

# Estimation du taux de coupure d'une liaison radio MIMO dans un canal de Nakagami avec effet de masque

Philippe MARY<sup>1,2</sup>, Mischa DOHLER<sup>1</sup>, Jean-Marie GORCE<sup>2</sup>, Guillaume VILLEMAUD<sup>2</sup>, Marilyn ARNDT<sup>1</sup>

<sup>1</sup>France Telecom R&D,  
28 Chemin du vieux chêne, BP 98, 38243 Meylan Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire CITI INSA de Lyon  
Bâtiment Léonard de Vinci  
21 Avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne Cedex, France  
philippe1.mary@orange-ftgroup.com, mischa.dohler@orange-ftgroup.com  
jean-marie.gorce@insa-lyon.fr, guillaume.villemaud@insa-lyon.fr  
marylin.arndt@orange-ftgroup.com

**Résumé** – Dans cet article, nous nous intéressons au problème de la probabilité de coupure symbole (PCS) définie comme la probabilité d'observer une certaine probabilité d'erreur symbole (PES) dans un canal à évanouissement plat et en présence d'effet de masquage long terme (shadowing). Nous considérons un système multi-antennaire à l'émission et à la réception (MIMO) dans un environnement présentant simultanément des évanouissements rapides (canal de Nakagami), et un effet de masque long terme de type log-normal. Notre contribution consiste dans l'obtention d'une nouvelle approximation simple et très précise de la probabilité d'erreur d'un signal à modulation de phase à M états (MDP-M), qui facilite la dérivation de la PCS en présence d'effet de masquage log-normal.

**Abstract** – In this paper, we address the problem of finding a tractable expression of symbol error outage (SEO) defined as the probability that the symbol error probability (SEP) exceeds a certain threshold over a fading channel in a shadowing environment. We consider a multiple-input multiple-output (MIMO) system in a Nakagami-m fading channel with lognormal shadowing. Our contribution is two-fold: 1) a simple tight approximation of the SEP for M-ary phase shift Keying (M-PSK) over a frequency-flat Nakagami-m fading channel is derived which 2) allows the derivation of a tight approximation of the SEO in presence of lognormal shadowing

## 1 Introduction

La PES est l'un des critères les plus pertinents pour l'analyse des performances des systèmes de radiocommunications et donc l'un des plus largement étudiés. Afin de limiter les campagnes intensives de simulation, complexes et consommatrices de temps, un effort de recherche important a été consacré à l'obtention de formes exactes de la PES ou tout au moins, de bornes supérieures et/ou inférieures. De nombreux travaux proposent de telles expressions pour des canaux à évanouissement rapide [1], [2].

Cependant, le signal radio d'un système de communication, de type cellulaire par exemple, n'est pas seulement soumis à des évanouissements court terme dus à la propagation multi-trajets, mais également à des effets de masquage plus long terme. A cause des fluctuations de la puissance moyenne reçue, la PES ne peut être garantie inférieure strictement à un seuil tout au long d'une communication. La probabilité de coupure (PC) se définit comme la probabilité que la PES moyenne dépasse un certain seuil. L'effet de masque fait varier le rapport signal à bruit moyen au récepteur plus lentement que les effets d'évanouissements [8]. La station de base pourrait se servir de la connaissance de la probabilité de coupure dans une configuration donnée afin d'ajuster la puissance

d'émission pour que le terminale puisse avoir un taux d'erreur symbole (TES) cible permettant à son application de fonctionner.

Pour obtenir une expression analytique de la PC en fonction du seuil de PES et des paramètres de masquage, l'expression du rapport signal à bruit (RSB) par symbole en fonction de la PES est nécessaire. Cela nécessite d'inverser l'expression de la PES. Si une telle inversion est réalisable numériquement, l'expression analytique exacte correspondante n'existe pas, même pour les modulations les plus conventionnelles. Certaines approximations proposées antérieurement ont permis d'établir des bornes pour la PC dans le cas d'une détection cohérente dans un canal de Rayleigh non-sélectif en fréquence et en présence d'effet de masque [3].

Dans cet article, nous nous intéressons à un système MIMO à codage blocs orthogonaux avec réception cohérente d'un signal MDP-M. Par rapport à l'état de l'art antérieur i) nous proposons une nouvelle approximation précise de la PES pour tous les RSB en utilisant la méthode de Laplace des fonctions hypergéométriques et ii) nous obtenons une approximation très précise pour la PCS en présence d'effet de masque et pour des systèmes MIMO à codage blocs orthogonaux ce qui étend les résultats disponibles en canal de Rayleigh.

Dans la deuxième partie, nous introduisons les hypothèses sur le canal MIMO utilisé. Dans une troisième partie nous donnons l'approximation de Laplace pour la fonction hypergéométrique de Gauss, qui permet de trouver une approximation de la PES pour un signal à modulation de phase à deux états (MDP-2), ce qui étend les résultats d'un système mono-antenne considéré en [4]. Dans la quatrième partie nous considérons un signal MDP-M, et donnons une approximation inversible de la PES, ce qui permet de remonter au RSB moyen par symbole et donc de déterminer la probabilité de coupure sous sa forme exacte.

## 2 Modèle du système

Soit un système MIMO à  $n_T$  antennes à l'émission et  $n_R$  antennes à la réception. Lorsqu'un récepteur à maximum de vraisemblance est utilisé, le RSB instantané par symbole après le décodage bloc spatio-temporel est [5] :

$$\gamma_{STBC} = \frac{\|\mathbf{H}\|_F^2}{n_T R} \bar{\gamma}_s, \quad (1)$$

avec  $\|\mathbf{H}\|_F^2$  le carré de la norme de Frobenius<sup>1</sup> de la matrice canal  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{n_R \times n_T}$ ,  $\bar{\gamma}_s = \frac{E_s}{N_0}$  le RSB moyen par symbole par antenne à l'entrée du récepteur, avec  $E_s$  l'énergie symbole et  $N_0$  la densité spectrale mono latérale du bruit. Enfin,  $R$  est le taux de codage du code espace-temps, dans la cas Alamouti il vaut 1. On suppose que les coefficients du canal entre chaque paire d'antennes  $h_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq n_R$  et  $1 \leq j \leq n_T$ ) sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d). Le gain du canal entre la  $j$ -ème antenne d'émission et la  $i$ -ème antenne de réception est noté  $\alpha_{i,j}$  et suit une loi de Nakagami :

$$p_{\alpha_{i,j}}(\alpha) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \alpha^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega}\alpha^2}, \quad \alpha \geq 0, m \geq 0.5, \quad (2)$$

avec  $m$  le paramètre d'évanouissement, considéré comme identique pour chaque paire d'antennes.  $\Omega = E[\alpha^2]$ , la puissance moyenne entre la  $j$ -ème et  $i$ -ème antenne. Les phases des coefficients complexes du canal  $\{\phi_{i,j}\}$  sont supposées i.i.d sur  $[0, 2\pi)$ . Dans ces conditions  $\|\mathbf{H}\|_F^2$  est la somme de  $n_T n_R$  variables gamma identiquement distribuées et la fonction génératrice des moments (FGM) du RSB instantané en sortie de traitement est [5] :

$$M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d}(-s) = \left(1 + s \frac{\bar{\gamma}_s}{mn_T R}\right)^{-q}, \quad (3)$$

avec  $q = mn_T n_R$ .

<sup>1</sup>Le carré de la norme de Frobenius d'une matrice  $\mathbf{A}$   $p \times q$  est défini comme

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 \triangleq \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^H) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |a_{i,j}|^2$$

où  $\text{tr}(\cdot)$  et  $H$  correspondent à l'opérateur trace et hermitien respectivement.

## 3 Approximation de Laplace de la PES d'un signal MDP-2

Dans un soucis de clarté, nous rappelons la PES exacte d'un signal MDP-2 pour un système MIMO à codage blocs orthogonaux en canal de Nakagami en terme de fonction hypergéométrique de Gauss. Nous introduisons l'approximation de Laplace pour cette fonction, ainsi que son expression asymptotique à RSB élevé.

### 3.1 Approximation de Laplace

La PES exacte d'un signal MDP-2 est donnée par [5] :

$$P_s(E|\bar{\gamma}_s) = \frac{(2q)! M_{\gamma_{STBC}}(-1)}{2(2^q \cdot q!)^2} {}_2F_1\left(q, \frac{1}{2}; q+1; x\right), \quad (4)$$

avec  $x = 1/(1 + \bar{\gamma}_s/(mn_T R))$  et  $m$  entier. Cette hypothèse ne réduit en rien la généralité de nos développements.  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  est la fonction hypergéométrique de Gauss [6]. Si (4) est exacte et directement utilisable, elle est malheureusement non inversible. Une idée intéressante pour approcher (4) est d'utiliser la méthode de Laplace [7]. Celle-ci consiste à écrire la fonction hypergéométrique sous une forme intégrale (forme d'Euler), puis à choisir deux fonctions  $h$  et  $g$  permettant d'utiliser l'approximation de Laplace. En suivant les étapes données dans [7], nous obtenons l'approximation suivante pour la PES d'un signal MDP-2 :

$$P_s(E|\bar{\gamma}_s) = \frac{(2q)!(q+1)^{q+1/2} (yx)^q (1-y)}{2(2^q q!)^2 q^q \sqrt{r(1-xy)}}. \quad (5)$$

Les variables  $r, y$  sont données dans [4] en remplaçant  $m$  par  $q$ . L'approximation obtenue en (5) pour un système MIMO à codage blocs orthogonaux est la plus fine connue à ce jour. Elle possède une erreur moyenne inférieure à 0.94% dans le domaine de RSB d'intérêt correspondant à une PES comprise entre  $10^{-1}$  et  $10^{-4}$  pour des systèmes sans codage. Dans [4] les auteurs illustrent la précision de cette borne pour un signal MDP-2, en canal de Nakagami pour un système mono antenne (SISO).

### 3.2 Expression asymptotique de la PES

La nouvelle expression obtenue en (5) permet d'éviter le calcul de la fonction hypergéométrique de Gauss, mais n'est pas inversible. Dans [4], les auteurs donnent le comportement des différents termes en (5) lorsque  $x \rightarrow 0$  c'est-à-dire  $\bar{\gamma}_s \rightarrow \infty$  et nous obtenons :

$$P_s(E|\bar{\gamma}_s \rightarrow \infty) = K \frac{x^q}{\sqrt{1-xy}}, \quad (6)$$

où  $K = (2q)!/2/(2^q q!)^2$  et  $\hat{y} = q/(q+1)$ .

Nous venons de proposer une approximation très fine de la PES pour un signal MDP-2. Dans la prochaine partie, nous étendons cette approche à un signal MDP-M.

## 4 Extension aux signaux MDP-M

Dans ce cas plus général, la valeur de la PES est plus compliquée et s'écrit [5] :

$$P_s(E|\bar{\gamma}_s) = M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d}(-g_{PSK}) \left\{ K {}_2F_1 \left( \left( q, \frac{1}{2}; q+1; x \right) + \frac{\sqrt{1-g_{psk}}}{\pi} F_1 \left( \frac{1}{2}, q, \frac{1}{2}-q; \frac{3}{2}; u, v \right) \right\}, \quad (7)$$

avec  $x = 1/(1+g_{psk}\bar{\gamma}_s/(mn_T R))$ ,  $g_{PSK} = \sin^2(\pi/M)$ ,  $M$  est l'ordre de la modulation,  $F_1(a, b, b'; c; u, v)$  est la fonction hypergéométrique d'Appell de première espèce [6]. De plus,  $u = (1-g_{PSK})/(1+g_{PSK}\bar{\gamma}_s/(mn_T R))$ ,  $v = 1-g_{PSK}$ . Nous savons trouver une approximation de la fonction hypergéométrique de Gauss. Pour inverser la probabilité d'erreur d'un signal MDP-M, il s'agit de trouver une approximation de la fonction hypergéométrique d'Appell. Celle-ci peut s'exprimer sous forme intégrale, et on peut naturellement penser à approcher la fonction par la méthode de Laplace. Plusieurs raisons, comme la phase de calibration [7], font que cette approche n'est pas très efficace. Une autre approche consiste en l'utilisation d'une relation fonctionnelle sur les fonctions hypergéométriques d'Appell [6] et on obtient ici :

$$F_1 \left( \frac{1}{2}, q, \frac{1}{2}-q; \frac{3}{2}; u, v \right) = (1-u)^{-1/2} \times F_1 \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}-q; \frac{3}{2}; u', v' \right), \quad (8)$$

avec  $u' = -(1-g_{PSK})/(g_{PSK}(1+\bar{\gamma}_s/(mn_T R)))$  et  $v' = g_{PSK}\bar{\gamma}_s(1-g_{PSK})/(mn_T R g_{PSK}(\bar{\gamma}_s/(mn_T R) + 1))$ .

### 4.1 Expressions asymptotiques

On sait que la fonction hypergéométrique d'Appell se réduit à une fonction hypergéométrique de Gauss si l'une des deux variables  $u'$  ou  $v'$  est nulle [6]. En régime asymptotique, au fort RSB,  $u' \rightarrow 0$  et  $v' \rightarrow v$  :

$$F_1 \left( \frac{1}{2}, q, \frac{1}{2}-q; \frac{3}{2}; u, v \right) \rightarrow (1-u)^{-1/2} {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}-q; \frac{3}{2}; v \right) \quad (9)$$

L'équation (9) fait intervenir une fonction hypergéométrique de Gauss mais indépendante de  $\bar{\gamma}_s$  donc constante. Finalement, la PES asymptotique s'écrit :

$$P_s(E|\bar{\gamma}_s \rightarrow \infty) = x^q \left\{ \frac{K}{\sqrt{1-x\hat{y}}} + \frac{\sqrt{v}}{\pi} \frac{Q}{\sqrt{1-u}} \right\}, \quad (10)$$

avec  $Q = {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}-q; \frac{3}{2}; v \right)$ . Nous pouvons encore simplifier l'expression en (10). En effet,  $u$  est peu différent de  $x$  pour des ordres de modulation grands. De plus  $\hat{y}$  est peu différent de 1 lorsque  $m$  devient grand et pour des systèmes MIMO de taille raisonnable,  $2 \times 2$  ou  $3 \times 3$

par exemple. Une très bonne approximation de (10) est donnée par :

$$P_s(E|\bar{\gamma}_s \rightarrow \infty) \approx x^q \left\{ \frac{K}{\sqrt{1-x\hat{y}}} + \frac{\sqrt{v}}{\pi} \frac{Q}{\sqrt{1-x\hat{y}}} \right\}. \quad (11)$$

En fait, (11) constitue successivement une borne inférieure puis supérieure de (10). Le passage étant lorsque  $\hat{y} = 1 - g_{PSK}$ . Sur la figure 1 on remarque que l'approximation asymptotique dérivée en (11) est précise sur une large plage de RSB.

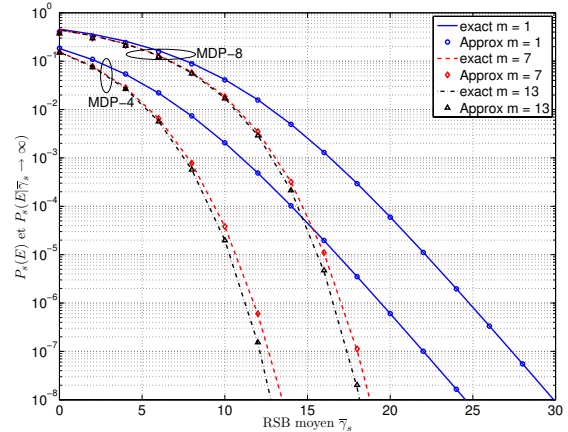


FIG. 1 – Approximation de la PES d'un système MIMO  $2 \times 2$  avec l'équation (11), pour une modulation MDP-4 et MDP-8.

## 4.2 Inversion de la PES et probabilité de coupure

### 4.2.1 Inversion de la PES

En élevant au carré (11) et en considérant la PES cible  $P_s^*$  :

$$\left( K + \frac{\sqrt{v}}{\pi} Q \right)^2 x^{2q} + (P_s^*)^2 \hat{y} x - (P_s^*)^2 \approx 0. \quad (12)$$

Si on considère que pour les faibles valeurs de la PES  $(P_s^*)^2 \hat{y} x \approx 0$  alors :

$$x \approx \tilde{x} = \sqrt[q]{\frac{P_s^*}{K + \frac{\sqrt{v}}{\pi} Q}}. \quad (13)$$

On résout (12) en considérant le terme du milieu comme constant et en remplaçant  $x$  par sa valeur (13) :

$$\bar{\gamma}_s(P_s^*) = \frac{mn_T R}{g_{psk}} \left[ \left[ \tilde{x}^{2q} \sqrt{1-\hat{y}\tilde{x}} \right]^{-1} - 1 \right]. \quad (14)$$

### 4.2.2 Approximation de la PCS

En présence d'effet de masquage, le RSB moyen par symbole  $\bar{\gamma}_s$  est aléatoire et varie plus lentement que les évanouissements rapides dus aux trajets multiples [8]. Un taux d'erreur symbole (TES) moyen ne peut être garanti tout au long d'une communication à cause de la fluctuation de la puissance moyenne du canal sur le long terme.

La PCS se définit comme la probabilité que la PES excède un certain seuil  $P_s^*$  soit  $P_s(C) = Pr(P_s(E|\bar{\gamma}_s) > P_s^*)$ . En présence d'effet de masqué,  $\bar{\gamma}_s$  suit une loi log-normale de paramètres  $\mu_{dB}$  et  $\sigma_{dB}$ . Dans le cas considéré où les effets courts termes du canal ont été moyennés indépendamment, la PCS peut se dériver sous forme exacte [3] :

$$P_s(C) = Q\left(\frac{\mu_{dB} - 10 \log_{10} \bar{\gamma}_s(P_s^*)}{\sigma_{dB}}\right), \quad (15)$$

avec  $Q(x)$  la fonction gaussienne, et où  $\bar{\gamma}_s(P_s^*)$  est le RSB moyen par symbole nécessaire pour atteindre la PES cible. Alors que l'inversion numérique de (7) est fastidieuse, (14) est facilement applicable et conduit à une approximation simple et précise de la PCS en canal de Nakagami et en présence d'effet de masquage.

Sur la figure 2 nous avons illustré la PCS pour une PES cible de  $10^{-2}$  en fonction de la moyenne de l'effet de masquage  $\mu_{dB}$ . L'écart type de la loi log-normale est  $\sigma_{dB} = 12\text{dB}$  qui est la valeur typique en intérieure. La PCS est donnée pour différentes valeurs du paramètre d'évanouissement  $m$ , pour un système MIMO  $2 \times 2$  et pour un signal MDP-4 et MDP-8. On peut remarquer que l'inversion numérique exacte de (7) et l'approximation de la PCS avec (15) grâce à (14) sont indiscernables. Sur la figure 3 nous traçons la PCS pour la même PES cible et pour un paramètre d'évanouissement  $m = 7$ , mais pour un système MIMO  $2 \times 1$  et  $2 \times 2$  et un signal MDP-8. De même ici l'inversion numérique de (7) et l'approximation proposée sont indiscernables. La méthode introduite est très précise pour un grand nombre de configurations MIMO et toute une variété d'ordre de modulation, non représentés ici par manque de place.

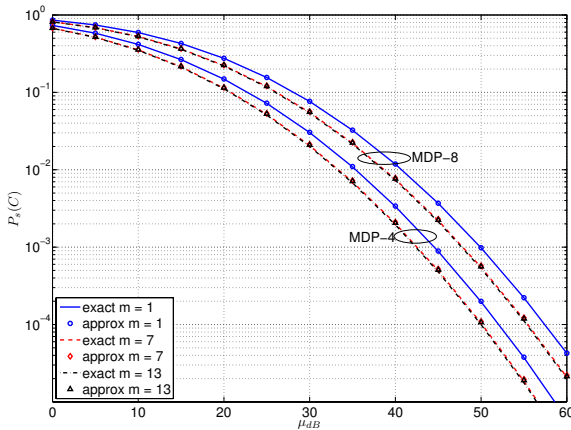


FIG. 2 – PCS d'un système MIMO  $2 \times 2$  avec les équations (14), (15), et l'inversion numérique de (7) pour une modulation MDP-4 et MDP-8.

## 5 Conclusion

Nous présentons une nouvelle approximation simple, précise et inversible de la PES d'un signal MDP-M en canal de Nakagami. Cela conduit à une forme exacte de la PCS en présence d'effet de masquage log-normal et ce pour le RSB d'intérêt c'est-à-dire pour une PES comprise entre  $10^{-1}$  et  $10^{-4}$  (en l'absence de codage canal). Une forme

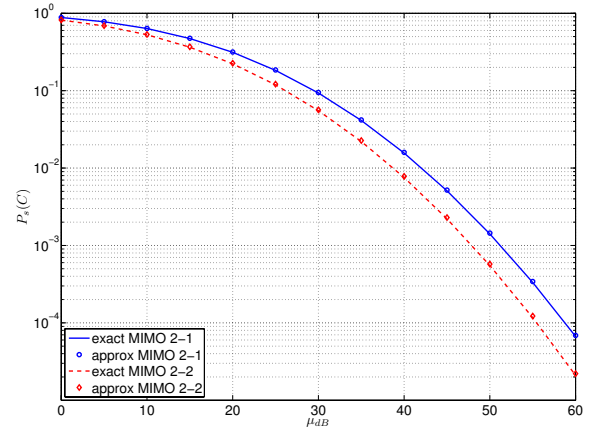


FIG. 3 – PCS de deux systèmes MIMO  $2 \times 1$  et  $2 \times 2$  avec les équations (14), (15), et l'inversion numérique de (7) pour une modulation MDP-8.

simple pour la PCS est très importante pour la gestion de la puissance dans les réseaux cellulaires. En effet en fonction de la PCS, une station de base peut modifier sa puissance d'émission pour toujours atteindre la PES requise par l'utilisateur. Les futurs travaux de recherche s'attacheront à prendre en compte les interférences du réseau.

## Références

- [1] M. K. Simon, Mohamed-Slim Alouini. *Digital Communication over Fading Channels*. Second Edition, Wiley, 2005.
- [2] J. G. Proakis. *Digital Communications*. Third Edition, McGraw Hill, 1995.
- [3] A. Conti, M. Z. Win, M. Chiani. On the Inverse Symbol-Error Probability for Diversity Reception, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 5, May 2003.
- [4] P. Mary, M. Dohler, J-M. Gorce, G. Villemaud, Marilyn Arndt. BPSK Bit Error Outage over Nakagami-m Fading Channels in Lognormal Shadowing Environments, *IEEE Communications Letters*, vol. 11, no. 6, June 2007.
- [5] H. Shin, J.H. Lee. Performance Analysis of Space-Time Block Codes over Keyhole Nakagami-m Fading Channels, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 53, no. 2 March 2004.
- [6] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryshik. *Table of Integrals, Series, and Products*, Academia Press, sixth edition, 2000.
- [7] R.W. Butler, A.T.A. Wood. Laplace Approximations for Hypergeometric Functions with Matrix Argument, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, issue 2, vol. 155, pp. 359-382, June 2003.
- [8] W.C. Jakes. Ed. *Microwave Mobile Communications*, classic reissue ed. Piscataway, NJ : IEEE Press, 1995.