Tomographie passive Observer avec du bruit

J.L.LACOUME

GIPSA Lab INPG UJF Grenoble

Jean-Louis.Lacoume@lis.inpg.fr

Résumé –La tomographie passive est une nouvelle technique d'observation de l'environnement. Elle utilise des champs d'ondes aléatoires de bruits naturels ou artificiels. L'objectif de cet exposé est de susciter le dialogue entre les traiteurs de signaux et les physiciens des ondes autour de la tomographie passive. Après un tour d'horizon des représentations des champs d'ondes, j'établirai les relations entre la physique de la propagation et les représentations des champs d'ondes déterministes et aléatoires. Pour les champs aléatoires, j'introduirais la « corrélation de Green ». Des simulations et des résultats expérimentaux seront présentés lors de la conférence.

Abstract – Passive tomography is a new technique of observation. It works with natural or man made random waves fields. This paper aims at developping cooperation between signal processing and wave propagation. An overview of signal representations is given, the relations between waves physics and signal representations are established and the « Green correlation » is introduced. Simulations and experimental data will be presented during the conference.

1. Introduction

L'observation avec des ondes (électromagnétiques sismiques, acoustiques) utilise des champs d'ondes déterministes ou aléatoires.

En optique, les émetteurs « classiques » rayonnent un champ d'ondes aléatoires [3]. Il a fallu attendre la découverte des lasers pour disposer de sources optiques déterministes (on dit plutôt cohérentes). *A contrario* les émetteurs classiques en acoustique et en sismique rayonnent des champs déterministes.

La tomographie passive utilise des champs d'ondes aléatoires naturels ou artificiels [5, 7]. Les informations sur le milieu observé sont contenues dans les propriétés statistiques, puissance moyenne, corrélation, du champ d'ondes enregistré.

Après un tour d'horizon des différentes représentations des champs d'ondes, j'établirai les relations entre la physique de la propagation et les représentations des champs d'ondes déterministes et aléatoires. Ces résultats seront illustrés, lors de la conférence, par des simulations et des données expérimentales

2. Les champs d'ondes et leur représentation

2.1 Champs d'ondes

2.1.1 Champ d'ondes physique

Un champ d'ondes est issu de la propagation d'une grandeur physique. Cette grandeur peut être scalaire, comme la pression pour les ondes acoustiques, ou vectorielle comme le déplacement des particules solides pour les ondes sismiques et les champs électriques et magnétiques pour les ondes électromagnétiques.

2.1.2 Champ d'ondes mathématique

Mathématiquement un champ d'onde est une fonction $X(\vec{r},t)$, scalaire ou vectorielle[1], de la position et du temps. La fonction $X(\vec{r},t)$ est déterministe ou aléatoire.

La fonction $X(\vec{r},t)$ décrit complètement un champ d'ondes déterministe.

Un champ d'ondes aléatoire est décrit par ses moments

1. la moyenne $E[X(\vec{r},t)]$, généralement nulle,
2. la corrélation spatio-temporelle

$$\gamma_X(\vec{\rho},\tau) = E[X(\vec{r},t)X^*(\vec{r}-\vec{\rho},t-\tau)].$$

2.2 Représentations des champs d'ondes

2.2.1 Champs d'ondes déterministes

La fonction $X(\vec{r},t)$ décrivant un champ d'onde déterministe est sa *représentation spatio-temporelle.*

Par transformation de Fourier sur le temps et l'espace, on obtient la *représentation en fréquences spatiales et temporelles*

$$X(\vec{k},\nu) = \int\int X(\vec{r},t)e^{-2\pi j(\nu t-\vec{k}\vec{r})}d\vec{r}dt,$$

[1] Je me limite ici au cas scalaire.

ν est la fréquence « temporelle », du signal, $\vec{k}$ la fréquence « spatiale »[2].

On revient à la représentation spatio-temporelle par TF^{-1} :

$$X(\vec{r},t) = \int\int X(\vec{k},\nu) e^{2\pi j(\nu t - \vec{k}\vec{r})} d\vec{k} d\nu .$$

Le champ d'onde spatio-temporel est une somme d'ondes planes monochromatiques, $e^{2\pi j(\nu t - \vec{k}\vec{r})}$.

2.2.2 Champs d'ondes aléatoires [2]

La représentation en fréquences spatiales et temporelles est obtenue en écrivant le champ d'ondes comme une somme d'ondes planes monochromatiques :

$$X(\vec{r},t) = \int e^{2\pi j(\nu t - \vec{k}\vec{r})} dX(\vec{k},\nu) .$$

Les accroissements $dX(\vec{k},\nu)$ sont une mesure aléatoire centrée. Pour un champ stationnaire en temps et espace, la covariance des accroissements est :

$$E\left[dX(\vec{k}_1,\nu_1)dX(\vec{k}_2,\nu_2)\right] = \gamma_X(\vec{k}_1,\nu_1)\delta_k\delta_\nu\, d\vec{k}_1 d\vec{k}_2\, d\nu_1 d\nu_2$$

$\gamma_X(\vec{k}_1,\nu_1)$ est la *corrélation en fréquences spatiales et temporelles.*

3. La propagation

La propagation des ondes est décrite par les équations de la physique des ondes (équations de Maxwell, équations de la mécanique) et les relations de constitution du milieu de propagation.

Les équations de propagation peuvent être écrites dans les différentes représentations du champ d'onde. La représentation espace-temps conduit à la *fonction de Green* [1] et la représentation en fréquences spatiales et temporelles à la *relation de dispersion*.

3.1 Champ d'ondes déterministe

3.1.1 Espace-temps : la fonction de Green.

Dans un milieu stationnaire et homogène caractérisé par la vitesse c des ondes l'équation de propagation du champ d'ondes spatio-temporel est

$$\Delta X(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X(\vec{r},t)}{\partial^2 t} = E(\vec{r},t) . \qquad (1)$$

Dans cette équation, $E(\vec{r},t)$, décrit les sources du champ produites par les émetteurs. Le champ d'onde sera déterministe ou aléatoire selon la nature des sources : déterministe ou aléatoire.

[2] La variable vectorielle à une, deux ou trois dimensions, selon le type de propagation, $\vec{k}$ est analogue au nombre d'onde utilisé et physique

Dans le cas général l'équation de propagation est :

$$D\left[X(\vec{r},t)\right] = E(\vec{r},t) \qquad (2)$$

D est un opérateur différentiel .

Lorsque la source est une impulsion appliquée à l'origine des coordonnées, la solution des équations (1) ou (2) est la *fonction de Green*. La solution de l'équation de propagation en présence de sources est obtenue par convolution spatio-temporelle du champ des sources avec la fonction de Green

$$X(\vec{r},t) = G *_{t,r} E$$

L'identification d'un milieu de propagation se ramène donc à la *détermination de la fonction de Green.*

3.1.2 Fréquences spatiales et temporelles : la relation de dispersion.

En fréquences spatiales et temporelles, les équations aux dérivées partielles, (1) et (2), deviennent des équations algébriques :

$$D(\vec{k},\nu)X(\vec{k},\nu) = E(\vec{k},\nu) .$$

Les ondes propagées vérifient la *relation de dispersion* :

$$D(\vec{k},\nu) = 0 .$$

Pour l'équation de propagation (1) :

$$D(k,\nu) = \left(k^2 - \frac{\nu^2}{c^2}\right) = \left(k - \frac{\nu}{c}\right)\left(k + \frac{\nu}{c}\right).$$

3.1.3 Relation de dispersion et fonction de Green.

La relation de dispersion caractérise la propagation des ondes dans la représentation en fréquences spatiales et temporelles, la fonction de Green décrit la propagation dans la représentation espace-temps. Ces deux représentations de la propagation sont reliées par une transformation de Fourier multidimensionnelle.

$$G(\vec{r},t) = TF_{r,t}^{-1}\left[\frac{1}{D(\vec{k},\nu)}\right]. \qquad (3)$$

Cette équation établit la relation entre la fonction de Green et la relation de dispersion.

La fonction de Green caractérise la propagation on peut également *caractériser la propagation par la relation de dispersion.*

3.1.4 De la relation de dispersion à la fonction de Green

Dans un milieu 1D, (3) s'écrit

$$G(x,t) = \int g(x,\nu) e^{2\pi j\nu t} d\nu ,$$

avec

$$g(x,\nu) = \int \frac{e^{-2\pi jkx} dk}{(k-\nu/c)(k+\nu/c)} . \qquad (4)$$

$g(x,\nu)$ se calcule, dans le plan complexe, par la méthode des résidus. Une difficulté se présente vis-à-vis des deux pôles qui sont sur l'axe d'intégration. Cette question est classique et se résout faisant intervenir une légère (nulle à la limite) absorption. En présence d'une faible absorption, notée ε, l'intégrale (4) devient

$$g(x,\nu)=\int\frac{e^{-2\pi jkx}dk}{(k-\nu/c+j\varepsilon)(k+\nu/c-j\varepsilon)},$$

donnant, par intégration dans le plan complexe :

$$g(x,\nu)=\frac{2\pi^2c}{2\pi j\nu}e^{-2\pi\frac{\nu}{c}|x|},$$

et

$$G(x,t)=2\pi^2cU(t-\frac{|x|}{c}),$$

qui est la fonction de Green en 1D [1].

3.2 Champ d'ondes aléatoire

Le champ d'onde aléatoire est décrit par la corrélation spatio-temporelle

$$\gamma_X(\vec{\rho},\tau)=E\left[X(\vec{r},t)X^*(\vec{r}-\vec{\rho},t-\tau)\right].$$

3.2.1 Equations de propagation de la corrélation spatio-temporelle

L'équation de propagation de la corrélation spatio-temporelle déduite des résultats établis dans [3], est :

$$\Delta_\rho{}^2\gamma_X(\vec{\rho},\tau)-\frac{2}{c^2}\Delta_\rho\left[\frac{\partial^2\gamma_X(\vec{\rho},\tau)}{\partial^2\tau}\right]+\frac{1}{c^4}\frac{\partial^4\gamma_X(\vec{\rho},\tau)}{\partial^4\tau}=\gamma_E(\vec{\rho},\tau).$$

L'équation de propagation de la corrélation en fréquences spatiales et temporelles se déduit de la relation de Wiener Kintchine appliquée aux fréquences spatiales et temporelles :

$$D(\vec{k},\nu)D^*(\vec{k},\nu)\gamma_X(\vec{k},\nu)=\gamma_E(\vec{k},\nu).$$

3.2.2 La corrélation spatio-temporelle « de Green »

Je propose de généraliser la notion de fonction de Green au cas d'un champ aléatoire **en définissant** la *corrélation de Green*, comme la corrélation associée à une entrée « blanche » en temps et espace.

La corrélation en fréquences spatiales et temporelles de l'entrée blanche est : $\gamma_E(\vec{k},\nu)=1$. La corrélation de Green en fréquences spatiales et temporelles est donc

$$\gamma_G(\vec{k},\nu)=\frac{1}{D(\vec{k},\nu)D^*(\vec{k},\nu)}. \quad (5)$$

La *corrélation de Green spatio-temporelle* s'en déduit par transformation de Fourier

$$\gamma_G(\vec{\rho},\tau)=TF^{-1}_{\rho\tau}\left[\gamma_G(\vec{k},\nu)\right] \quad (6)$$

Le champ d'onde aléatoire issu d'un champ de sources quelconque est obtenu en convoluant la corrélation spatio-temporelle des sources par la corrélation spatio-temporelle de Green.

3.2.3 La corrélation spatio-temporelle « de Green » : cas 1D

Elle est obtenue par TF de la corrélation en fréquences spatiales et temporelles. Comme dans le cas déterministe traité en (3-1-4) on doit introduire une « légère dose » d'absorption. On obtient

$$\frac{\partial\gamma_G(x,\tau)}{\partial t}=\frac{K}{\varepsilon}\left[G(x,\tau)+G^*(x,-\tau)\right], \quad (7)$$

$G(x,\tau)$ étant la fonction de Green.

La relation (7) est valable dans les cas 2D et 3D.

La corrélation de Green est proportionnelle à la somme de la dérivée de la fonction de Green et de sa version retournées en temps (version non causale).

3.3 Sur la relation entre la corrélation de Green et la fonction de Green

La relation (7) fait apparaître plusieurs propriétés de la corrélation spatio-temporelle de Green qui ont déjà été présentées dans [5, 6]. Ces propriétés concernent la puissance du champ, la relation de dérivation et le retournement temporel.

3.3.1 Puissance

$\gamma_G(0,0)=E\left[|X(\vec{r},t)|^2\right]$ est la puissance du champ d'onde engendré par propagation d'un champ aléatoire de sources « blanches ». Lorsque ε tend vers 0, c'est à dire lorsque l'absorption tend vers 0, la puissance du champ d'onde tend vers l'infini. Ce résultat est valable pour les propagations 1D, 2D et 3D. Il nous indique que, en l'absence d'absorption, des sources de bruit « blanches » généreraient un champ de bruit de puissance infinie. L'absorption a donc un rôle écologique majeur car, sans elle, les pollutions sonores, sismiques, électromagnétiques seraient intolérables !

3.3.2 Relation entre la fonction de Green et la corrélation de Green spatio-temporelle.

La fonction de Green décrit la propagation d'un champ de sources déterministes. La corrélation de Green décrit la propagation d'un champ de sources aléatoires. La relation (7) montre que la corrélation de Green est proportionnelle à la somme de la dérivée de la fonction de Green et de sa version retournées en temps (version non-causale). **Cette relation est à la base de la tomographie passive**.

La tomographie passive utilise les mesures réalisées sur un réseau de capteurs dans un champ de sources aléatoires : le bruit naturel. Si ce bruit naturel est blanc la corrélation des mesures réalisées sur les différents capteurs donne la corrélation de Green. La fonction de Green étant causale on l'obtient, à un facteur près, à partir de la corrélation de Green, par :

$$G(x,\tau) \propto U(\tau)\frac{\partial \gamma_G(x,\tau)}{\partial t} ,$$

$U(\tau)$ étant la fonction d'Heaveeside.

Nous avons établi ici cette relation à partir de la représentation en fréquences spatiales et temporelles. Elle a été démontrée par d'autres approches [6].

Cette relation a été établie dans un milieu de propagation, 1D, 2D ou 3D, non dispersif (vitesse de propagation indépendante de la fréquence). Est-elle valable dans un milieu dispersif ? Je pense que non et cela doit pouvoir être établi assez facilement à partir de la représentation $\vec{k},\nu$. …

3.3.3 Relation avec le retournement temporel

Le concept de retournement temporel introduit et développé dans [4] s'est avéré un outil très efficace à la fois pour la formulation théorique des problèmes et pour le développement de systèmes.

Le retournement temporel se manifeste dans l'expression de la corrélation de Green donnée en (7)

$$\frac{\partial \gamma_G(x,\tau)}{\partial t} = \frac{K}{\varepsilon}\left[G(x,\tau) + G^*(x,-\tau)\right].$$

Le premier terme correspond à la propagation dans le sens du temps, le second terme à la propagation dans le sens inverse du temps.

Le retournement temporel ne s'applique que si l'équation de propagation ne contient que des dérivées d'ordre pair [4]. Ceci n'est pas le cas en particulier dans un milieu de propagation absorbant : l'existence d'absorption est donc contradictoire avec le retournement temporel. Nous soulevons ici une contradiction que nous laisserons aux lecteurs le plaisir d'éclaircir : pour aboutir à la relation (7) nous avons dû introduire une dose « infinitésimale » d'absorption dont l'existence est en contradiction avec le retournement temporel.

Insistons sur le fait que, la relation (7) est applicable en présence d'absorption. En effet « physiquement » la raison qui rend inapplicable le retournement temporel est qu'une onde absorbée retournée serait amplifiée au cours de la propagation dans le sens inverse du temps. Cette contradiction n'apparaît pas dans la méthode que nous avons utilisée pour établir la relation (7) car le choix des pôles utilisés pour réaliser l'intégration assure que les ondes sont absorbées quel que soit leur sens de propagation.

4. Illustrations

Des simulations et des résultats expérimentaux obtenus en sismique seront présentés lors de la conférence.

5. Conclusion

Nous avons présenté le nouveau champ de recherche ouvert par la tomographie passive. Ce champ de recherche est au point de rencontre de la physique des ondes et du traitement du signal. Une coopération de ces deux disciplines dans ce domaine permettrait d'en développer les bases théoriques dans les voies prometteuses ouvertes par les résultats déjà obtenus [5, 7]. Le concept central de la tomographie passive qui est l'utilisation d'excitations naturelles verra son champ d'application s'ouvrir largement sur d'autres domaines. On rencontre en effet des sources naturelles dans beaucoup de dispositifs d'observation. Ces sources naturelles, considérées actuellement comme parasites, deviennent, dans la tomographie passive, des auxiliaires précieux économiques, puisqu'il n'est plus nécessaire de disposer d'émetteurs, et écologiques car elles évitent les émissions artificielles souvent très polluantes utilisées en tomographie active.

Références

[1] Ph. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, Mc Graw Hill, 1953

[2] A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires,* Masson, 1953.

[3] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics,* Pergamon, Fourth edition, 1970

[4] M. Fink, *Time reversal of ultrasonic fields-Part 1 : Basic principles*, IEEE Trans.on Ultrasonic, ferroelectric and frequency control, Vol. 39, n° 5, pp : 555_566, Sept. 1992

[5] E. Larose, L. Margerin, A. Derode, B. Van Tiggelen, M. Campillo, N. Shapiro, A. Paul, L. Stehly and M. Tanter, *Correlation of random noise, an interdisciplinary review, Geophysics,* Vol. 71, N° 4, August 2006, pp . SI11,SI21.

[6] Ph Roux, K.G. Sabra, W.A. Kuperman and A. Roux, *Ambient noise cross-correlatioon in free space : theoretical approach,* J. Acoust. Soc. Am. 117,(1), January 2007, pp : 79-84.

[7] C. Gervaise, S. Vallet, C. Ioana, C. Stephan and Y. Simard, *Passive acoustic tomography : new concepts and applications using marine mammals,* J.Mar. Biol. ASS. UK (2007) n° 87 pp ; 5-10.