Quelques propriétés d'un approximant de l'information mutuelle des canaux MIMO de Rice bi-corrélés.

Julien DUMONT[1], Walid HACHEM[2], Samson LASAULCE[3], Philippe LOUBATON[4], Jamal NAJIM[2]

[1]France Telecom recherche et développement et Université de Marne la Vallée, IGM LabInfo
5 Bd. Descartes, Champs sur Marne, 77454 Marne la Vallée Cedex 2, France

[2]LTCI, UMR CNRS 5141, ENST
46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13

[3]LSS, UMR CNRS 8506, SUPELEC
Plateau du Moulon, 91192 Gif sur Yvette Cedex

[4]Université de Marne la Vallée, IGM LabInfo, UMR CNRS 8049
5 Bd. Descartes, Champs sur Marne, 77454 Marne la Vallée Cedex 2, France

dumont@crans.org, hachem@enst.fr, samson.lasaulce@lss.supelec.fr,
loubaton@univ-mlv.fr, najim@tsi.enst.fr

Résumé – Dans cet article, nous nous intéressons à la détermination de la matrice de covariance optimisant l'information mutuelle moyenne des canaux MIMO de Rice bi-corrélés. Ce problème est classiquement résolu par des techniques numériques nécessitant l'utilisation de lourdes simulations de Monte-Carlo. Dans [2] et [1], nous avons montré que l'information mutuelle moyenne peut être approximée par un terme plus simple défini comme sa limite quand le nombre d'antennes d'émission et de réception convergent vers l'infini au même rythme. [1] indique que l'approximant est fiable même pour des nombres d'antennes réalistes, et propose un algorithme d'optimisation de l'approximant de complexité réduite. Des résultats de convergence de cet algorithme sont annoncés sans preuve dans [1], notemment la concavité stricte de l'approximant qui joue un rôle fondamental. Le but de cet article est de les établir.

Abstract – We address the evaluation problem of the capacity achieving input covariance matrices of correlated MIMO Rician channels. This issue can be solved using high cost numerical methods based on Monte Carlo simulations. In [2] and [1], we showed that the ergodic mutual information of such channels can be approximated by a simpler term defined as its limit when the number of transmit and receive antennas converge to $+\infty$ at the same rate. In [1], we have proposed a computationally attractive iterative maximization algorithm of the approximant. Certain related convergence results are stated without proof in [1]. In the present paper, we establish the strict concavity of the approximant, as well as these convergence results.

1 Introduction.

On considère un système de communication muni de t antennes d'émissions et de r antennes de réception, et l'on désigne par $\mathbf{H}$ la matrice $r \times t$ représentant les gains complexes entre les différents émetteurs et récepteurs. A un instant donné, le vecteur $\mathbf{y}$ de dimension r reçu peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{z} \tag{1}$$

où $\mathbf{z}$ est un vecteur aléatoire gaussien complexe de variance σ^2 représentant le bruit thermique, et où $\mathbf{x}$ représente le vecteur de dimension t transmis par l'émetteur. Afin de prendre en compte le fait que la puissance totale d'émission est finie, la matrice de covariance $\mathbf{Q} = \mathbb{E}(\mathbf{x}\mathbf{x}^H)$ de $\mathbf{x}$ est supposée vérifier la contrainte $\frac{1}{t}\mathrm{Tr}\mathbf{Q} = 1$.

Nous nous plaçons dans le contexte d'un canal MIMO de Rice bi-corrélé, c'est-à-dire que la matrice $\mathbf{H}$ possède la structure suivante :

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{V} \tag{2}$$

La matrice $\mathbf{A}$ est déterministe, et est due à la présence d'éventuels trajets directs entre les antennes d'émission et les antennes de réception. $\mathbf{V}$ est une matrice aléatoire donnée par

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{C}^{1/2}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{C}}^{1/2} \tag{3}$$

où $\mathbf{W}$ est une matrice aléatoire centrée, dont les éléments sont des variables aléatoires gaussiennes complexes indépendantes de variance 1 . $\mathbf{V}$ représente la composante diffusive du canal de propagation. Les matrices $\tilde{\mathbf{C}} > 0$ and $\mathbf{C} > 0$ modélisent les corrélations entre antennes d'émission et de réception respectivement. Cette structure particulière correspond au très classique modèle de Kronecker.

Afin de profiter des potentielles améliorations fournies par les systèmes MIMO en terme d'accroissement de débit de transmission, il est fondamental de configurer l'émetteur en fonction des connaissances disponibles sur le canal. Dans le contexte du présent article, nous supposons que $\mathbf{H}$ est connue du récepteur (via des séquences d'apprentissage par exemple), tandis que, du fait de la variabilité temporelle de $\mathbf{V}$, seules les statistiques de $\mathbf{H}$, i.e. $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, et $\tilde{\mathbf{C}}$ sont connues de l'émetteur. L'une des façons de poser le problème de la conception de l'émetteur est de chercher à optimiser la matrice $\mathbf{Q}$ du vecteur $\mathbf{x}$ transmis. L'un des critères les plus pertinents est l'information mutuelle moyenne $I(\mathbf{Q})$, qui est définie par

$$I(\mathbf{Q}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{H}}\left[\log\det\left(\mathbf{I}_r + \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{HQH}^H\right)\right]. \tag{4}$$

En effet, désignons par $\mathcal{C}$ le cône des matrices Hermitiennes non-negatives $t \times t$ et par $\mathcal{C}_1$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ constitué des matrices $\mathbf{Q}$ pour lesquelles $\frac{1}{t}\mathrm{Tr}(\mathbf{Q}) = 1$. Il est bien connu que le débit maximum susceptible d'être transmis de façon fiable sur le canal MIMO $\mathbf{H}$ est donné par

$$C_E = \sup_{\mathbf{Q}\in\mathcal{C}_1} I(\mathbf{Q}). \tag{5}$$

et que le choix de la matrice $\mathbf{Q}_*$ de $\mathcal{C}_1$ réalisant le maximum de I est donc très recommandable. Par conséquent, il est tout à fait fondamental d'être en mesure de résoudre le problème d'optimisation (5). Pour ceci, on remarque que la fonction $\mathbf{Q} \to I(\mathbf{Q})$ est strictement concave, et que l'ensemble $\mathcal{C}_1$ est convexe. Par conséquent, $\mathbf{Q}_*$ peut être évaluée par des techniques numériques (voir par exemple [5]). Cependant, on se heurte au fait que l'expression analytique de $I(\mathbf{Q})$ est extrêmement complexe (voir par exemple [3] dans le cas $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ et $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{I}$), et que l'évaluation du gradient et du hessien de I doit être effectuée via des méthodes de Monte Carlo. Ceci rend l'utilisation pratique de cette approche délicate dans un contexte opérationnel. Il est donc tout à fait pertinent de chercher à approximer $I(\mathbf{Q})$ par une fonction dont la maximisation sur $\mathcal{C}_1$ est plus simple à réaliser.

Généralisant des résultats obtenus dans le cas $\mathbf{A} = 0$ (voir par exemple les références données dans [4]), [2] ont établi que lorsque r et t tendent vers $+\infty$ de telle sorte que $\frac{r}{t} \to c$, avec $0 < c < +\infty$, alors $I(\mathbf{Q})$ peut être approximé par une fonction $\overline{I}(\mathbf{Q})$ dont l'expression est relativement simple. On peut de plus établir que $I(\mathbf{Q}) - \overline{I}(\mathbf{Q}) = O(\frac{1}{t})$. Puisque $I(\mathbf{Q})$ croit linéairement avec t, ceci implique que l'erreur relative $\frac{I(\mathbf{Q})-\overline{I}(\mathbf{Q})}{I(\mathbf{Q})}$ est de l'ordre de $\frac{1}{t^2}$. Ceci permet de justifier le fait, observé expérimentalement, que $\overline{I}(\mathbf{Q})$ est un approximant fiable de $I(\mathbf{Q})$, même pour des valeurs réalistes de r et de t. Ceci implique en particulier qu'il est raisonnable d'approximer $\mathbf{Q}_*$ par la solution $\overline{\mathbf{Q}}_*$ du problème de maximisation

$$\max_{\mathbf{Q}\in\mathcal{C}_1} \overline{I}(\mathbf{Q}). \tag{6}$$

Pour que ceci soit utile, il est bien entendu nécessaire de mettre en évidence un algorithme de complexité réduite permettant d'optimiser $\overline{I}(\mathbf{Q})$. Un algorithme itératif de ce type a été introduit récemment dans [1], mais faute de place, ses propriétés de convergence n'y ont pas été démontrées. Le but de cet article est d'établir ces propriétés. Dans la section 2, nous démontrons que la fonction $\overline{I}$ est strictement concave sur $\mathcal{C}_1$. Grâce à cette propriété fondamentale, nous établissons dans la section 3 un résultat de convergence de l'algorithme.

2 Concavité stricte de $\overline{I}$.

Ainsi que nous l'avons rappelé plus haut, la fonction $\mathbf{Q} \to I(\mathbf{Q})$ est strictement concave sur $\mathcal{C}_1$. Cependant, rien ne garantit à priori que l'approximant $\overline{I}$ possède cette propriété pour des valeurs finies de r et de t. Or, la concavité stricte de $\overline{I}$ est une propriété tout à fait fondamentale dès lors qu'il s'agit de mettre en évidence des techniques numériques de maximisation.

2.1 Présentation de l'algorithme d'optimisation de [1].

Nous commençons par rappeler l'expression de $\overline{I}(\mathbf{Q})$ donnée dans [1], et en déduisons par la suite l'algorithme itératif proposé.

Nous commençons par introduire deux quantités auxiliaires δ et $\tilde{\delta}$, dépendant de $\mathbf{Q}$, et qui sont définies par les uniques solutions strictement positives du système 2×2 suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \kappa & = & f(\kappa, \tilde{\kappa}, \mathbf{Q}) \\ \tilde{\kappa} & = & \tilde{f}(\kappa, \tilde{\kappa}, \mathbf{Q}) \end{array}\right. . \tag{7}$$

où $f(\kappa, \tilde{\kappa}, \mathbf{Q})$ est donné par

$$\frac{1}{t}\mathrm{Tr}\left[\mathbf{C}\left(\sigma^2(\mathbf{I} + \mathbf{C}\tilde{\kappa}) + \mathbf{A}\mathbf{Q}^{1/2}(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{Q})\kappa)^{-1}\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}^H\right)^{-1}\right] \tag{8}$$

et $\tilde{f}(\kappa, \tilde{\kappa}, \mathbf{Q})$ par

$$\frac{1}{t}\mathrm{Tr}\left[\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{Q})\left(\sigma^2(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{Q})\kappa) + \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}^H(\mathbf{I} + \mathbf{C}\tilde{\kappa})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{1/2}\right)^{-1}\right] \tag{9}$$

avec $\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{1/2}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{Q}^{1/2}$.

L'équivalent déterministe $\overline{I}(\mathbf{Q})$ est alors donné par la formule

$$\begin{aligned}\overline{I}(\mathbf{Q}) = {} & \log\det\left[\mathbf{I} + \mathbf{G}(\delta, \tilde{\delta})\mathbf{Q}\right] \\ & + \log\det\left[\mathbf{I} + \tilde{\delta}\mathbf{C}\right] - \sigma^2 t\delta\tilde{\delta}\end{aligned} \tag{10}$$

où $\mathbf{G}(\delta, \tilde{\delta})$ represente la matrice définie positive $t \times t$ définie par

$$\mathbf{G}(\delta, \tilde{\delta}) = \delta\tilde{\mathbf{C}} + \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{A}^H(\mathbf{I} + \tilde{\delta}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{A} \tag{11}$$

La forme de $\overline{I}(\mathbf{Q})$ se prête particulièrement bien à un algorithme de maximisation itératif au cours duquel les variables $\mathbf{Q}$ et $(\delta, \tilde{\delta})$ sont réactualisées séparemment. Ainsi, [1] propose l'algorithme suivant :

- Initialisation : $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$, $(\delta_1, \tilde{\delta}_1)$ sont définis comme les solutions positives du système (7) dans lequel $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$, et sont évalués en pratique par l'algorithme du point fixe. $\mathbf{Q}_1$ est alors défini comme le maximum sur $\mathcal{C}_1$ de la fonction $\mathbf{Q} \to \log\det\left[\mathbf{I} + \mathbf{G}(\delta_1, \tilde{\delta}_1)\mathbf{Q}\right]$, qui s'obtient grâce à une classique procédure de water-filling.
- Iteration k : supposons que $\mathbf{Q}_{k-1}$, $(\delta_{k-1}, \tilde{\delta}_{k-1})$ sont disponibles. $(\delta_k, \tilde{\delta}_k)$ sont définis comme les solutions de (7) dans lequel $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{k-1}$. $\mathbf{Q}_k$ s'obtient en maximisant sur $\mathcal{C}_1$ la fonction $\mathbf{Q} \to \log\det\left[\mathbf{I} + \mathbf{G}(\delta_k, \tilde{\delta}_k)\mathbf{Q}\right]$

2.2 Etablissement de la concavité large de $\overline{I}$.

Nous commençons par établir la concavité large de $\overline{I}$. Assez curieusement, la concavité de la fonction déterminisite $\overline{I}$ est extrêmement difficile à établir directement, et notre preuve utilise paradoxalement des résultats liés aux grandes matrices aléatoires.

Les difficultés soulevées par l'étude directe de la concavité de $\overline{I}(\mathbf{Q})$ proviennent du fait que $\overline{I}$ est fonction de $\mathbf{Q}$ mais aussi de δ et $\tilde{\delta}$, dépendant eux-même de $\mathbf{Q}$ d'une façon peu explicite via le système (7). Pour contourner cette difficulté, on construit des matrices aléatoires $mr \times mt$ dont l'information mutuelle moyenne (normalisée) associée $\frac{1}{m}I_m(\mathbf{Q})$ va converger lorsque

$m \to +\infty$ vers $\bar{I}(\mathbf{Q})$. Comme la limite de fonctions concaves (en l'occurence $\frac{1}{m}I_m(\mathbf{Q})$) demeure concave, le résultat sera démontré. Introduisons les matrices suivants :

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{C},\ \tilde{\boldsymbol{\Delta}} = \mathbf{I}_m \otimes \tilde{\mathbf{C}},\ \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}, \check{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{Q}$$

La matrice $\boldsymbol{\Delta}$ est de taille $rm \times rm$, les matrices $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}$ et $\check{\mathbf{Q}}$ de taille $tm \times tm$ et $\boldsymbol{\Theta}$, de taille $rm \times tm$. Introduisons maintenant :

$$\check{\mathbf{V}} = \frac{1}{\sqrt{mt}}\boldsymbol{\Delta}^{\frac{1}{2}}\check{\mathbf{W}}\tilde{\boldsymbol{\Delta}}^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\Theta} + \check{\mathbf{V}}\ ,$$

où $\check{\mathbf{W}}$ est une matrice aléatoire centrée $rm \times tm$ dont les éléments sont des variables gaussiennes complexes indépendantes centrées et de variances 1. Alors l'information mutuelle moyenne associée $I_m(\check{\mathbf{Q}}) = \mathbb{E}\log\det\left(\mathbf{I_{mr}} + \frac{\check{\mathbf{H}}\check{\mathbf{Q}}\check{\mathbf{H}}^{\mathbf{H}}}{\sigma^2}\right)$ admet un équivalent déterministe $\bar{I}_m(\check{\mathbf{Q}})$ défini par la formule (10) et le système (7) où on aura pris soin d'effectuer les substitutions suivantes :

$$t \leftrightarrow mt,\ r \leftrightarrow mr,\ \mathbf{A} \leftrightarrow \boldsymbol{\Theta}, \quad \mathbf{Q} \leftrightarrow \check{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{C} \leftrightarrow \boldsymbol{\Delta}, \quad \tilde{\mathbf{C}} \leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\Delta}}.$$

Du fait de la nature bloc-diagonale des matrices $\boldsymbol{\Theta}$, $\check{\mathbf{Q}}$, $\boldsymbol{\Delta}$ et $\tilde{\boldsymbol{\Delta}}$, le nouveau système (7) est rigoureusement identique à l'ancien, et admet donc les mêmes solutions. D'autre part, un calcul immédiat montre que l'équivalent déterministe normalisé $\frac{1}{m}\bar{I}_m(\check{\mathbf{Q}})$ vérifie :

$$\frac{1}{m}\bar{I}_m(\check{\mathbf{Q}}) = \bar{I}(\mathbf{Q})\ , \qquad \forall \mathbf{m} \geq \mathbf{1}.$$

La théorie générale rappelée en introduction nous assure que $I_m(\check{\mathbf{Q}}) - \bar{I}_m(\check{\mathbf{Q}}) \to 0$ quand $m \to \infty$. En particulier,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} I_m(\check{\mathbf{Q}}) = \bar{I}(\mathbf{Q})$$

ce qui nous assure a priori la concavité de $\bar{I}(\mathbf{Q})$. Remarquons que la concavité stricte de $\frac{1}{m}I_m(\check{\mathbf{Q}})$ ne se transfère pas par passage à la limite. Il est donc nécessaire de vérifier que $\bar{I}(\mathbf{Q})$ est strictement concave.

2.3 Etablissement de la concavité stricte de $\bar{I}$.

La démonstration complète de la concavité stricte est trop longue pour pouvoir être reproduite intégralement ici. Nous nous contentons donc d'en donner les étapes principales. Nous commençons par le lemme immédiat suivant.

Lemme 2.1 *La fonction $\mathbf{Q} \to \bar{I}(\mathbf{Q})$ est strictement concave si et seulement si pour toutes matrices $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ de $\mathcal{C}_1$, $\mathbf{Q}_1 \neq \mathbf{Q}_2$, la fonction $\overline{\psi}(\lambda)$ définie sur $[0,1]$ par*

$$\overline{\psi}(\lambda) = \bar{I}\left(\lambda\mathbf{Q}_1 + (1-\lambda)\mathbf{Q}_2\right)$$

est strictement concave sur $]0,1[$.

Soient $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_1 \neq \mathbf{Q}_2$, deux éléments fixés de $\mathcal{C}_1$. Le principe de la preuve consiste à établir la stricte concavité de $\overline{\psi}$ sur $[0,1]$. Pour cela, on commence par remarquer que si on définit $\psi_m(\lambda)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ par

$$\psi_m(\lambda) = \frac{1}{m} I_m\left(\lambda\mathbf{Q}_1 + (1-\lambda)\mathbf{Q}_2\right)$$

alors, ψ_m est strictement concave sur $[0,1]$, et pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\lim_{m\to+\infty} \psi_m(\lambda) = \overline{\psi}(\lambda)$$

Par ailleurs, un calcul un peu fastidieux permet d'établir qu'il existe un réel strictement positif κ tel que

$$\psi_m^{''}(\lambda) < -\kappa \tag{12}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in [0,1]$. La stricte concavité provient alors du lemme suivant dont la preuve est omise faute de place.

Lemme 2.2 *Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ une suite de fonctions deux fois continument dérivables et strictement concaves sur $[0,1]$ convergeant simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f. Alors, si il existe un réel strictement positif κ tel que*

$$\liminf_{m\to+\infty} f_m^{''}(\lambda) < -\kappa$$

alors la fonction f est strictement concave sur $[0,1]$.

La stricte concavité de $\bar{I}$ provient immédiatement de (12).

3 Convergence de l'algorithme.

Nous commençons par rappeler le concept classique de différentielle au sens de Gâteaux d'une fonction définie sur $\mathcal{C}_1$.

Définition 3.1 *Soit $W(\mathbf{Q})$ une fonction définie on $\mathcal{C}_1$, et soient $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{P}$ 2 éléments de $\mathcal{C}_1$. Alors, W est dite differentiable au sens de Gâteaux au point $\mathbf{Q}$ dans la direction $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ si la limite*

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{W\left(\mathbf{Q} + \lambda(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\right) - W(\mathbf{Q})}{\lambda} \tag{13}$$

existe. Dans ce cas, cette limite est notée $< W'(\mathbf{Q}), \mathbf{P} - \mathbf{Q} >$.

Il convient de noter que pour tout $\lambda \in [0,1]$, la matrice $\mathbf{Q} + \lambda(\mathbf{P}-\mathbf{Q}) = (1-\lambda)\mathbf{Q} + \lambda\mathbf{P}$ appartient à $\mathcal{C}_1$. Par conséquent, $W\left(\mathbf{Q} + \lambda(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\right)$ a bien un sens pour tout $\lambda \in (0,1)$.

Nous rappelons à présent un résultat bien connu permettant de caractériser le maximum d'une fonction strictement concave sur $\mathcal{C}_1$.

Proposition 3.2 *Soit W une fonction strictement concave sur $\mathcal{C}_1$. Alors, le maximum de W sur $\mathcal{C}_1$ est atteint en un unique point $\mathbf{Q}_*$ de $\mathcal{C}_1$. Si de plus pour tous éléments $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ de $\mathcal{C}_1$, W est differentiable au sens de Gâteaux au point $\mathbf{Q}$ dans la direction $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$, alors $\mathbf{Q}_*$ est l'unique élément de $\mathcal{C}_1$ vérifiant*

$$< W'(\mathbf{Q}_*), \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_* > \leq 0 \tag{14}$$

pour tout élément $\mathbf{Q}$ of $\mathcal{C}_1$.

Introduisons à présent la fonction $V(\kappa, \tilde{\kappa}, \mathbf{Q})$ obtenue en remplaçant dans l'expression (10) de $\bar{I}$ les solutions $(\delta, \tilde{\delta})$ de (7) (qui dépendent de $\mathbf{Q}$) par des quantités fixes strictement positives $(\kappa, \tilde{\kappa})$. En d'autres termes

$$\begin{aligned} V(\kappa, \tilde{\kappa}, \mathbf{Q}) &= \log\det\left[\mathbf{I} + \mathbf{G}(\kappa,\tilde{\kappa})\mathbf{Q}\right] \\ &+ \log\det\left[\mathbf{I} + \tilde{\kappa}\mathbf{C}\right] - \sigma^2 t\kappa\tilde{\kappa} \end{aligned} \tag{15}$$

On peut alors remarquer que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial V}{\partial \tilde{\kappa}} &=& -t\sigma^2\left(\kappa - f(\kappa,\tilde{\kappa},\mathbf{Q})\right) \\ \dfrac{\partial V}{\partial \kappa} &=& -t\sigma^2\left(\tilde{\kappa} - \tilde{f}(\kappa,\tilde{\kappa},\mathbf{Q})\right) \end{array} \right. \tag{16}$$

La première relation provient directement de l'expression (15), tandis que la deuxième s'obtient en transformant de façon adéquate (15). (16) impliquent qu'au point $(\delta, \tilde{\delta})$ solution de (7), alors,

$$\begin{array}{lcl} \left(\frac{\partial V}{\partial \kappa}\right)_{(\delta,\tilde{\delta},\mathbf{Q})} &=& 0 \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \tilde{\kappa}}\right)_{(\delta,\tilde{\delta},\mathbf{Q})} &=& 0 \end{array} \tag{17}$$

Cette relation joue un rôle important dans la mesure où elle permet de relier la différentielle de Gâteaux des fonctions $\overline{I}$ et V en un point $\mathbf{Q}$. Plus précisemment, pour tout $\kappa, \tilde{\kappa}$, désignons par $< V'(\kappa, \tilde{\kappa}, \mathbf{Q}), \mathbf{P}-\mathbf{Q})$ la différentielle au sens de Gâteaux de la fonction $\mathbf{Q} \to V(\kappa, \tilde{\kappa}, \mathbf{Q})$ au point $\mathbf{Q}$ dans la direction $\mathbf{P}-\mathbf{Q}$. Nous prétendons en effet que pour tout $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{P}$,

$$< \overline{I}'(\mathbf{Q}), \mathbf{P}-\mathbf{Q} >=< V'\left(\delta, \tilde{\delta}, \mathbf{Q}\right), \mathbf{P}-\mathbf{Q} > \tag{18}$$

où δ et $\tilde{\delta}$ sont les solutions de (7). Cette égalité provient directement de la règle de calcul des dérivées des fonctions composées :

$$\begin{aligned} < \overline{I}'(\mathbf{Q}), \mathbf{P}-\mathbf{Q} >=< V'(\delta, \tilde{\delta}, \mathbf{Q}), \mathbf{P}-\mathbf{Q}) > + \\ \left(\tfrac{\partial V}{\partial \kappa}\right)_{(\delta,\tilde{\delta},\mathbf{Q})} < \delta', \mathbf{P}-\mathbf{Q} > + \\ \left(\tfrac{\partial V}{\partial \tilde{\kappa}}\right)_{(\delta,\tilde{\delta},\mathbf{Q})} < \tilde{\delta}', \mathbf{P}-\mathbf{Q} > \end{aligned} \tag{19}$$

où $< \delta', \mathbf{P}-\mathbf{Q} >$ et $< \tilde{\delta}', \mathbf{P}-\mathbf{Q} >$ représentent les différentielles au sens de Gâteaux de δ et $\tilde{\delta}$ considérées en tant que fonctions de $\mathbf{Q}$. La relation (17) implique alors (18).

Nous sommes à présent en mesure d'annoncer notre résultat de convergence.

Proposition 3.3 *Soit $(\delta_k)_{k\geq 0}$ et $(\tilde{\delta}_k)_{k\geq 0}$ les suites générées par l'algorithme proposé. Si ces suites vérifient*

$$\lim_{k\to+\infty} \delta_k - \delta_{k-1} \to 0, \lim_{k\to+\infty} \tilde{\delta}_k - \tilde{\delta}_{k-1} \to 0 \tag{20}$$

alors, la suite de matrices $(\mathbf{Q}_k)_{k\geq 0}$ converge vers l'unique maximum $\overline{\mathbf{Q}}_*$ de $\overline{I}$ sur $\mathcal{C}_1$.

Remarque 3.4 *Avant d'établir cette proposition, commençons par le commenter. On peut tout d'abord constater que le résultat ne permet pas d'affirmer que l'algorithme converge dans tous les cas, mais que si les conditions (20) sont vérifiées, alors la convergence vers $\overline{\mathbf{Q}}_*$ est assurée. En pratique, nous n'avons jamais observé de cas de non convergence de l'algorithme, mais au cas où de tels phénomènes pourraient apparaître, la condition (20), qui peut être testée très simplement, permet de les diagnostiquer, et de commuter sur un algorithme d'optimisation concave plus standard, mais plus couteux, basé sur une technique de descente couplée avec une méthode de barrière. Nous pensons donc que l'algorithme proposé est un outil tout à fait fiable en pratique.*

Preuve de la proposition. Nous établissons à présent la proposition 3.3. Pour ceci, nous commençons par remarquer que la suite $(\mathbf{Q}_k)_{k\geq 0}$ est bornée, et reste donc dans un ensemble compact. Afin d'établir sa convergence, il suffit donc de montrer que toutes ses suites extraites convergentes convergent vers la même limite.

Nous considérons donc $(\mathbf{Q}_{\psi(k)})_{k\geq 0}$, une suite extraite convergente, où la suite $\psi(k)$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels. Nous notons $\mathbf{Q}_*^{\psi}$ la limite de cette suite extraite. Si nous montrons que

$$< \overline{I}'(\mathbf{Q}_*^{\psi}), \mathbf{Q}-\mathbf{Q}_*^{\psi} > \leq 0 \tag{21}$$

pour tout $\mathbf{Q} \in \mathcal{C}_1$, la Proposition 3.2 impliquera que $\mathbf{Q}_*^{\psi}$ coincide avec $\overline{\mathbf{Q}}_*$. Ceci permettra bien d'établir que toute sous-suite convergente extraite de $(\mathbf{Q}_k)_{k\geq 0}$ converge vers $\overline{\mathbf{Q}}_*$.

Afin d'établir (21), nous étudions l'itération numéro $\psi(k)$ de l'algorithme. La matrice $\mathbf{Q}_{\psi(k)}$ maximise la fonction$\mathbf{Q} \mapsto \log\det(\mathbf{I}+\mathbf{G}(\delta_{\psi(k)}, \tilde{\delta}_{\psi(k)})\mathbf{Q})$, ou de façon équivalente la fonction $\mathbf{Q} \mapsto V(\delta_{\psi(k)}, \tilde{\delta}_{\psi(k)}, \mathbf{Q})$, qui est bien entendu strictement concave et différentiable au sens de Gâteaux. La Proposition 3.2 implique donc que

$$< V'(\delta_{\psi(k)}, \tilde{\delta}_{\psi(k)}, \mathbf{Q}_{\psi(k)}), \mathbf{Q}-\mathbf{Q}_{\psi(k)} > \leq 0 \tag{22}$$

pour tout élément $\mathbf{Q} \in \mathcal{C}_1$. Considérons à présent le couple $(\delta_{\psi(k)+1}, \tilde{\delta}_{\psi(k)+1})$ solution de (7) lorsque $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\psi(k)}$. On peut se convaincre aisément que, considérées en tant que fonction de $\mathbf{Q}$, les fonctions δ et $\tilde{\delta}$ sont continues. Par conséquent, la convergence de la sous-suite $\mathbf{Q}_{\psi(k)}$ implique celle des sous-suites $(\delta_{\psi(k)+1}, \tilde{\delta}_{\psi(k)+1})$ vers des limites notées $(\delta_*^{\psi}, \tilde{\delta}_*^{\psi})$. Le couple $(\delta_*^{\psi}, \tilde{\delta}_*^{\psi})$ est solution de l'équation (7) pour $\mathbf{Q} = \overline{\mathbf{Q}}_*^{\psi}$ i.e. $\delta_*^{\psi} = \delta(\overline{\mathbf{Q}}_*^{\psi})$ et $\tilde{\delta}_*^{\psi} = \tilde{\delta}(\overline{\mathbf{Q}}_*^{\psi})$. Pour tout élément $\mathbf{Q}$ de $\mathcal{C}_1$, la relation (18) implique donc que

$$< \overline{I}'(\mathbf{Q}_*^{\psi}), \mathbf{Q}-\mathbf{Q}_*^{\psi} >=< V'\left(\delta_*^{\psi}, \tilde{\delta}_*^{\psi}, \mathbf{Q}_*^{\psi}\right), \mathbf{Q}-\mathbf{Q}_*^{\psi} > \tag{23}$$

La condition (20) implique par ailleurs que les sous-suites $(\delta_{\psi(k)}, \tilde{\delta}_{\psi(k)})$ convergent également vers $(\delta_*^{\psi}, \tilde{\delta}_*^{\psi})$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} < V'(\delta_{\psi(k)}, \tilde{\delta}_{\psi(k)}, \mathbf{Q}_{\psi(k)}), \mathbf{Q}-\mathbf{Q}_{\psi(k)} >= \\ < V'(\delta_*^{\psi}, \tilde{\delta}_*^{\psi}, \mathbf{Q}_*^{\psi}), \mathbf{Q}-\mathbf{Q}_*^{\psi} > . \end{aligned} \tag{24}$$

L'inégalité (22) implique donc que

$$< V'(\delta_*^{\psi}, \tilde{\delta}_*^{\psi}, \mathbf{Q}_*^{\psi}), \mathbf{Q}-\mathbf{Q}_*^{\psi} > \leq 0$$

pour tout élément $\mathbf{Q} \in \mathcal{C}_1$. (18) permet donc de conclure.

Références

[1] J. Dumont, Ph. Loubaton, S. Lasaulce, "On the Capacity Achieving Transmit Covariance Matrices of MIMO Correlated Rician Channels : A Large System Approach", in Proc. Communication Theory Symposium of Globecom 2006, December 2006, San Francisco.

[2] W. Hachem, Ph. Loubaton, J. Najim, "Deterministic equivalents for certain functionals of large random matrices", *Ann. Appl. Probab.*, 17(3) :875–930, 2007.

[3] M. Kang, M.S. Alouini, "Capacity of MIMO Rician channels", IEEE Trans. on Wireless Communications, vol. 5, no. 1, pp. 112-122, January 2006.

[4] A.M. Tulino, S. Verdu, "Random Matrix Theory and Wireless Communications", in Foundations and Trends in Communications and Information Theory, vol. 1, pp. 1-182, Now Publishers, June 2004.

[5] M. Vu, A. Paulraj, "Capacity optimization for Rician correlated MIMO wireless channels", in Proc. Asilomar Conference, pp. 133-138, ASilomar, November 2005.