

Singularité et couleur

Bernard PICINBONO

Laboratoire des Signaux et Systèmes
Supélec, Plateau de Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette, France

bernard.picinbono@lss.supelec.fr

Résumé – On peut obtenir des signaux singuliers en filtrant un bruit blanc symétrique de Bernoulli dans un filtre causal satisfaisant certaines conditions sur la localisation de ses pôles. On étudie sous quelles conditions la singularité peut se conserver quand la blancheur du bruit d'entrée est abandonnée. Les résultats théoriques sont validés par des expériences sur ordinateur.

Abstract – Singular random signals can be obtained at the output of some linear filters when the input is a Bernoulli white noise. It is shown that this whiteness assumption can be relaxed and some examples of colored Bernoulli signals generating singularity by filtering are presented. Computer experiments are realized in order to verify these results.

1 Introduction et historique

On dit qu'une variable aléatoire (VA) est singulière si sa fonction de répartition (FR) $F(x)$ est continue avec une dérivée nulle presque partout. De même un signal aléatoire à temps discret est dit singulier si toutes ses valeurs X_k sont des VA singulières.

Les VA singulières sont souvent considérées comme des curiosités mathématiques sans grand intérêt en théorie du signal. Toutefois l'attention des spécialistes de signal aurait dû être attirée par le résultat suivant connu depuis la moitié du siècle dernier et qui est le point de départ de toute la suite : soit W_k une suite de VA indépendantes et identiquement distribuées (IID) de Bernoulli symétrique, c'est-à-dire ne prenant que les valeurs ± 1 avec les mêmes probabilités, dénommée dans la suite bruit blanc de Bernoulli symétrique. La VA X définie par la série

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} a^k W_k, \quad (1)$$

convergente si $0 < |a| < 1$, est singulière si $0 < |a| < 1/2$ [1]. Il s'agit d'une des séries les plus simples que l'on puisse imaginer, ce qui montre la banalité de la singularité. Ce résultat a été le point de départ d'un très grand nombre de travaux de mathématiques pures jusqu'à aujourd'hui et on peut en trouver l'histoire dans [2]. Mais il a de plus une relation directe avec le traitement du signal. En effet la VA X a la forme de la sortie d'un filtre linéaire exponentiel à temps discret, filtre causal de réponse percussionnelle (RP) $h_k = a^k$, attaqué par un bruit blanc de Bernoulli. Dans le domaine du traitement du signal ces bruits se rencontrent dans les communications numériques et l'apparition de la singularité en traitement du signal a été entrevue de temps à autre [3, 4, 5].

Dans [6] nous avons repris la question du point de vue de la théorie du signal. On a en particulier étudié les conditions que doit satisfaire la RP h_k d'un filtre linéaire causal pour que la sortie soit singulière quand l'entrée est un bruit blanc de Bernoulli. Ceci revient à remplacer dans (1) a^k par h_k . On a en particulier montré que si les pôles du filtre se trouvent à l'intérieur du cercle de singularité, cercle de même centre que le cercle de stabilité mais de rayon $1/2$, la sortie est singulière. Dans

la démonstration la blancheur du signal W_k joue un rôle essentiel, comme d'ailleurs dans celle du résultat fondamental de départ relatif au filtre exponentiel. Il est donc tout à fait naturel de chercher s'il est possible de s'affranchir de cette blancheur, c'est-à-dire d'introduire de la couleur, tout en conservant la singularité. C'est le principal objectif de cette présentation. Afin d'en assurer la simplicité on se limite dans la suite au cas du filtrage exponentiel, la généralisation à d'autres filtres pouvant se faire avec les mêmes méthodes que celles utilisées dans [6].

2 Condition suffisante de singularité

Selon le théorème de décomposition de Lebesgue toute FR $F(x)$ se décompose de manière unique sous la forme

$$F(x) = a_1 F_c(x) + a_2 F_d(x) + a_3 F_s(x), \quad (2)$$

avec $a_i \geq 0$ et $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Les trois fonctions F_i de cette décomposition sont les FR respectivement d'une VA continue, d'une VA discrète et d'une VA singulière. Si l'un des coefficients a_i vaut 1 on dit que $F(x)$ est pure. Par ailleurs le spectre d'une VA est l'ensemble des points de croissance de sa FR $F(x)$ et la mesure spectrale (MS) de X est la mesure de Lebesgue de son spectre. Si la MS est nulle, $a_1 = 0$ et X est alors soit discrète, soit singulière, soit un mélange des deux.

Pour répondre à la question de départ il faut analyser le rôle joué par les trois hypothèses conduisant à la singularité de X : 1. structure du filtre, 2. caractère discret de W_k qui ne prend que les valeurs ± 1 , 3. blancheur de W_k .

La condition sur les pôles du filtre, qui ici s'écrit $|a| < 1/2$, et le caractère discret de W_k assurent la nullité de la MS, ce qui donne $a_1 = 0$. La blancheur assure la nullité de la composante discrète, soit $a_2 = 0$. Il en résulte que $a_3 = 1$, c'est-à-dire que la VA est singulière. Dans le cas où le signal d'entrée est coloré, la seule question à examiner est donc de savoir sous quelles conditions on peut encore avoir $a_2 = 0$, soit l'absence de composante discrète.

Soit X_N la VA

$$X_N = \sum_{k=0}^N h_k a^k, \quad (3)$$

C'est la somme partielle aboutissant à la série (1). Cette VA prend 2^{N+1} valeurs distinctes v_i^N . À chacune de ces valeurs obtenues à l'étape N on peut associer deux valeurs correspondant à l'étape $N+1$ définies par $v_i^N \pm a^{N+1}$. On introduit ainsi comme en [6] un arbre de construction des valeurs possibles de X_N et à chacune des valeurs v_i^N on associe un noeud V_i^N de cet arbre. Il est facile de vérifier que la condition $|a| < 1/2$ assure qu'il n'y a pas de croisement entre les 2^{N+1} branches de l'arbre allant de l'origine V de l'arbre ($v_i^N = 0$ pour $N = -1$) aux 2^{N+1} noeuds V_i^N existant à l'étape N . Il y a donc un chemin unique dans l'arbre menant de V à tout noeud V_i^N , et l'on peut ainsi introduire l'indice $i_k^N(i)$, $0 \leq k \leq N$ définissant le noeud de ce chemin à l'étape k . Ces noeuds correspondent donc aux valeurs $v_{i_k^N(i)}^k$. De même on peut montrer que l'ensemble des valeurs possibles de X est de mesure nulle. À chaque noeud V_i^N on associe une probabilité $p_N(i)$ définie par

$$p_N(i) \triangleq P[X_N = v_i^N], \quad 1 \leq i \leq 2^{N+1}. \quad (4)$$

Il est évident que lorsque les W_k sont des VA IID de Bernoulli symétriques, ces probabilités valent $2^{-(N+1)}$ et tendent donc toutes vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. C'est cette propriété qui assure l'absence de composante continue ($a_2 = 0$) dans $F(x)$ puisqu'il ne peut exister de valeur possible v^∞ de X ayant une probabilité finie. Pour étendre ce résultat au cas coloré il faut une méthode permettant soit de calculer les probabilités $p_N(i)$ soit à défaut d'en trouver une borne supérieure.

Pour le calcul des $p_N(i)$ on introduit les probabilités de transition dans l'arbre définies par

$$p_N(i, j) \triangleq p_N[X_N = v_i^N | X_{N-1} = v_j^{N-1}]. \quad (5)$$

Elles satisfont évidemment $\sum_{i=1}^{2^{N+1}} p(i, j) = 1$. Cependant on rappelle que tout noeud V_j^{N-1} de l'arbre engendre seulement deux noeuds V_i^N caractérisés par les indices $i_+(j)$ and $i_-(j)$ et donc associés aux valeurs $v_{i_\pm}^N(j) = v_j^{N-1} \pm a^N$. En conséquence pour un j donné il n'y a que deux termes dans la somme précédente et l'on a

$$p_N[i_+(j), j] + p_N[i_-(j), j] = 1. \quad (6)$$

Il résulte également de l'absence de croisement des branches de l'arbre de construction qu'il n'y a pas de noeuds doubles, ce qui signifie que tout noeud V_i^N à l'étape N est atteint par une seule branche provenant d'un seul noeud à l'étape $N-1$ dénommé $V_{j(i)}^{N-1}$. En conséquence $p_N(i, j)$ est nulle sauf si $j = j(i)$, ou s'écrit $p_N(i, j) \delta[j - j(i)]$, $\delta[k]$ étant le symbole de Kronecker delta valant 1 pour $k = 0$ et 0 dans le cas contraire. Ainsi le seul $p_N(i, j)$ non nul peut s'écrire

$$q_N(i) \triangleq p_N[i, j(i)], \quad (7)$$

valable pour $N > 0$, avec en plus $q_0(i) = 1/2$.

On déduit donc des formules précédentes que la probabilité $\pi(i, j) = p_N[(x_N = v_i^N) \cap (x_{N-1} = v_j^{N-1})]$ vaut

$$\pi(i, j) = p_{N-1}(j) \cdot p_N(i, j) \delta[j - j(i)]. \quad (8)$$

Par une sommation sur j , qui ne contient d'ailleurs qu'un seul terme, on déduit

$$p_N(i) = p_{N-1}[j(i)] q_N(i). \quad (9)$$

On a donc une forme récursive sur le paramètre N et en l'appliquant à chaque noeud du trajet unique allant de V à V_i^N on obtient

$$p_N(i) = \prod_{k=0}^N q_k[i_k^N(i)] = \prod_{k=0}^N p_N\{i_k^N(i), j[i_k^N(i)]\}. \quad (10)$$

Il est facile de voir que ces probabilités sont bien normées. Quand les VA W_k sont IID on a évidemment $q_N[i_k^N(i)] = 1/2$, et l'on retrouve que toutes les valeurs v_i^N ont la même probabilité $1/2^{N+1}$.

Cette formule est la base de ce qui va suivre. En effet si la MS de X est nulle, ce qui arrive dès que $|a| < 1/2$, et si les $p_N(i)$ tendent vers 0 quand N tend vers l'infini, il n'y a pas de valeur possible de X avec une probabilité finie, ce qui signifie que la composante discrète de $F(x)$ est nulle, soit $a_2 = 0$, et il en résulte que X est singulière.

En particulier une condition suffisante assurant cette singularité est évidemment

$$0 < q_N(i) < B < 1. \quad (11)$$

3 Relations avec la couleur

La couleur étant une propriété fréquentielle, ou temporelle par dualité, il importe de transformer les probabilités de transition dans l'arbre apparaissant dans (10) et définies par (5) en probabilités de transition dans le temps. Pour ceci on introduit le vecteur \mathbf{W}_N de composantes W_0, W_1, \dots, W_N qui correspond à une suite de ± 1 . Il résulte de l'unicité du trajet dans l'arbre entre V et V_i^N qu'il y a une correspondance biunivoque entre chaque valeur possible v_i^N de X_N et un vecteur \mathbf{w}_N bien défini. Soit $\mathbf{w}_{N-1}(j)$ le vecteur associé ainsi au noeud v_j^{N-1} . Dans ces conditions les seules probabilités de transition (5) non nulles se limitent aux deux probabilités

$$p_N[i_{\pm 1}(j), j] = P[W_N = \pm 1 | \mathbf{w}_N(j)]. \quad (12)$$

On voit donc apparaître les probabilités d'une valeur du signal W_k à l'instant N conditionnellement au passé qui sont directement liées au problème de la prédiction d'un signal à un pas et passé infini et également au caractère Markovien. C'est cette seconde propriété que nous allons commencer à approfondir. Un signal W_k est dit Markovien d'ordre P s'il peut s'écrire

$$W_k = f(W_{k-1}, W_{k-2}, \dots, W_{k-P}, \mathbf{B}_k), \quad (13)$$

où \mathbf{B}_k est un bruit blanc vectoriel. La fonction $f(\cdot)$ et le bruit \mathbf{B}_k doivent satisfaire des conditions assurant que W_k soit un signal de Bernoulli symétrique. Il est clair que W_k n'est pas blanc. Il est facile de construire des exemples de tels signaux et on le fera dans la suite. Ainsi la DDP conditionnellement à tout le passé ne dépend en fait que d'un passé d'ordre N , ce qui peut s'exprimer sous la forme

$$p_N[i_{\pm}(j), j] = P[W_N = \pm 1 | w_{N-1}, \dots, w_{N-P}]. \quad (14)$$

Mais comme les quantités w_k ne prennent que les valeurs ± 1 il n'y a que 2^P valeurs distinctes de $p_N[i_{\pm}(j), j]$ et si aucune d'elles n'est égale à 1, ce qui est le cas le plus courant, la condition (11) est satisfaite et il en résulte que X est une VA singulière bien que W_k soit coloré.

L'introduction de la couleur permet de comprendre pourquoi la condition $|a| < 1/2$ qui assure la nullité de la MS de X est

insuffisante pour en assurer la singularité. En effet on peut très bien avoir $a_2 = 1$, ce qui signifie que X est une VA discrète. Le meilleur exemple apparaît quand W_k est un signal de Bernoulli symétrique *prédictible avec un passé fini*. Ceci se produit si dans (13) le bruit \mathbf{B}_k est nul. En raison de la stationnarité ceci donne $W_k = h(W_0, W_1, \dots, W_{P-1})$ et il en est de même de X . Comme les W_k ne prennent que deux valeurs distinctes, X ne prend au maximum que 2^P valeurs distinctes. C'est donc une VA discrète. Le meilleur exemple d'un tel signal est $W_k = W_0(-1)^k$, où W_0 est Bernoulli symétrique. Il est évidemment de même de W_k . Il est clair que ce signal n'est pas blanc et sa fonction de corrélation est $(-1)^{|k|}$ qui introduit un spectre de raies et une corrélation à longue portée. On voit alors que X est une VA discrète ne prenant que les valeurs $\pm 1/(1+a)$ avec les mêmes probabilités.

Enfin la FR de X peut être un mélange d'une composante discrète et singulière. On en présente un exemple expérimental dans le paragraphe suivant.

4 Expériences

Les résultats expérimentaux présentés ci-dessous sont obtenus par le même type de méthode que ceux décrites dans [6]. Partant d'un signal de Bernoulli W_k , blanc ou non, on le transforme par filtrage exponentiel en un signal X_k dont on prend un très grand nombre d'échantillons (de l'ordre de 10^7) que l'on analyse par des histogrammes à effet d'échelle.

Reprenons très brièvement toutes ces étapes. Engendrer par ordinateur une suite de VA de Bernoulli symétriques IID ne pose aucun problème. Introduire une corrélation tout en conservant la distribution est un peu plus complexe et l'on a choisi ici la méthode suivante. Soit U_k un bruit blanc ne prenant que les valeurs 0 ou 1 avec respectivement les probabilités $1-p$ et p et V_k un autre bruit blanc indépendant du précédent et de Bernoulli symétrique. Soit alors le signal

$$W_k = U_k W_{k-1} + \bar{U}_k V_k, \quad (15)$$

où $\bar{U}_k = 1 - U_k$. Il est markovien d'ordre 1 et il a la forme (13) avec $P = 1$ et $\mathbf{B}_k = [U_k, V_k]$.

Il est évident que si W_{k-1} est une VA de Bernoulli symétrique, il en est de même pour W_k . En fait on peut montrer que, quelle que soit la valeur initiale W_1 , W_k tend à devenir une VA de Bernoulli symétrique. De plus sa fonction de corrélation vaut $\gamma_k = p^{|k|}$. Cette fonction de corrélation exponentielle se rencontre très fréquemment dans le cas des signaux markoviens d'ordre un. Pour $p = 0$, $U_k = 0$, et W_k est le bruit blanc V_k avec une fonction de corrélation nulle. Par ailleurs si $p = 1$, $U_k = 1$ et $W_k = W_1$, ce qui introduit un signal constant avec une fonction de corrélation à portée infinie.

Pour réaliser le filtrage à RP exponentielle de W_k on utilise la forme récursive du filtrage d'ordre 1 définie par la relation $X_k = aX_{k-1} + W_k$ où W_k est donné par (15). On obtient ainsi par deux récurrences très simples les échantillons du signal X_k qui sont analysés par histogrammes à effet d'échelle.

Un histogramme uniforme des valeurs des échantillons X_k est défini par un intervalle d'analyse et par le nombre de cellules conjointes et de même largeur en lesquelles cet intervalle est découpé. Lorsque ce nombre est très grand la largeur des cellules tend vers 0 et l'histogramme donne une estimation de

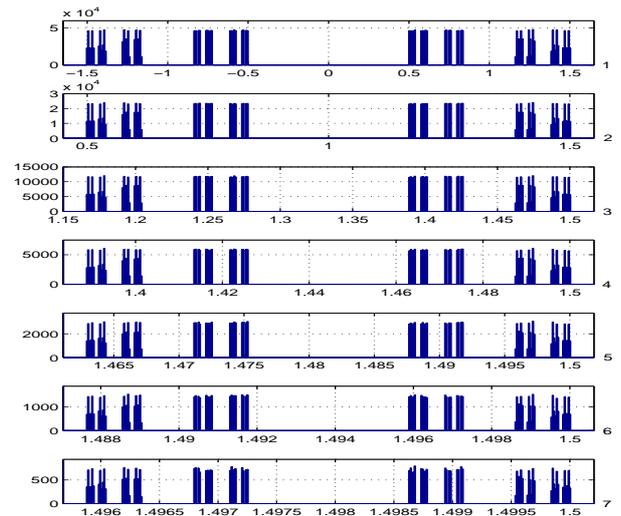


Figure 1

la DDP commune à tous les échantillons analysés. Comme la singularité concerne précisément la DDP on peut penser que les histogrammes sont un outil de choix d'analyse. Mais faire tendre vers 0 la largeur des cellules sans autre condition n'a pas a priori d'intérêt puisque la DDP étant théoriquement nulle presque partout l'histogramme n'enregistre aucun élément.

Il faut utiliser les histogrammes à effet d'échelle en s'inspirant de l'arbre de construction des valeurs successives utilisées ci-dessus.

L'idée consiste à analyser le même ensemble d'échantillons du signal X_k à l'aide d'une série d'histogrammes dont les centres se trouvent à des noeuds de l'arbre de construction correspondant à des étapes N croissantes. Il est facile de voir que les valeurs possibles de X construites à partir de branches issues d'un noeud v_i^N se trouvent dans un intervalle centré en ce point et de largeur $2a^{N+1}/(1-a)$, $N \geq -1$. On a donc en faisant croître N une série d'intervalles de plus en plus petits mais tous divisés en 400 cellules et l'on mesure le nombre d'échantillons tombant dans chacune de ces cellules. Ces nombres diminuent évidemment rapidement quand N croît, ce qui donne la limite de ce nombre.

Sur la figure 1 on représente sept histogrammes successifs à des échelles de plus en plus fines dans le cas où W_k est blanc et pour $a = 1/3$. Le premier histogramme correspondant à $N = -1$ est en fait l'histogramme complet des valeurs prises par les échantillons de X_k . Comme attendu il est symétrique par rapport à 0 et les valeurs extrêmes sont $\pm 1/(1-a) = \pm 1,5$. L'histogramme suivant est centré au point 1 et s'étend de 0,5 à 1,5, et ainsi de suite pour les suivants. L'effet d'échelle est de l'ordre de 800, rapport entre les extensions du premier et du dernier histogramme. Le nombre d'échantillons enregistrés par cellule décroît, comme annoncé, passant de l'ordre de 5.10^4 à 700. Malgré cette analyse de plus en plus fine la forme des histogrammes reste la même et l'on peut prolonger par la pensée le résultat jusqu'à l'infini. Il met en évidence un caractère fractal, caractéristique de la singularité.

Sur la figure 2 on reprend les expériences exactement dans les mêmes conditions mais en prenant des W_k corrélés selon

le modèle markovien (15). Le paramètre du filtrage est toujours $a = 1/3$, et celui du modèle est $p = 1/2$. Deux faits apparaissent clairement. Le caractère fractal demeure, ce qui indique à nouveau la singularité. Par contre les nombres d'échantillons mesurés par cellules des histogrammes ne sont plus approximativement constants, comme sur la figure 1. Bien que le calcul soit très compliqué ce résultat peut aussi se prévoir théoriquement.

Sur les figures 3 et 4 on analyse le mélange entre distributions discrètes et singulières. On suppose que W_k est, avec une probabilité α , égal à $W_0(-1)^k$ ou, avec une probabilité $1 - \alpha$, est un bruit blanc de Bernoulli symétrique indépendant de W_0 qui est aussi une VA de Bernoulli symétrique. La fonction de corrélation est évidemment $\gamma_k = \alpha(-1)^k + (1 - \alpha)\delta[k]$ et la FR de X est $F(x) = \alpha F_a(x) + (1 - \alpha)F_s(x)$, et elle est donc un mélange de composantes discrète et singulière. Les résultats expérimentaux sont présentés comme précédemment pour $a = 1/3$, ce qui entraîne la nullité de la MS de X , et $\alpha = 1/2$. Il en résulte que X peut prendre les valeurs $\pm 0,75$ avec la probabilité 0.25. Sur la figure 3 on présente des histogrammes à effet d'échelle comme sur les figures précédentes. On voit bien apparaître une raie pour les valeurs $\pm 0,75$. Pour voir si la raie n'est pas un artefact expérimental on présente sur la figure 4 des histogrammes isolant le point 0,75 avec une fenêtre d'analyse de plus en plus petite. S'il y a bien une composante discrète le nombre d'échantillons mesurés dans ces fenêtres successives ne doit pas varier, et c'est ce qui apparaît sur la figure. De plus ce nombre est égal à 2.500, ce que prévoit la théorie. En effet les quatre expériences sont réalisées avec 10^6 échantillons et comme la probabilité pour que X prenne la valeur 0,75 est de 0,25, ceci donne bien approximativement 2.500 échantillons dans la fenêtre de l'histogramme centrée sur 0,75. Cet exemple illustre bien que la nullité de la MS assurée par la valeur $a = 1/3$ n'entraîne pas nécessairement la singularité lorsque le bruit d'entrée de Bernoulli n'est plus blanc.

Références

- [1] Lukacs E., *Characteristic Functions*, London, U.K.: Griffin, 1970.
- [2] Solomyak B., Peres Y., and Schlag W., "Sixty years of Bernoulli convolutions," *Fractal and Stochastics II*, C. Bandt, S. Graf and M. Zähle, eds, *Progress in Probability*, 46, pp. 39-65, Birkhäuser, 2000.
- [3] Wittke P., Smith W., Campbell L. "Infinite series of interference variables with Cantor-type distributions," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 34, pp. 1428-1436, November 1988.
- [4] Naraghi-Pour M. and Neuhoff D. "On the continuity of the stationary state distribution of DPCM," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 36, pp. 305-311, March 1990.
- [5] Smith W., Wittke P., Campbell L. "Error probabilities on fading channels with intersymbol interference and noise," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 39, pp. 1598-1607, September 1993.
- [6] Picinbono B. and Tournet J.-Y., "Singular random signals," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53-12, pp. 499-504, February 2005.

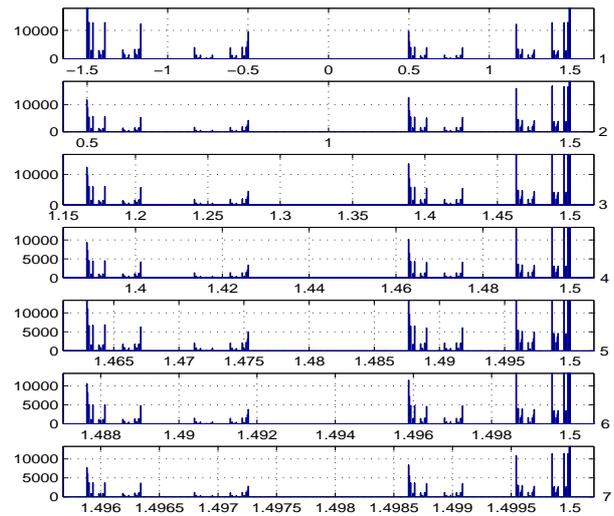


Figure 2

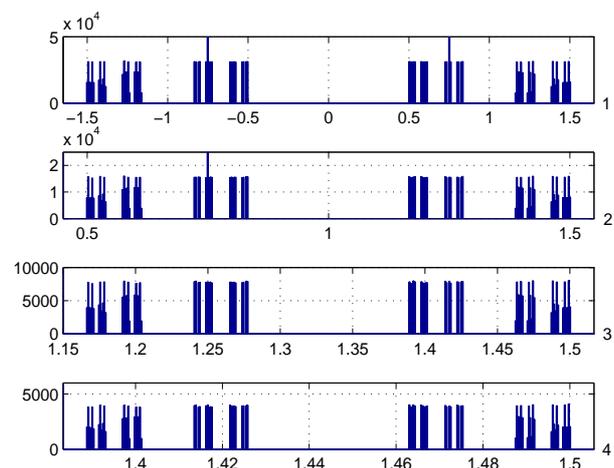


Figure 3

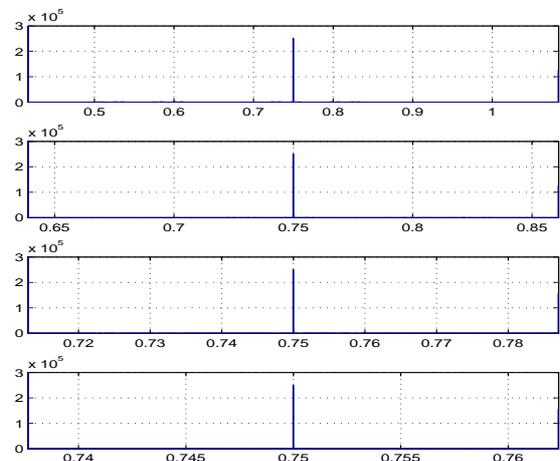


Figure 4