

SYSTÈMES DE FONCTIONS ITÉRÉS ALÉATOIRES SUR DES ARBRES DE GALTON-WATSON

Geoffrey DECROUEZ^{1,2}, Pierre-Olivier AMBLARD¹, Jean-Marc BROSSIER¹, Owen JONES²¹GIPSA-lab, Dépt. Images et Signal (UMR CNRS 5216)
ENSIEG-BP 46, 38402 St Martin d'Hères Cedex²Department of Mathematics and Statistics
The University of Melbourne, Parkville, VIC Australia
G.decrouez@ms.unimelb.edu.au, bidou.amblard@lis.inpg.fr
jean-marc.brossier@lis.inpg.fr, O.D.Jones@ms.unimelb.edu.au

Résumé – Les systèmes de fonctions itérés (IFS) constituent des modèles paramétriques intéressants pour la génération d'ensembles fractals [1,3]. Le principe des IFS repose sur l'itération d'un ensemble d'opérateurs de compression-dilatation-traduction. Sous des hypothèses peu restrictives, un IFS possède un unique point fixe en général fractal. Initialement proposés dans un cadre déterministe, les IFS ont été généralisés au cas aléatoire dans des espaces abstraits au début des années 80 [4,5]. La spécialisation au cas des signaux aléatoires a été effectuée par Hutchinson et Rüschemdorff en 2000 en plaçant l'aléa sur les opérateurs. Nous proposons ici de compléter le modèle en plaçant l'aléa sur les opérateurs et en ajoutant un deuxième aléa sur l'arbre de construction sous-jacent à l'IFS. Nous montrons que l'IFS ainsi défini converge sous certaines hypothèses vers un unique point fixe, auto-similaire d'un point de vue statistique.

Abstract – Iterated function systems (IFS) are interesting parametric models to generate fractal sets [1,3]. The general idea of an IFS is to compress, dilate and translate a given set with a set of operators, and to iterate the procedure. Under weak assumptions, IFS possess a unique fixed point which is in general fractal. IFS were first introduced in a deterministic context and were generalized to the random setting on abstract spaces in the early 80's [4,5]. Their adaptation to random signals was carried out by Hutchinson and Rüschemdorff in 2000 by considering random operators. This study extends their model by considering not only random operators but also a random underlying construction tree. We show that the corresponding IFS converges under certain hypothesis to a unique fixed point, which is statistically self-similar.

1 Introduction

L'étude des signaux présentant ce que l'on appelle communément une invariance d'échelle a connu ces 20 dernières années un essor considérable, et trouvant des applications dans de vastes domaines, de l'étude de la turbulence développée à la biologie, de l'électronique au télétrafic informatique. Le terme invariance d'échelle se réfère aux signaux ne présentant aucune échelle d'étude caractéristique, chaque échelle jouant un rôle semblable. Un modèle simple présentant cette propriété a été introduit formellement par Hutchinson dans les années 80, connu sous le nom de système de fonctions itérés ou IFS [1]. Les IFS produisent des signaux qui peuvent être multifractals [6]. Ce formalisme a été par la suite adapté aux mesures et aux fonctions.

Un IFS consiste à appliquer récursivement un opérateur T possédant certaines propriétés. Dans cette étude nous nous bornerons à l'étude des IFS agissant sur l'espace des fonctions, que nous notons $L_p(\mathbb{X})$ dans le cas des signaux déterministes et $\mathbb{L}_p(\mathbb{X})$ dans le cas aléatoire. La procédure ainsi définie nécessite de définir un signal de départ $f_0 : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$. S'assurant que l'espace de travail est complet, on peut alors montrer que pour une classe d'opérateurs T l'IFS converge vers une certaine fonction f^* :

$$T^n f_0 \rightarrow f^* \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \quad (1)$$

où l'on désigne par T^n le n -ième itéré de T . Cette fonc-

tion f^* est en fait l'unique fonction vérifiant $f = Tf$. En d'autres termes, f^* est le point fixe de l'IFS associé à T . On suppose qu'il est possible de décomposer T en un ensemble de M opérateurs non-linéaires plus simples $\phi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq M$. Chaque ϕ_i déforme le signal d'origine et envoie le signal transformé sur un sous interval $\mathbb{X}_i = \varrho_i(\mathbb{X})$ de l'intervalle de travail \mathbb{X} . Plus formellement,

$$(Tf)(x) = \sum_{i=1}^M \phi_i[f(\varrho_i^{-1}(x)), \varrho_i^{-1}(x)] \mathbf{1}_{\varrho_i(\mathbb{X})}(x) \quad (2)$$

Les $\varrho_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ partitionnent \mathbb{X} en sous intervalles disjoints. $\mathbf{1}_{\varrho_i(\mathbb{X})}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle \mathbb{X}_i . Cette construction peut être représentée par un arbre de construction M -aire, comme schématisé sur la figure 1 pour $M = 2$. L'opérateur T est alors appliqué à chaque nœud de l'arbre de construction. Dans [1], l'aléa est placé uniquement sur les opérateurs (ϕ_1, \dots, ϕ_M) tout en gardant M fixe. Une précédente étude [2] rend possible la construction de l'IFS lorsque M est alors une variable aléatoire, mais en considérant des opérateurs déterministes après conditionnement sur le nombre de fils à un nœud donné de l'arbre [2]. Ici nous complétons le modèle en autorisant non seulement une structure aléatoire de l'arbre de l'IFS ainsi que des opérateurs (ϕ_1, \dots, ϕ_M) aléatoires. Une réalisation du point fixe consiste sous réserve d'existence à une réalisation d'un arbre aléatoire dont chaque

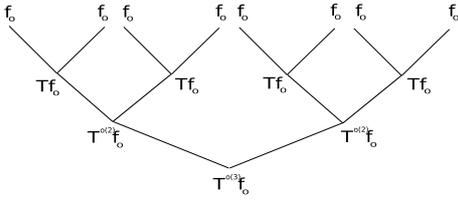


FIG. 1 – Arbre binaire associé à un IFS pour $M = 2$

branche est dotée d'une réalisation d'un couple d'opérateurs aléatoires $\{\phi_i, \varrho_i\}$.

Le papier s'organise de la façon suivante. Nous commençons par donner les espaces de travail et par définir un système de fonctions itérées sur des arbres de Galton-Watson avec opérateurs aléatoires. Cette définition requiert la construction d'un espace probabilisé des arbres étendus qui est présentée dans la partie 3. Par arbre étendu nous entendons un arbre dont chaque branche est munie d'un opérateur aléatoire. Enfin nous montrons les conditions d'existence et d'unicité du point fixe d'un tel IFS.

2 Définition de l'IFS

Nous spécialisons cette étude au cas des signaux aléatoires. Afin de différencier les espaces de travail déterministe et aléatoire, désignons par $L_p(\mathbb{X}) = \{f \mid \int_{\mathbb{X}} |f(t)|^p dt < +\infty\}$ l'ensemble des fonctions déterministes p intégrables. Cet espace est dotée de la métrique d_p définie par $d_p(f, g) = (\int_{\mathbb{X}} |f(t) - g(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$, le rendant complet (théorème de Riesz-Fisher). Soit (Σ, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé. On définit alors l'espace des fonctions aléatoires p -intégrables par :

$$\mathbb{L}_p = \{f_\sigma(t), \sigma \in \Sigma, t \in \mathbb{X} \mid \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{X}} |f_\sigma(t)|^p dt \right] < +\infty\}$$

Cet espace est muni de la métrique

$$d_p^* : \forall (f, g) \in \mathbb{L}_p \quad d_p^*(f, g) = \mathbb{E}^{\frac{1}{p}} [d_p^p(f, g)]$$

le rendant complet. La preuve de la complétude de (\mathbb{L}_p, d_p^*) est similaire à celle de Riesz-Fisher dans le cas déterministe et n'est pas donnée ici. f est ici un processus aléatoire et une réalisation de ce processus est donnée par f_σ où $\sigma \in \Sigma$. L'opérateur T agit donc sur l'espace \mathbb{L}_p de la manière suivante :

$$(Tf)(x) = \sum_{j=1}^{\nu_\theta} \phi_{\theta,j} [f^{(j)}(\varrho_{\theta,j}^{-1}(x)), \varrho_{\theta,j}^{-1}(x)] \mathbf{1}_{\varrho_{\theta,j}(\mathbb{X})}(x) \quad (3)$$

où les $f^{(j)}$ sont des copies i.i.d. du signal f . Les $\varrho_{\nu_\theta,j}$ partitionnent de manière aléatoire l'intervalle de travail \mathbb{X} en ν_θ sous-intervalles. Le facteur de contraction de $\varrho_{\nu_\theta,j}$ est une variable aléatoire $r_{\nu_\theta,j}$. Les fonctions $\phi_{\nu_\theta,j}$ sont des fonctions à 2 variables, Lipschitziennes en leur première variable, avec pour facteur de Lipschitz la variable aléatoire $K_{\nu_\theta,j}$. ν_θ est distribué selon un vecteur de probabilité q . Autrement dit, lorsqu'on se place à un nœud de l'arbre, l'opérateur T transforme le signal f à l'aide d'une classe d'opérateurs aléatoires tous partitionnant l'intervalle \mathbb{X} en un nombre adéquat de sous-intervalles égal au nombre de fils du nœud considéré.

Soit f un signal obtenu à l'aide de cette procédure. Si f est le point fixe d'un IFS aléatoire (c'est à dire si l'égalité $f = Tf$ est vraie en distribution) alors conformément aux notations précédentes f_σ désigne une réalisation d'un tel signal, pour σ un élément de Σ . Il reste donc à spécifier la structure de cet espace Σ et de le doter d'une tribu et d'une mesure de probabilité.

Revenons dans un premier temps sur la construction proposée dans [2] où seul l'arbre de construction de l'IFS était rendu aléatoire. Par arbre aléatoire nous entendons arbre de Galton-Watson, c'est à dire un arbre pour lequel le nombre de fils d'un nœud est aléatoire, indépendant des autres nœuds mais de même loi de probabilité. A une réalisation d'un arbre (infini) de Galton-Watson correspond un unique point fixe de l'IFS. En effet, chaque groupe d'opérateurs déterministes $\{\phi_i, \varrho_i\}$ pour i variant de 1 à N est associé aux branches issues d'un nœud de l'arbre dès que ce nœud possède N fils. L'espace Σ à considérer était alors l'espace probabilisé des arbres de Galton-Watson [7]. Ici le scénario est différent puisqu'après conditionnement à chaque nœud de l'arbre, on associe à chaque branche une réalisation d'un ensemble d'opérateurs $\{\phi_i, \varrho_i\}$. A un arbre réalisé correspond donc une infinité de points fixes possibles de l'IFS. Il faut donc définir une nouvelle structure pour l'espace Σ dont les éléments sont des arbres étendus. Cette construction est détaillée dans la section suivante.

3 Espace des arbres étendus

La construction de l'espace probabilisé s'appuie sur 2 résultats connus de la théorie de la mesure. Le théorème de Ionescu Tulcea va nous permettre dans un premier temps d'étendre un espace probabilisé à un autre plus grand à l'aide d'un noyau de probabilité. Enfin cette procédure pourra être répétée indéfiniment en utilisant le théorème d'extension de Daniell.

Ionescu-Tulcea. Le résultat de Ionescu-Tulcea s'appuie sur la notion de noyau de probabilité. Il permet de chaîner correctement n espaces mesurables (A_n, \mathcal{A}_n) en définissant une probabilité conjointe sur l'espace produit $\prod_{i=1}^n A_i$ à partir de n noyaux de probabilité $\kappa_i, 1 \leq i \leq n$. Si on considère dans un premier temps $n = 2$, un noyau de probabilité est défini comme une fonction $\kappa_1 : A_1 \times A_2 \rightarrow [0, 1]$ qui possède les 2 propriétés suivantes : pour tout $E \in \mathcal{A}_2, a \mapsto \kappa(a, E)$ est une fonction mesurable sur A_1 et pour tout $a \in A_1, E \mapsto \kappa_1(a, E)$ est une mesure de probabilité sur (A_2, \mathcal{A}_2) . κ_1 définit donc une distribution de probabilité sur A_2 sachant que l'on était à l'état a à l'étape d'avant. Considérons maintenant $n = 3$. κ_1 reste inchangé. On définit $\kappa_2 : A_1 \times A_2 \times A_3 \rightarrow [0, 1]$ comme étant une distribution de probabilité sur A_3 sachant que l'on était dans l'état (a_1, a_2) à l'étape précédente, pour $a_i \in A_i, i = 1, 2$. Alors le noyau $\kappa_1 \otimes \kappa_2$ permet de mesurer des ensembles de $A_2 \times A_3$ depuis un état initial $a_1 \in A_1$. Soit $E \subset A_2 \times A_3$, alors

$$(\kappa_1 \otimes \kappa_2)(a_1, E) = \int \int \mathbf{1}_E(b, c) \kappa_1(a_1, db) \kappa_2(a_1, b, dc)$$

Le résultat de Ionescu-Tulcea s'énonce alors comme suit.

Soit κ_1 une mesure de probabilité sur (A_1, \mathcal{A}_1) et supposons que pour tout $n \geq 2$ il existe un noyau de probabilité $\kappa_n : \prod_{i=1}^{n-1} A_k \rightarrow A_n$. Alors il existe une suite de variables aléatoires X_1, \dots, X_n prenant respectivement leurs valeurs dans A_1, \dots, A_n et tel que la distribution conjointe de X_1, \dots, X_n soit donnée par $\bigotimes_{i=1}^n \kappa_i$.

Daniell. Le résultat de Daniell nous permet d'étendre une mesure sur un nombre fini d'espace produit à une mesure sur un nombre infini d'espace produit. Soit A_1, A_2, \dots une suite d'ensembles mesurables et μ_n une mesure sur l'espace produit $A_1 \times \dots \times A_n$. Alors, sous l'hypothèse que $\mu_{n+1}(\cdot \times A_{n+1}) = \mu_n$ (qui est d'ailleurs vérifiée dans le cas où la mesure considérée est celle obtenue à l'aide de la procédure précédemment décrite) il existe une mesure μ sur $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ telle que la restriction de μ à $\prod_{i=1}^n A_i$ soit μ_n .

Espace des arbres étendus. Soit (Δ, \mathcal{D}, P) l'espace probabilisé des éléments de la forme

$$\delta = (M, \phi_1, \dots, \phi_M, \varrho_1, \dots, \varrho_M)$$

δ porte donc comme information le nombre de fils à un nœud ainsi que les opérateurs attachés à chacune de ses branches. Le noyau de probabilité permettant de construire la première génération des arbres étendus (espace $K^1 = \Delta$) est simplement donné par $\kappa_1 = P$. Il s'agit maintenant de construire κ_2 afin de définir correctement une mesure de probabilité sur l'espace étendu restreint aux 2 premières générations. On définit $K^j, j \geq 2$, génération j de l'arbre étendu, ainsi :

$$K^j := \{ \{ \delta(i) \} \mid i = 1, \dots, Z_j, \delta(i) \in \Delta, Z_j \in \{1, 2, 3, \dots\} \}$$

La σ -algèbre associée à K^j est alors

$$\mathcal{D}_j = \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{D}^k$$

où $\mathcal{D}^k = \mathcal{D} \times \dots \times \mathcal{D}$ k fois. La construction de κ_2 suppose connue la première génération, en particulier sa taille Z_1 . Lorsque Z_2 est strictement supérieur ou inférieur à Z_1 , on définit $\kappa_2 = 0$. Cela nous assure que tous les nœuds de la première génération (et seulement eux) possèdent une descendance. Sinon,

$$\kappa_2(E_1 \times \dots \times E_{Z_1} \mid Z_1) = \prod_{i=1}^{Z_1} P(E_i) \quad (4)$$

où chaque $E_i \in \mathcal{D}$. Cette procédure est illustrée sur la figure 2. On répète alors la procédure n fois ce qui nous permet de construire une mesure de probabilité sur les n premières générations $\prod_{i=1}^n K^i$ en utilisant le théorème de Ionescu-Tulcea, puis de laisser n tendre vers l'infini d'après Daniell. Soit K l'espace produit limite et κ la distribution de probabilité construite sur cette espace. On appelle alors (K, \mathcal{K}, κ) l'espace probabilisé des arbres étendus de Galton-Watson. Les notations suivantes sont utilisées. Soit \emptyset la racine de l'arbre marqué. Si ν_0 représente le nombre de branches issues de la racine de l'arbre alors chaque nœud fils est appelé i pour i variant de 1 à ν_0 . La deuxième génération de l'arbre est alors appelée ij pour $1 \leq j \leq \nu_i$. Plus

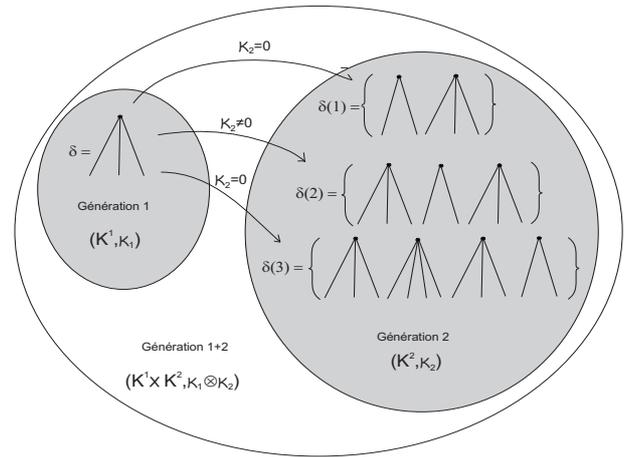


FIG. 2 – Espaces K^1, K^2 et $K^1 \times K^2$ munis de leurs mesures de probabilité. $\delta \in K^1$ possède 3 fils. Conditionnellement à δ , seul $\delta(2) \in K^2$ représenté ici pourra lui être rattaché puisque lui seul est composé de 3 groupes de branches rattachés à un nœud. κ_2 associe à cette combinaison une probabilité non nulle et telle que l'on ait indépendance d'un nœud à l'autre de l'arbre. $\kappa_2 = 0$ pour $\delta(1)$ et $\delta(3)$. Par soucis de clarté, les opérateurs attachés à chacune des branches ne sont pas représentés.

généralement, un nœud est un élément de $U = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^{*n}$ et une branche est définie comme étant un couple (u, u_j) où $u \in U$ et j est un entier strictement positif. On considère enfin $T_u(k)$ le sous-arbre de $k \in K$ enraciné en u : $T_u(k) = \{v \mid v \in U \text{ et } uv \in k\}$. Par construction, les variables aléatoires T_i sont indépendantes et de même loi (équation 4).

4 Existence/Unicité du point fixe

Le théorème ci-dessous énonce les conditions d'existence du point fixe de l'IFS aléatoire :

THEOREM 1 Soit (K, \mathcal{K}, κ) l'espace étendu des arbres de Galton-Watson. En gardant les mêmes notations que précédemment, si $\mathbb{E}_\kappa \sum_{j=1}^{\nu_0} r_{\nu_0, j} \int |\phi_{\nu_0, j}(0, x)|^p dx < +\infty$ pour $1 < p < +\infty$ et $\lambda = \mathbb{E}_\kappa \sum_{j=1}^{\nu_0} r_{\nu_0, j} K_{\nu_0, j}^p < 1$, où \mathbb{E}_κ est l'espérance mathématique sous κ , alors pour tout $f_0 \in \mathbb{L}_p(\mathbb{X})$, il existe une unique fonction f^* qui satisfait $f^* = T f^*$ dans \mathbb{L}_p et telle que

$$d_p^*(T^n f_0, f^*) \leq \frac{\lambda^{\frac{n}{p}}}{1 - \lambda^{\frac{1}{p}}} d_p^*(f_0, T f_0) \quad (5)$$

qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

La preuve de ce théorème se décompose en 2 étapes. La première étape consiste à s'assurer que l'opérateur T renvoie \mathbb{L}_p sur lui-même. Ensuite, il suffit de montrer que T est un opérateur contractant dans l'espace métrique complet des fonctions aléatoires p sommables, le théorème du point fixe assurant alors l'existence (et l'unicité) d'un unique point fixe.

Soit $f \in \mathbb{L}_p$. Précisons la construction de copies i.i.d. de f , basée sur sa structure d'arbre sous-jacente. Pour cela,

on utilise la propriété d'homogénéité des arbres étendus : $f_k^{(j)} := f_{T_j(k)}$ pour $k \in K$. Puisque les variables T_j sont i.i.d., il en va de même des fonctions $f^{(j)}$.

Première étape : Soit $f \in \mathbb{L}_p$. On montre que $Tf \in \mathbb{L}_p$, c'est à dire que $\mathbb{E}_\kappa \int_{\mathbb{X}} |(Tf)(x)|^p dx < +\infty$. En revenant à la définition de Tf , en utilisant la propriété d'emboîtement de l'espérance $\mathbb{E}_\kappa(\cdot) = \mathbb{E}_\kappa[\mathbb{E}_\kappa(\cdot|\nu_\emptyset)\{\phi_i, \varrho_i\}]$ et les propriétés contractives des ϱ , Tf peut être majoré par

$$\mathbb{E}_\kappa \sum_{j=1}^{\nu_\emptyset} r_{\nu_\emptyset, j} \mathbb{E}_\kappa \left[\int_{\mathbb{X}} |\phi_{\nu_\emptyset, j}[f^{(j)}(y), y]|^p dy \middle| \nu_\emptyset \{ \phi_i, \varrho_i \} \right] \quad (6)$$

où on a posé $y = \varrho_j^{-1}(x)$ et où on a majoré le Jacobien de la transformation par $r_{\nu_\emptyset, j}$. $\mathbb{E}_\kappa \int_{\mathbb{X}} |\phi_{\nu_\emptyset, j}[f^{(j)}(y), y]|^p dy$ s'écrit aussi $d_p^{*p}(\phi_{\nu_\emptyset, j}[f^{(j)}, Id], 0)$ où Id est la fonction identité et 0 la fonction nulle presque partout. On majore (6) par 2 termes provenant de l'inégalité triangulaire.

$$2^p \mathbb{E}_\kappa \sum_{j=1}^{\nu_\emptyset} r_{\nu_\emptyset, j} d_p^{*p}(\phi_{\nu_\emptyset, j}[f_\kappa^{(j)}, Id], \phi_{\nu_\emptyset, j}[0, Id]) + 2^p \mathbb{E}_\kappa \sum_{j=1}^{\nu_\emptyset} r_{\nu_\emptyset, j} d_p^{*p}(\phi_{\nu_\emptyset, j}[0, Id], 0) \quad (7)$$

Le membre de gauche est borné puisque $f \in \mathbb{L}_p$. Le terme de droite peut s'écrire aussi $\mathbb{E} \sum_{j=1}^{\nu_\emptyset} r_j \int |\phi_j(0, x)|^p dx$ et est fini par hypothèse.

Deuxième étape : Soient f et g dans \mathbb{L}_p . Alors

$$d_p^{*p}(Tf, Tg) = \mathbb{E}_\kappa \int \left| (Tf)(x) - (Tg)(x) \right|^p dx$$

La procédure est semblable à celle de l'étape précédente. On remplace Tf et Tg par leur définition et on utilise les propriétés d'emboîtement de l'espérance et de contraction des ϱ pour montrer que la distance entre Tf et Tg est majorée par :

$$\mathbb{E}_\kappa \sum_{j=1}^{\nu_\emptyset} r_{\nu_\emptyset, j} \mathbb{E}_\kappa \left[\int_{\mathbb{X}} \left| \phi_{\nu_\emptyset, j}[f^{(j)}(y), y] - \phi_{\nu_\emptyset, j}[g^{(j)}(y), y] \right|^p dy \right]$$

où $\mathbb{E}_\kappa^* = \mathbb{E}_\kappa[\cdot|\nu_\emptyset]\{\phi_i, \varrho_i\}$. En utilisant enfin la propriété de Lipschitz des ϕ et i.i.d. des $f^{(i)}$ et $g^{(i)}$, il vient

$$d_p^{*p}(Tf, Tg) \leq \lambda d_p^{*p}(f, g)$$

où λ est défini dans l'énoncé du théorème. Sous l'hypothèse $\lambda < 1$, le résultat suit.

En fait, il est facile de démontrer que f^* est l'unique point fixe vérifiant l'égalité $f = Tf$ en distribution. Pour ce faire, il faut se munir d'un nouvel espace complet de travail comme proposé dans [1]. Nous ne détaillerons pas ici sa construction.

Le type de signal obtenu est illustré figure 3. Les paramètres de l'IFS considéré sont donnés dans la légende.

5 Conclusion

Cette étude permet de compléter le modèle proposé par Hutchinson et Rüschemdorff pour la génération de signaux autosimilaires à l'aide d'IFS [1]. La construction de tels signaux est obtenue en autorisant une structure doublement

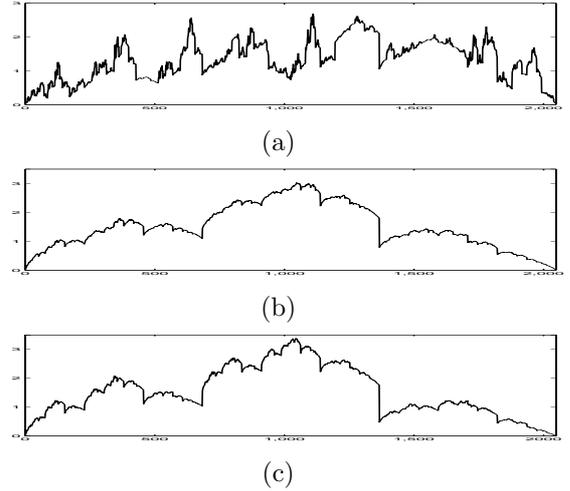


FIG. 3 – Une réalisation du point fixe (a) et sa valeur moyenne (b). Les $\phi_{i,j}$ se décomposent de la manière suivante $\phi_{i,j}(x, t) = s_i x + X \zeta_{i,j}(t)$ où X suit une loi normale de moyenne 1 et variance 0.25. $s_1 = 0.6$, $s_2 = 0.7$, $s_3 = 0.3$, $\zeta_{1,1}(t) = t(1-t)$, $\zeta_{2,1}(t) = t^3$, $\zeta_{2,2}(t) = 1-t^2$, $\zeta_{3,1}(t) = t$, $\zeta_{3,2}(t) = (t+1)(2-t)$ and $\zeta_{3,3}(t) = t(1-t)^3$. Pour les 2 figures du haut, ν_\emptyset prend les valeurs 1, 2 ou 3 avec probabilité 0.2, 0.3 et 0.5. La figure de la rangée inférieure est obtenue avec les probabilités 0.2, 0.2 et 0.6.

aléatoire puisque l'arbre sous-jacent est de type Galton-Watson et les opérateurs sont stochastiques.

La grande flexibilité au niveau des paramètres proposée dans ce modèle a cependant l'inconvénient d'augmenter les problèmes liés à leur estimation. Il serait maintenant intéressant de caractériser les propriétés du point fixe obtenu : continuité, expression de ses moments en fonction des paramètres de l'IFS. La structure en cascade permet aussi d'envisager une étude multifractale du point fixe.

Références

- [1] J.E. Hutchinson et L. Rüschemdorff. *Fractal Geometry and Stochastics*. Chapter Self-Similar fractals and selfsimilar random fractals p109-123, Ed. C. Bandt, S. Graf, M. Zähle, BirkhauserAddison-Wesley, 2000.
- [2] G. Decrouez, P-O. Amblard, J-M. Brossier et O.Jones. *Galton Watson Fractal Signals*. In Proc. IEEE ICASSP, Hawaii, USA, III :1157-1160, 2007
- [3] M.F. Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic Press, 1988
- [4] K. Falconer. *Random Fractals*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 100 : 559-582, 1986
- [5] R.D. Mauldin et S.C. Williams. *Random recursive constructions : asymptotic geometric and topological properties*. Trans. Amer. Math. Soc., 295 : 325-346, 1986
- [6] S. Jaffard. *Multifractal formalism for functions, part 1 and 2*. SIAM J. of Math. Anal., 28(4) : 944-998, 1986
- [7] J. Neveu. *Arbres et processus de Galton-Watson*. Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques, vol. 22, no. 2, pp. 199-207, 1986