

Identification stable et reconstruction robuste de signaux non stationnaires à échantillons manquants

Rawad Zgheib Gilles Fleury Elisabeth Lahalle

Dpt. Signaux et Systèmes Électroniques, Supélec
91192 Gif-sur-Yvette, France
prénom.nom@supelec.fr

Résumé – On souhaite reconstruire en ligne un signal à échantillons manquants. Lorsque la perte est élevée les méthodes existantes peuvent conduire à l'identification de modèles instables. Nous proposons, à notre connaissance, le premier algorithme qui permet le traitement en ligne des signaux à échantillons manquants utilisant la structure en treillis du filtre. La robustesse à un fort taux de perte et la stabilité du modèle ainsi identifié sont garanties. Les performances de ce nouvel algorithme dépassent celles des algorithmes existants et ce d'autant plus que la probabilité de perte est forte.

Abstract – This paper deals with the problem of adaptive reconstruction and identification of AR processes with randomly missing observations. Existing methods use a direct realization of the filter to identify. Therefore, the stability of the identified filter is not guaranteed. In addition, when the probability of losing a sample is high, they may converge slowly or even fail to converge. We propose, at our knowledge, the first algorithm that uses the lattice structure for online processing of signals with missing samples. Hence, the model identified is guaranteed to be stable. In addition it is robust to high probabilities of losing a sample. It shows better performances than the existing algorithms in reconstruction of audio signals and particularly for high probabilities of missing samples.

1 Introduction

Dans bien des applications telles que les télécommunications numériques, on est confronté au traitement de signaux ayant subi une perte d'échantillons. On propose dans ce papier d'identifier et de reconstruire en ligne un signal caractérisé par un processus AR non stationnaire ayant subi une perte d'échantillons. La perte d'échantillons est aléatoire suivant une loi de Bernoulli indépendante du signal.

Plusieurs algorithmes telles que [1, 2, 4, 6, 7] ont déjà été proposés pour le traitement en ligne de signaux à échantillons manquants. L'algorithme RLS pseudo linéaire [6], une adaptation de l'algorithme RLS à l'identification de signaux à données manquantes, est l'un des plus récents. Par contre, cet algorithme converge vers une estimation biaisée des paramètres. Récemment [9], nous avons proposé d'utiliser un filtre de Kalman pour une prédiction optimale conjointement avec l'algorithme RLS pseudo linéaire pour résoudre ce problème de biais. L'algorithme proposé offre une reconstruction optimale du signal au sens des moindres carrés ainsi qu'une identification non biaisée des paramètres.

Tous les algorithmes déjà proposés pour le traitement des signaux à échantillons manquants utilisent une représentation directe du filtre. La stabilité du filtre identifié n'est donc pas garantie. On propose donc d'identifier le signal à échantillons manquants en utilisant la structure en treillis du filtre. Makhoul et al. [5] développent une méthode générale simple pour l'estimation adaptative des coefficients de réflexion dans un cadre de prédiction linéaire

de signaux non stationnaires. On propose alors de l'introduire dans un algorithme de type RLSL [3]. On propose d'adapter cet algorithme en utilisant un filtre de Kalman à la reconstruction et identification de signaux non stationnaires à échantillons manquants. À notre connaissance, c'est le premier algorithme qui permet le traitement des signaux à échantillons manquants utilisant la structure en treillis du filtre. Outre la stabilité du modèle identifié, cet algorithme montre une bonne dynamique de convergence même lorsque la probabilité de perte d'échantillons est élevée. Il est donc adapté pour la reconstruction de signaux de parole.

2 Algorithme RLSL

Les algorithmes de type RLSL sont conjointement récursifs sur l'ordre et sur le temps. Ils permettent d'identifier à chaque instant, n , les coefficients de réflexion $k_n^{(l)}$ correspondant à un étage l du filtre en treillis pour $1 \leq l \leq L$, L étant l'ordre du modèle AR considéré. Ils sont simples et offrent une bonne dynamique de convergence dans le suivi des paramètres d'un signal non stationnaire [3]. Pour calculer les coefficients de réflexion $k_n^{(l)}$, Makhoul et al. [5] proposent de minimiser la somme pondérée de $f_n^{(l)2}$ et $b_n^{(l)2}$, les erreurs quadratiques de prédiction avant et arrière pour chaque ordre l jusqu'à l'instant n . Le coefficient de réflexion ainsi obtenu correspond par construction à un filtre stable. L'algorithme RLSL, utilisant ce coefficient, vérifie à un instant n les équations récursives suivantes :

$$f_n^{(0)} = b_n^{(0)} = x_n, k_n^{(0)} = 1, \quad (1)$$

$$\begin{cases} C_n^{(l)} = \lambda C_{n-1}^{(l)} + 2f_n^{(l-1)} b_{n-1}^{(l-1)}, \\ D_n^{(l)} = \lambda D_{n-1}^{(l)} + f_n^{(l-1)2} + b_{n-1}^{(l-1)2}, \\ k_n^{(l)} = -\frac{C_n^{(l)}}{D_n^{(l)}}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} f_n^{(l)} = f_n^{(l-1)} - k_n^{(l)} b_{n-1}^{(l-1)}, \\ b_n^{(l)} = b_{n-1}^{(l-1)} - k_n^{(l)} f_n^{(l-1)}. \end{cases} \quad (3)$$

où à chaque instant une récurrence sur l'ordre est nécessaire $1 \leq l \leq \min(L, n)$.

Dans ce qui suit, nous proposons d'adapter cet algorithme à l'identification des signaux à échantillons manquants, en utilisant, pour une reconstruction optimale, le filtre de Kalman présenté dans [9].

3 Filtre de Kalman

Le processus AR, $\{x_n\}$, d'ordre L vérifie l'équation aux différences suivante : $x_n = a_1^{(L)} x_{n-1} + \dots + a_L^{(L)} x_{n-L} + \epsilon_n$, ϵ_n étant le processus d'innovation. On modélise la perte d'échantillons par un processus aléatoire binaire, $\{c_n\}$. L'observation est donc donnée par $y_n = c_n x_n$ où $y_n = x_n$ si l'échantillon est disponible, sinon $y_n = 0$. Le processus $\{x_n\}$ ayant subi une perte d'échantillons admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = A \mathbf{x}_n + [1 \ 0 \ \dots \ 0]^\top \epsilon_{n+1} \\ y_{n+1} = \mathbf{c}_{n+1}^\top \mathbf{x}_{n+1} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{où } A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_1^{(L)} & \dots & \dots & a_L^{(L)} \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{array} \right] \text{ de dimensions } L \times L.$$

$\mathbf{x}_n = [x_n, \dots, x_{n-L+1}]^\top$ et $\mathbf{c}_n = [c_n, 0, \dots, 0]^\top$ de dimension L .

À l'instant $n+1$, les états prédit et filtré sont notés $\hat{\mathbf{x}}_{n+1|n}$ et $\hat{\mathbf{x}}_{n+1|n+1}$. K_{n+1} est le gain du filtre de Kalman. Les équations du filtre de Kalman correspondant à la représentation d'état (4) peuvent être retrouvées dans [9].

4 Algorithme proposé

Afin d'identifier un signal en utilisant un algorithme RLSL, l'évaluation des erreurs de prédiction avant et arrière $(f_n^{(l)})_{1 \leq l \leq L}$ et $(b_n^{(l)})_{1 \leq l \leq L}$ est nécessaire à chaque instant. Ceci nécessite à chaque instant la valeur du signal. Quand un échantillon est absent, une estimation optimale au sens des moindres carrés des erreurs de prédiction est requise, puisque ces valeurs sont utilisées à l'étape suivante. Celles-ci sont estimées grâce au filtre de Kalman et minimisées par l'algorithme RLSL. Utilisant le théorème des observations manquantes [8], dans le cas de signaux à échantillons manquants les équations récursives sur l'ordre pour l'estimation des erreurs de prédiction avant et arrière sont initialisées par $\hat{f}_n^{(0)} = \hat{b}_n^{(0)} = \hat{x}_{n|n}$, où $\hat{x}_{n|n}$ est la prédiction de x_n obtenue grâce au filtre de Kalman.

Puisque le filtre de Kalman utilise une représentation directe du filtre, une transformation des coefficients de réflexion doit être faite à chaque instant pour obtenir une estimation des paramètres AR. Cette transformation est fournie par l'algorithme de Durbin-Levinson [3].

Comme il a été démontré dans [9], le filtre de Kalman utilisé corrige la prédiction d'un échantillon manquant au cours des L étapes suivantes, selon l'équation suivante :

$$\hat{x}_{n+1|n+t} = \hat{x}_{n+1|n} + \sum_{i=1}^t K_{n+i}(i) (y_{n+i} - \hat{y}_{n+i|n+i-1}) \quad (5)$$

où $1 \leq t \leq L-1$.

Pour cela, nous proposons d'utiliser, pour l'estimation des erreurs de prédiction avant et arrière, une version corrigée de la prédiction de l'échantillon. Pour éviter de recalculer plusieurs fois les mêmes paramètres du filtre, nous proposons ce qui suit.

Si à l'instant n un échantillon est absent, on le prédit à l'aide du filtre de Kalman. Les erreurs de prédiction et les coefficients de réflexion ne sont calculés que lorsque la prédiction de l'échantillon est corrigée, c.-à-d. jusqu'à ce qu'un nouvel échantillon soit disponible. Quand un échantillon est disponible à l'instant $n+t$, le filtre de Kalman corrige la prédiction des échantillons manquants précédents. Nous revenons alors au dernier échantillon disponible à l'instant $n-h$ et calculons toutes les variables du filtre en treillis correspondant aux échantillons absents entre les instants $n-h$ et l'instant courant.

L'algorithme proposé se résume donc à l'instant $n+1$ aux étapes suivantes : La première ligne de la matrice A est remplacée par l'estimation des paramètres à l'instant n . Elle est alors notée A_{n+1} .

$$\begin{aligned} P_{n+1|n} &= A_{n+1} P_{n|n} A_{n+1}^\top + R_\epsilon, \\ \hat{\mathbf{x}}_{n+1|n} &= A_{n+1} \hat{\mathbf{x}}_{n|n} \\ \hat{y}_{n+1|n} &= c_{n+1} \hat{x}_{n+1|n} \end{aligned} \quad (6)$$

Si x_{n+1} est disponible, i.e. $c_{n+1} = 1$,

$$K_{n+1} = P_{n+1|n} \mathbf{c}_{n+1} (\mathbf{c}_{n+1}^\top P_{n+1|n} \mathbf{c}_{n+1})^{-1}, \quad (7a)$$

$$P_{n+1|n+1} = (I_d - K_{n+1} \mathbf{c}_{n+1}^\top) P_{n+1|n}, \quad (7b)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1|n+1} = \hat{\mathbf{x}}_{n+1|n} + K_{n+1} (y_{n+1} - \hat{y}_{n+1|n}) \quad (7c)$$

où $P_{n+1|n}$ et $P_{n+1|n+1}$ sont les matrices de covariance de l'erreur de prédiction *a priori* et *a posteriori*.

La prédiction des données manquantes précédentes jusqu'à l'instant $n-L+1$ sont alors corrigées grâce au filtre de Kalman. On calcule alors les variables du filtre en treillis à partir de la dernière observation à l'instant $n-h$. Ainsi pour tous les instants entre $n-h+1$ et $n+1$, les différents coefficients de réflexions sont calculés grâce aux équations récursives sur l'ordre (3) et (2). Les valeurs des erreurs avant et arrière sont initialisées par la valeur corrigée des prédictions des échantillons manquants, i.e. $\hat{f}_t^{(0)} = \hat{b}_t^{(0)} = \hat{x}_{t|n+1}$. Enfin, les paramètres a_i sont estimés à partir des coefficients de réflexion grâce à l'algorithme de Durbin Levinson.

Par contre si x_{n+1} est manquant, le gain de Kalman est nul $K_{n+1} = 0$. Ainsi l'état prédit n'est pas filtré $\hat{\mathbf{x}}_{n+1|n+1} = \hat{\mathbf{x}}_{n+1|n}$ et la matrice de covariance de l'erreur est conservée *a posteriori* $P_{n+1|n+1} = P_{n+1|n}$. Les paramètres sont donc conservés $\hat{\mathbf{a}}_{n+1}^{(L)} = \hat{\mathbf{a}}_n^{(L)}$.

5 Simulations

Cet algorithme est comparé à celui proposé dans [9] à travers deux expériences. Le signal test utilisé pour la première expérience est un processus AR non stationnaire d'ordre 2 ayant subi une perte d'échantillons dont la probabilité est élevée. Dans l'autre, les deux algorithmes sont appliqués à la reconstruction d'un signal de parole pour différentes probabilités de perte d'échantillons. Leurs performances dans la reconstruction du signal est mesurée en termes du RSB (Rapport Signal sur Bruit de reconstruction) donné par :

$$(SNR) = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2} \right). \quad (8)$$

5.1 Expérience 1

Le signal test utilisé dans cette expérience est un processus AR non stationnaire d'ordre 2 généré sur $15 \cdot 10^3$ échantillons. Les paramètres du signal sont $[1.5, -1]$ pour les premiers $5 \cdot 10^3$ échantillons, $[-0.5, -1]$ pour les prochains $5 \cdot 10^3$ échantillons et finalement $[0.5, -1]$. La probabilité de perte d'échantillon est de $q = 0.7$. Le facteur d'oubli choisi est de $\lambda = 0.99$. La figure 1, montre l'estimation du premier paramètre utilisant les deux algorithmes. Elle montre que l'algorithme proposé offre une convergence plus rapide que l'autre algorithme même pour un nombre élevé d'échantillons absents. Pour des facteurs d'oubli plus faibles, les deux algorithmes convergent comme il se doit plus rapidement, ceci est aux dépens d'une plus grande variance sur l'estimation des paramètres. Les simulations montrent que la vitesse de convergence du Kalman RLS pseudo linéaire dépend du schéma et de la probabilité de perte des échantillons. En effet, cette expérience a été reproduite pour 100 générations du schémas de perte. Le rapport signal à bruit de reconstruction (RSB) obtenu grâce à l'algorithme Kalman RLS pseudo linéaire est 36 fois inférieur à 10 dB alors qu'il l'est une seule fois avec l'algorithme proposé. Ceci est dû à un retard dans la convergence ou à une divergence, ce qui est le cas trois fois.

Par ailleurs, cette figure semble montrer que l'algorithme proposé converge vers une estimation non biaisée des paramètres. Cependant, il existe un biais dû à la minimisation des erreurs de prédiction aux instants où les échantillons sont manquants. Ce biais est d'autant plus faible que a_2 est voisin de l'unité (proche de la zone d'instabilité). De tels signaux correspondent à des filtres résonnants. Ces propriétés de l'algorithme permettent d'envisager une application à la reconstruction de signaux de parole ou de musique. Ceci est le cas de la deuxième expérience.

5.2 Expérience 2

Les deux algorithmes comparés sont appliqués à la reconstruction du signal test usuel 'Mary had a little lamb, its fleece was white as snow' échantillonné à $8kHz$. Ce signal est reconstruit utilisant les deux algorithmes comparés pour différentes probabilités de perte d'échantillons. Pour chaque probabilité de perte, le schémas d'observa-

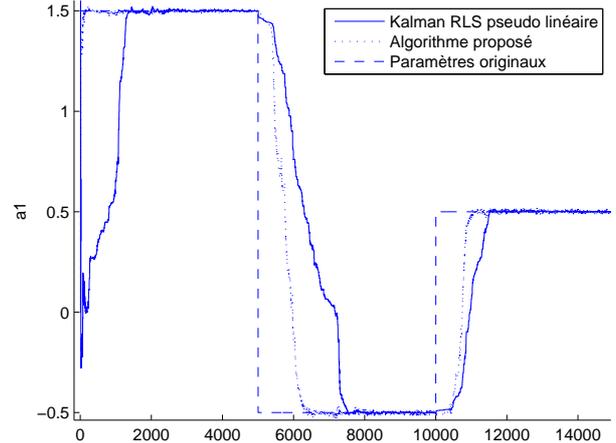


FIG. 1 – Estimation du paramètre a_1 par les deux algorithmes comparés.

tion est régénéré 1000 fois. Ainsi pour chaque algorithme, la moyenne et la variance du RSB sont estimées pour chaque probabilité de perte sur l'ensemble des différents schémas d'observations. La facteur d'oubli utilisé pour les deux algorithmes est de $\lambda = 0.99$. Pour cette valeur du facteur d'oubli, les deux algorithmes offrent de bonnes performances. Le signal de parole est modélisé par un processus AR d'ordre 12.

Les figures 2 et 3 montrent la moyenne et l'écart type du RSB pour chacun des algorithmes en fonction de la probabilité de perte d'échantillons.

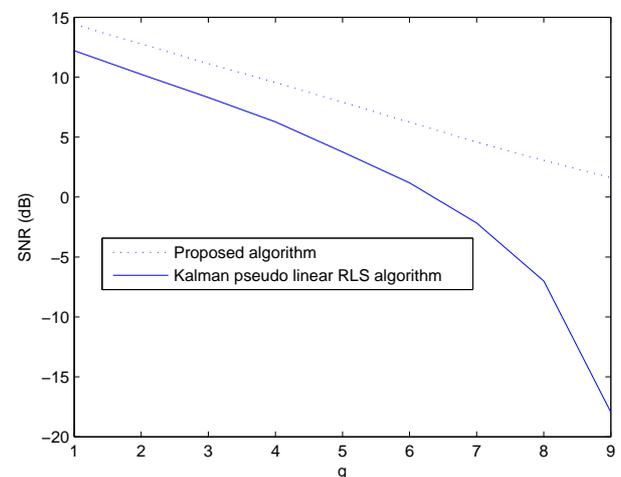


FIG. 2 – RSB moyen en fonction de la probabilité de perte d'échantillons pour l'expérience 2.

La figure 2 montre que l'algorithme proposé offre en moyenne de meilleures performances que celles obtenues grâce à l'autre algorithme en terme d'erreur de reconstruction particulièrement pour les hautes probabilités de perte d'échantillons. Le RSB moyen obtenu grâce à l'algorithme proposé décroît linéairement lorsque la probabilité de perte croît. Par contre, la décroissance du RSB est exponentielle utilisant l'algorithme Kalman RLS pseudo

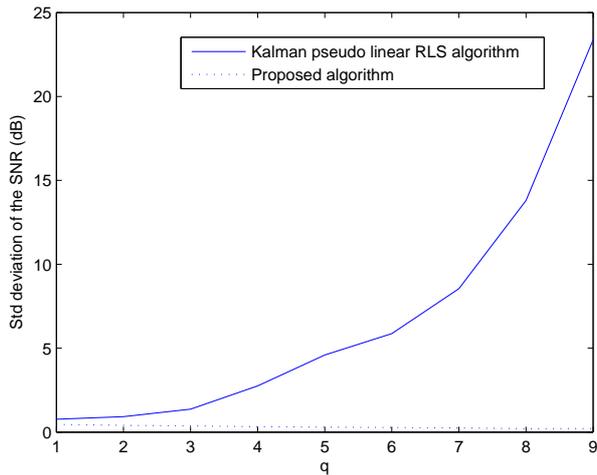


FIG. 3 – Ecart type du RSB en fonction de la probabilité de perte d'échantillons pour l'expérience 2.

linéaire. Ainsi, pour une perte de 70% des échantillons, le RSB obtenu grâce à l'algorithme proposé est supérieur en moyenne de 4.5 dB de celui obtenu grâce au Kalman RLS pseudo linéaire. Cet écart moyen est de 17 dB lorsque 85 % des échantillons sont manquants. Il est à noter ici que le signal reconstruit utilisant l'algorithme proposé est intelligible même lorsque 85 % des échantillons sont manquants aléatoirement.

De plus, la figure 3 montre que l'écart type du RSB obtenu grâce à l'algorithme proposé est négligeable devant celui obtenu utilisant l'autre algorithme. De surcroît, il est presque constant pour toutes les probabilités de perte d'échantillons. Ceci montre la robustesse de l'algorithme proposé aux larges probabilités de pertes d'échantillons ainsi qu'aux schémas d'observation du signal. D'autre part, l'écart type du RSB obtenu grâce à l'autre algorithme croît exponentiellement avec la probabilité de perte. On en conclut que la reconstruction du signal utilisant l'algorithme Kalman RLS pseudo linéaire est fortement dépendante du schémas d'observation pour les probabilités de perte d'échantillons élevées. En effet, un signal de parole n'est pas stationnaire, les paramètres du modèle AR correspondant sont stationnaires pour de faibles durées. Lorsque la probabilité de perte d'échantillons est élevée, l'algorithme Kalman RLS pseudo linéaire n'arrive pas à suivre les variations des paramètres.

6 Conclusion

On propose un nouvel algorithme pour une identification stable adaptative et une reconstruction robuste d'un processus d'AR à échantillons manquants. À notre connaissance, c'est le premier algorithme qui permet un traitement en ligne de signaux à échantillons manquants utilisant une structure de treillis du filtre. Il utilise un algorithme de type RLS adapté au problème d'identification de signaux à échantillons manquants combiné à un filtre de Kalman pour la reconstruction. Cet algorithme garantit la stabilité du modèle identifié. En outre, il est

robuste aux larges probabilités de pertes. De plus, les simulations montrent qu'il offre une convergence rapide et un bon suivi des paramètres pour toutes les probabilités de perte d'échantillons. Cependant, ceci est aux dépens d'un biais d'identification dû à la fonction de coût minimisée par l'algorithme. Cet algorithme a été comparé au Kalman RLS pseudo linéaire l'algorithme citerawad1. Le dernier utilise une réalisation directe du filtre, par conséquent la stabilité du filtre identifié n'est pas garantie. En outre, les simulations montrent que ses performances dépendent fortement du schémas d'observation en particulier pour des probabilités de perte d'échantillons élevées. L'application des deux algorithmes à la reconstruction de signaux de paroles montre l'avantage de l'algorithme proposé en termes d'erreur de reconstruction et en particulier pour des probabilités de perte d'échantillons élevées. Des tests d'écoute approuvent les résultats obtenus. En effet, un signal de parole reconstruit en utilisant l'algorithme proposé reste intelligible même lorsque 85 % des échantillons sont manquants.

Références

- [1] P. Albertos and R. Sanchis and A. Sala, "Output prediction under scarce data operation : control application", *Automatica*, 35, pp. 1671–1681, 1999.
- [2] P. Bondon, "Prediction with incomplete past of a stationary process," *Elsevier, Stochastic processes and their applications*, pp. 67–76, 2002.
- [3] B. Friedlander, "Lattice filters for adaptive processing," in *Proceedings of the IEEE*, vol. 70, No. 8, pp. 829–867, 1982.
- [4] A. Isaksson, "A Recursive EM Algorithm for identification subject to missing data," in *SYSID*, Copenhagen, Denmark, 1994, vol. 2, pp. 679–684.
- [5] J. Makhoul and R. Viswanathan, "Adaptive lattice methods for linear prediction," in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Oklahoma, USA*, April 1978.
- [6] R. Sanchis and P. Albertos, "Recursive identification under scarce measurements - convergence analysis," *Automatica*, vol. 38, pp. 535–544, 2002.
- [7] S. Mirsaidi and G. Fleury and J. Oksman, "LMS Like AR modeling in the case of missing observations," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, No. 6, 1997.
- [8] C. Therrien, "The missing observations theorem and a new proof of Levinson's recursion," in *Proceedings IEEE International Symposium Circuits and Systems, Japan*, pp. 2307–2308, 2005.
- [9] R. Zgheib and G. Fleury and E. Lahalle, "New fast algorithm for simultaneous identification and optimal reconstruction of non stationary AR processes with missing observations," *IEEE Proceedings Twelfth Digital Signal Processing Workshop, Wyoming, USA*, September, 2006.