2), \\ \text{var}_\Phi[u](x) &= \varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) |\nabla u(x)|^2 + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (8)$$

- SUR LE SEGMENT PARALLÈLE AU CONTOUR DE LONGUEUR 2ε : la moyenne locale est consistante avec la dérivée seconde tangentielle à l'ordre 2, la variance locale est négligeable à l'ordre 2 (lem. 2.3). La variance locale ne caractérise pas le désordre au voisinage du point.

Lemme 2.3 Soit $\Phi(x, y) = \delta(\langle \nabla u(x), y - x \rangle) \psi_\varepsilon(y - x)$ où $\psi_\varepsilon(\cdot)$ est la fonction indicatrice sur le disque de rayon ε et $\delta(\cdot)$ la masse de Dirac alors pour toute image $u(\cdot) \in C^3(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \text{moy}_\Phi[u](x) &= u(x) + \frac{\varepsilon^2}{12} u_{TT}(x) + o(\varepsilon^2), \\ \text{var}_\Phi[u](x) &= o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (9)$$

où T désigne le vecteur tangent ou vecteur unitaire parallèle au contour.

Les résultats de consistance entre la variance et le carré du gradient sont introduits sous le signe intégral. On obtient l'erreur quadratique moyenne globale différentielle (déf. 2.3).

Définition 2.3 Soient $u(\cdot) \in H^1(\Omega)$ l'image originale, σ_n^2 la variance du bruit et $K(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ le gain alors on définit l'énergie potentielle EQMG différentielle $J(\cdot)$ par :

$$J(u, K) \triangleq \frac{1}{2} \int_\Omega \left[(1 - K)^2 |\nabla u|^2 + K^2 \sigma_n^2 u^2 \right]. \quad (10)$$

On obtient de nouvelles formules pour caractériser l'image optimale lorsque le gain est fixé et le gain optimal lorsque l'image est fixée (prop. 2.4 et prop. 2.5).

Proposition 2.4 Le gain optimal $K(\cdot)$ lorsque l'image $u(\cdot)$ est fixée vaut :

$$K = \frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|^2 + \sigma_n^2 u^2}. \quad (11)$$

PREUVE : La dérivée de Gâteaux de $J(u, \cdot)$ par rapport à $K(\cdot)$ vaut :

$$\langle J_K(u, K), K_h \rangle = \int_\Omega \left[K (|\nabla u|^2 + \sigma_n^2 u^2) - |\nabla u|^2 \right] K_h.$$

et s'annule pour le gain $K(\cdot)$ donné par la proposition. ■

Proposition 2.5 L'image optimale $u(\cdot)$ lorsque le gain $K(\cdot)$ est fixé vérifie :

$$\begin{cases} -\text{div} \left((1 - K)^2 \nabla u \right) + K^2 \sigma_n^2 u \\ -\lambda H^* \left[\frac{u_0}{H(u)^2} \right] \left[\frac{u_0}{H(u)} - 1 \right] = 0 \text{ sur } \Omega \\ (1 - K)^2 u_N = 0 \end{cases} \text{ sur } \partial\Omega \quad (12)$$

où N désigne le vecteur normal unitaire intérieur au bord.

PREUVE : La dérivée de Gâteaux de $J(\cdot, K)$ par rapport à l'image $u(\cdot)$ vaut d'après la formule de Green :

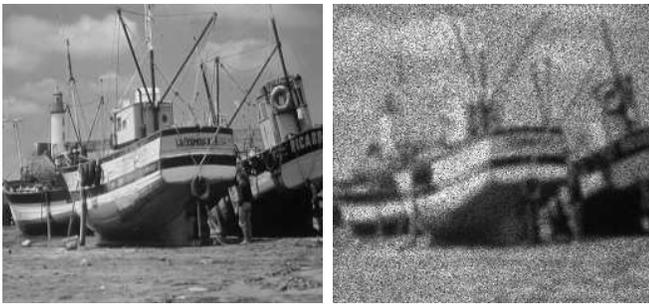
$$\begin{aligned} \langle J_u(u, K), u_h \rangle &= \int_{\partial\Omega} \left[(1 - K)^2 u_N \right] u_h \\ &\quad - \int_\Omega \left[\text{div} \left((1 - K)^2 \nabla u \right) - K^2 \sigma_n^2 u \right] u_h. \end{aligned}$$

D'après la formule de la dérivée du terme d'attache aux données, la dérivée de l'énergie totale s'annule précisément lorsque l'image $u(\cdot)$ vérifie et les équations précédentes. ■

Tous les résultats obtenus via la dérivée de Gâteaux sont purement formels. Le gain optimal lorsque l'image est fixée existe, il est borné et compris entre 0 et 1. Comme le gain est borné, les résultats classiques sur les équations aux dérivées partielles garantissent l'existence d'une solution faible de l'équation caractéristique de l'image optimale dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. La minimisation alternée assure l'existence de l'image optimale et du gain optimal à chaque itération. En aucun cas, elle n'assure la convergence du procédé vers un couple image/gain optimal.

3 Etude expérimentale

Les tests ont été menés sur les images [\[bateau\]](#) et [\[voiture\]](#) dégradées par un flou gaussien ou de défocalisation et un bruit d'écart-type $\sigma_n = 0.2$ (fig. 1 et 2). Les deux méthodes de restauration testées sont basées sur la minimisation alternée de l'énergie EQMG en fonction du gain et de l'image. La première méthode forme différentielle est directement issue de la minimisation de l'énergie totale EQMG différentielle. La seconde méthode forme intégrale repose sur un noyau d'estimation locale adaptatif [6, 7] conformément au développement sur l'énergie totale EQMG intégrale. Le noyau d'estimation locale est construit de sorte à tenir compte de la nature des pixels selon qu'ils se trouvent dans une région homogène ou près d'un contour. Il coïncide exactement avec la réponse impulsionnelle du filtre moyenneur de Pomalaza-Raes [5] dans les zones homogènes. Il coïncide précisément avec la réponse impulsionnelle du filtre moyenneur de Asano-Yokoga [1] près des contours. Les résultats objectifs des simulations (tab. 1) regroupent les critères habituels, à savoir l'erreur moyenne absolue, l'erreur moyenne quadratique, l'erreur maximale et le



(a) image originale

(b) image dégradée



(c) image restaurée forme différentielle (d) image restaurée forme intégrale

FIG. 1 – Restauration de l'image [savoise] pour un flou gaussien et un bruit multiplicatif d'écart-type $\sigma_n = 0.2$

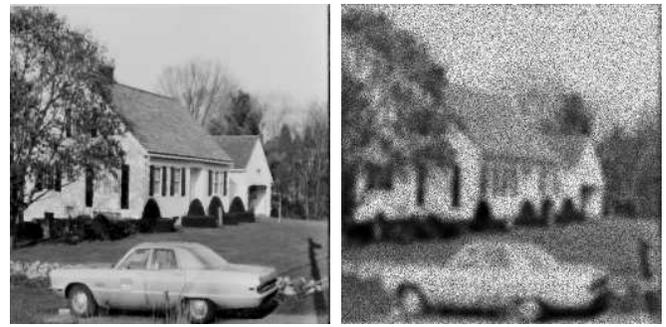
rapport signal/bruit crête. On constate visuellement que l'utilisation du noyau d'estimation locale adaptatif affine la restauration. En effet, les bords semblent plus francs et le flou moins présent dans l'image ainsi restaurée. Toutefois, on observe un effet d'escalier sur les différents bords obliques. Cela montre que la configuration locale de l'image n'est pas totalement respectée. Par conséquent, le noyau d'estimation locale mérite d'être encore amélioré. Globalement, les résultats objectifs confirment l'impression visuelle. En effet, la méthode de restauration basée sur la réponse impulsionnelle adaptative minimise quasiment toujours les différents critères d'erreur.

4 Conclusion

L'énergie potentielle EQMG correspond à une énergie de régularisation et est adaptée à la restauration des images floues et bruitées. Cependant, l'existence et l'unicité du minimum ne sont pas assurées conformément au modèle de Geman-McClure où la fonction régularisante n'est pas convexe vu comme un cas particulier du modèle de Perona-Malik [10] mal posé. Par conséquent, la convergence de l'algorithme n'est pas assurée et peut générer une solution *a priori* instable. Toutefois, il semble au moins aussi légitime d'introduire un terme d'attache aux données dans l'énergie totale EQMG que dans le modèle de Geman-McClure. Or bien que ne s'appuyant pas à l'heure actuelle sur une théorie bien formalisée, les énergies de régularisations non-convexes sont largement utilisées d'autant que les

TAB. 1 – Tableau comparatif des méthodes de restauration appliquées aux images [bateau] et [voiture] pour différents flous et un bruit multiplicatif d'écart-type $\sigma_n = 0.2$

		Critères de comparaison			
		mae	mse	me	psnr
[bateau]	dégradée	23.205	30.458	168	18.457
	forme différentielle	14.259	21.170	155	21.65
	forme intégrale	12.248	16.545	126	23.791
[voiture]	dégradée	25.038	32.450	157	17.906
	forme différentielle	18.124	25.101	151	20.171
	forme intégrale	11.894	18.569	105	22.780



(a) image originale

(b) image dégradée



(c) image restaurée forme différentielle (d) image restaurée forme intégrale

FIG. 2 – Restauration de l'image [voiture] pour un flou de défocalisation et un bruit multiplicatif d'écart-type $\sigma_n = 0.2$

résultats sont globalement prometteurs. Enfi n, signalons que l'optimisation du noyau d'estimation locale adaptatif devrait également améliorer sensiblement les résultats.

Références

- [1] T. Asano and N. Yokoga. Image segmentation scheme for low level computer vision. *Pattern Recognition*, 1981.
- [2] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical problems in image processing (Partial differential equations and the calculus of variations)*. Springer, 2002.
- [3] P. Charbonnier. *Reconstruction d'image : Régularisation avec prise en compte des discontinuités*. PhD thesis, Université Sophia-Antipolis de Nice, September 1994.
- [4] P. Charbonnier, K. Blanc-Féraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :370–375, March 1997.
- [5] Y.S. Fong, C.A. Pomalaza-Raez, and X.H. Wang. Comparison study of non-linear studies in image processing applications. *Optical Engineering*, 28(7) :749–760, 1989.
- [6] L. Klaine, B. Vozel, and K. Chehdi. Adaptive filtering of multiplicative noise by a new differential method. In *Proceedings of ISSPA' 2003*, July 2003.
- [7] L. Klaine, B. Vozel, and K. Chehdi. An integro-differential method for adaptive filtering of additive or multiplicative noise. In *Proceedings of ICASSP' 2005*, March 2005.
- [8] D.T. Kuan. Adaptive noise smoothing filter for images with signal dependent noise. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-7(2) :165–177, 1980.
- [9] J.S. Lee. Digital image enhancement and noise filtering by use of local statistics. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-2(2) :165–168, 1980.
- [10] P. Perona and J. Malik. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7) :629–639, 1990.
- [11] L.I. Rudin and S. Osher. Total variation based image restoration with free local constraints. In *IEEE International Conference on Image Processing*, volume 1, pages 31–35, November 1994.