

Estimation de la FI d'un signal multi-composante par Décomposition Modale Empirique et une Version B-splines de l'Opérateur d'Energie de Teager-Kaiser

Abdelkhalek BOUCHIKHI^(1,2), Abdel-Ouahab BOUDRAA^(1,2)

¹IRENav, Ecole Navale
Ecole Navale, Lanvéoc Poulmic, BP600, 29240 Brest-Armées, France.

²E3I2-EA3876, ENSIETA
2, rue François Verny, 29806 BREST Cedex 9, France
(bouchikhi,boudra)@ecole-navale.fr

Résumé – L'estimation de la Fréquence Instantanée (FI) et de l'Amplitude Instantanée (AI) d'un signal AM-FM est un problème largement abordé en traitement du signal. Dans le cas de signal mono-composante, la transformée d'Hilbert ou l'ESA (Energy Separation Algorithm), basé sur l'opérateur de Teager-Kaiser TKEO (Teager-Kaiser Energy operator), permettent en générale, une bonne estimation de la FI du signal. Par contre, pour un signal multi-composante, un filtrage passe bande est nécessaire avant de procéder à l'estimation. En combinant l'EMD (Empirical Mode Decomposition) et le TKEO, nous avons montré comment on peut estimer la FI et l'AI d'un signal multi-composante [1-2], où les trois premières dérivées ont été évaluées numériquement. Cependant cette procédure est non seulement une approximation des dérivées mais, elle est aussi très sensible au bruit. Dans ce travail, nous proposons d'utiliser les formes B-spline des IMF (Intrinsic Mode Functions) issues de l'EMD pour calculer les dérivées analytiques; puis nous les utilisons pour estimer les FI et AI à l'aide de l'algorithme ESA sous sa forme continue. Cette approche est appelée l'EMD-ESA-BS. Les résultats montrent que cette dernière permet une bonne estimation de la FI comparé à l'approche discrète, EMD-ESA.

Abstract – Instantaneous Frequency (IF) and Instantaneous Amplitude (IA) estimation of an AM-FM signal is well known problem in signal processing. Generally, for monocomponent signal, Hilbert transform or Energy Separation Algorithm (ESA), which is based on Teager-Kaiser Energy Operator (TKEO), allow a good estimation of the IF of a nonstationary signal. Otherwise a pass-band filter is required before estimation. In previous works [1-2], we have shown how to estimate the IF of a multicomponent signal by Combining Empirical Mode Decomposition (EMD) and the TKEO. In [1-2] the first, the second and the third derivatives were numerically evaluated. However, this operation is just an approximation of derivatives and is highly sensitive to noise. In this work we propose to use the B-spline forms of the Intrinsic Mode Functions (IMFs) extracted by the EMD, to calculate the analytic derivatives. Then, these ones are incorporating into the ESA to estimate the IF and the IA. The present approach is called EMD-ESA-BS. Preliminary results show that this new approach performs better than the EMD-ESA one.

1 Introduction

La problématique de la démodulation d'un signal AM-FM réside dans l'estimation de l'information contenue dans les signaux de la FI et de l'AI. Dans le cas d'un signal mono-composante, il existe plusieurs approches qui permettent, en générale, une bonne estimation de ces signaux. La plus classique est celle basée sur le calcul du signal analytique via la transformé de Hilbert. Récemment, l'approche ESA [7-8] utilisant le TKEO qui est un opérateur différentiel non linéaire [6]. Pour un signal $s(t)$, le TKEO est défini par :

$$\Psi [s(t)] = \left[\dot{s}(t) \right]^2 - s(t) \ddot{s}(t) \quad (1)$$

où $\dot{s}(t) = \frac{\partial s(t)}{\partial t}$. Cet opérateur estime l'énergie d'une source produisant le signal AM-FM $s(t)$. Cette énergie permet aussi d'estimer les composantes AM et FM du signal $s(t)$ [7].

Les approches d'Hilbert et d'ESA supposent que le signal $s(t)$ est mono-composante. Ainsi, pour des signaux multi-composante, un filtrage passe bande est nécessaire avant la démodulation [2],[7-8]. Nous avons montré comment estimer les FI et les AI de tels signaux en combinant l'EMD et le TKEO [1-2] où les dérivées premières (jusqu'à l'ordre trois) sont estimées numériquement. Pour éviter l'estimation numérique, qui est sensible au bruit, nous proposons une version continue de l'ESA utilisant les B-splines [3], appelée ESA-BS, ce qui permet une meilleure estimation des FI et des AI. Pour un signal multi-composante, l'EMD va permettre tout d'abord la décomposition du signal en composantes AM-FM [5]. Puis la démodulation des ces composantes est obtenue par l'ESA-BS. L'ensemble de l'approche est appelée EMD-ESA-BS. Cette nouvelle approche donne de meilleurs résultats d'estimation et plus robuste vis à vis du bruit que l'EMD-ESA.

2 Principe de l'EMD

L'EMD est un processus itératif qui consiste à représenter un signal sous forme d'oscillations de type AM-FM, appelées IMF. En effet, les IMF sont des oscillations locales introduites par Huang, dont le but est d'estimer la FI [5]. Soit $s(t)$ un signal à décomposer. La procédure de décomposition de $s(t)$, ou bien le tamisage (Sifting), consiste à interpoler les maxima et les minima locaux du signal par des splines cubiques ou B-splines [3] et construire ainsi les enveloppes supérieures et inférieures. La moyenne des deux enveloppes est calculée puis soustraite au signal original $s(t)$. Cette différence est qualifiée d'IMF (notée imf_1) si elle vérifie les conditions suivantes :

- (1) Le nombre d'extréma locaux et de passages à zéros différent au plus de un,
- (2) de moyenne nulle.

La première condition est équivalente à celle imposée dans le cas d'un processus Gaussien stationnaire : à bande étroite, tandis que la deuxième condition est nécessaire dans la mesure où elle assure une bonne estimation de la FI : en évitant les perturbations introduites par les formes asymétriques. La différence entre $s(t)$ et imf_1 est donc considérée comme étant le nouveau signal à décomposer par la même procédure. La décomposition continue jusqu'à obtenir un résidu correspondant à la tendance globale du signal. Finalement, le signal de départ $s(t)$ est représenté comme étant la somme des IMF plus le résidu final :

$$s(t) = \sum_{k=1}^M IMF_k(t) + r_M(t), \quad (2)$$

où $r_M(t)$ est le résidu de la décomposition et M est le nombre de modes.

3 L'approche EMD-ESA-BS

L'EMD est définie par le tamisage, un processus permettant de décomposer localement le signal en IMF [5]. La décomposition considère le signal à l'échelle de ses oscillations locales, sans que celles-ci soient nécessairement harmoniques au sens de Fourier. En plus et à l'inverse des ondelettes, aucun noyau de décomposition n'est imposé aux données. La décomposition est entièrement pilotée par les données [5]. Pendant le tamisage les IMF sont approchées par des B-splines [3]. Cela, permet tout naturellement, de les ré-écrire sous la forme :

$$IMF_k^{\nu(k)}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_k[n] \beta^{\nu(k)}(t-n) \quad (3)$$

où $IMF_k^{\nu(k)}(t)$ est le $k^{ième}$ mode approximé par la B-splines d'ordre $\nu(k)$ où $\nu(k)$ est l'ordre qu'on donnera à la B-splines au niveau k et $\beta^{\nu(k)}(t)$ est la B-spline d'ordre $\nu(k)$. $C_k[n]$ est le $n^{ième}$ coefficient de la B-spline d'approximation du $k^{ième}$ mode $IMF_k^{\nu(k)}$. Le calcul des coefficients $C_k[n]$ peut être obtenu soit par la résolution d'un système linéaire, approche matricielle [4], soit par filtres récursifs [9]. Une IMF est un signal mono-composante et

en supposant que sa FI ne varie pas trop rapidement par rapport à la porteuse [7], l'algorithme ESA peut s'appliquer. Par soucis de simplifications, dans la suite on pose $IMF_k^{\nu(k)} = s^{\nu(k)}(t)$. Les sorties du TKEO pour $s^{\nu(k)}(t)$ et $\frac{\partial s^{\nu(k)}(t)}{\partial t}$ sont données par :

$$\Psi \left[s^{\nu(k)}(t) \right] = \left[\frac{\partial s^{\nu(k)}(t)}{\partial t} \right]^2 - s^{\nu(k)}(t) \frac{\partial^2 s^{\nu(k)}(t)}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\Psi \left[\frac{\partial s^{\nu(k)}(t)}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial^2 s^{\nu(k)}(t)}{\partial t^2} \right]^2 - \frac{\partial s^{\nu(k)}(t)}{\partial t} \frac{\partial^3 s^{\nu(k)}(t)}{\partial t^3}$$

La FI, $f_k(t)$, l'AI, $a_k(t)$, d'une IMF s'écrivent comme suit [4] :

$$a_k(t) = \frac{\Psi \left[s^{\nu(k)}(t) \right]}{\sqrt{\Psi \left[\nabla s^{\nu(k)}(t) \right]}} \quad (5)$$

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Psi \left[\nabla s^{\nu(k)}(t) \right]}{\Psi \left[s^{\nu(k)}(t) \right]}}$$

où, $\nabla(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$. Pour formuler l'approche ESA-SB, les dérivées premières de l'IMF sont calculées. sachant que :

$$\frac{\partial \beta^{\nu(k)}(t)}{\partial t} = \beta^{\nu(k)-1}(t + \frac{1}{2}) - \beta^{\nu(k)-1}(t - \frac{1}{2})$$

Connaissant les coefficients de la B-splines d'approximation (3), il est facile de montrer les relations suivantes :

$$\frac{\partial s^{\nu(k)}(t)}{\partial t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (C_k[n] - C_k[n-1]) \beta^{\nu(k)-1}(t-n + \frac{1}{2}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 s^{\nu(k)}(t)}{\partial t^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [C_k[n+1] - 2C_k[n] + C_k[n-1]] \beta^{\nu(k)-2}(t-n) \quad (7)$$

$$\frac{\partial^3 s^{\nu(k)}(t)}{\partial t^3} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (C_k[n+1] - 3C_k[n] + 3C_k[n-1] - C_k[n-2]) \beta^{\nu(k)-3}(t-n + \frac{1}{2}) \quad (8)$$

En remplaçant les dérivées de l'équation (5), par les relations (6)-(8) on obtient l'EMD-ESA-BS. Nous illustrons nos résultats de l'EMD-ESA-BS avec des splines cubiques "comme pour l'EMD". Soit la séquence $\{t_i\}_{i=0,1,\dots,M-1}$ de noeuds (ou points d'arrêt) de la spline d'approximation alors, sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ le signal $s(t)$ est approximé par une fonction spline de degré 3, c.à.d :

$$s(t) = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4$$

Approche	$s_1(t)$	$s_2(t)$
EMD-ESA(version discrète)	0.002200	0.000103
EMD-ESA-BS(version continue)	0.000301	0.000070

TAB. 1 – Erreur Quadratique Moyenne entre les FI estimées et théoriques du signal non bruité.

Donc sur $[t_i, t_{i+1}]$ L'ESA-BS s'écrit :

$$a_k(t) = \frac{A(t) + B(t)}{\sqrt{C(t)}} \quad (9)$$

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C(t)}{A(t) + B(t)}}$$

où,

$$A(t) = 3C_1^2 t^4 + 4C_1 C_2 t^3 + 2C_2^2 t^2,$$

$$B(t) = (2C_2 C_3 - 6C_1 C_4)t + C_3^2 - 2C_2 C_4,$$

$$C(t) = 18C_1^2 t^2 + 12C_1 C_2 t + 4C_2^2 - 6C_1 C_3.$$

4 Résultats

Deux signaux $s_1(t)$, $s_2(t)$ sont additionnés à un bruit blanc Gaussien centré pour former un signal multi-composante $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + b(t)$ où, $s_i(t) = a(t)\cos[\phi_i(t)]$ avec, $a(t) = 1 + \kappa\cos(\omega_a t)$, $\phi_i(t) = \omega_{ci}t + (\omega_{mi}/\omega_{ci})\sin(\omega_{ci}t)$, $i = \{1, 2\}$. Les paramètres du signal $s_1(t)$ sont : $\kappa = 0.6$ indice de modulation, $\omega_a = 0.01\pi$, $\omega_{c1} = 0.6\pi$, $\omega_{m1}/\omega_{c1} = 0.1$ est la profondeur de modulation. Pour $s_2(t)$, $\omega_{c2} = 0.3\pi$, $\omega_{c2} = 0.3\pi$, $\omega_{m2}/\omega_{c2} = 0.1$. Le signal $s(t)$ ainsi formé est décomposé en IMF par l'EMD (Fig. 1) et $s_1(t)$ et $s_2(t)$ identifiées aux deux premières IMF. Pour valider la méthode nous l'avons testé d'abord sur le signal non bruité, $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$. On trouve que l'erreur quadratique moyenne de l'estimation de la FI, pour EMD-ESA-BS, est dix fois plus petite que celle par l'approche discrète EMD-ESA (Tab. 1). En effet plus on augmente le pas d'échantillonnage de la B-Splines, plus l'approximation est meilleure. Pour des RSB élevés on a une très bonne estimation de la FI avec une erreur quadratique tendant vers zéro (Fig. 2). En bruitant les signaux (RSB=15dB), l'approche donne encore de bons résultats (Fig. 4) par rapport à l'approche ESA discrète (Fig. 3). Pour des valeurs de RSB tendant vers zéro les résultats sont un petit peu satisfaisants mais restent meilleurs que celles de l'ESA classique. Dans ce cas les résultats peuvent être améliorés en choisissant une approximation avec un certain degré de liberté. Au lieu de choisir des B-Splines d'approximation qui passent par tous les points du signal, on peut envisager une régularisation du problème avec des *Smooth Splines*.

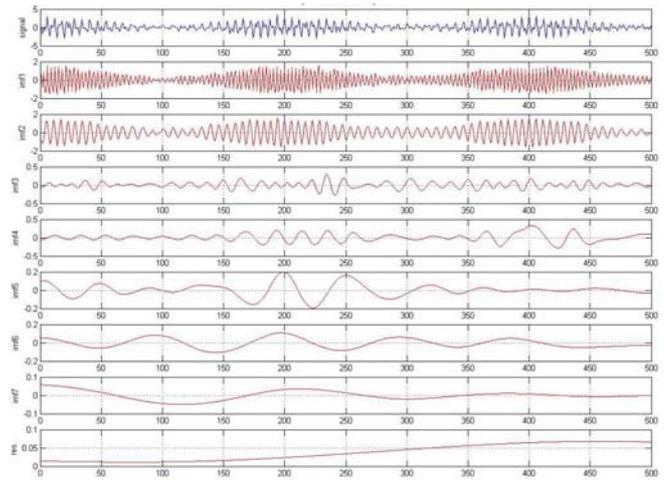


FIG. 1 – Décomposition du signal $s(t)$ bruité par L'EMD

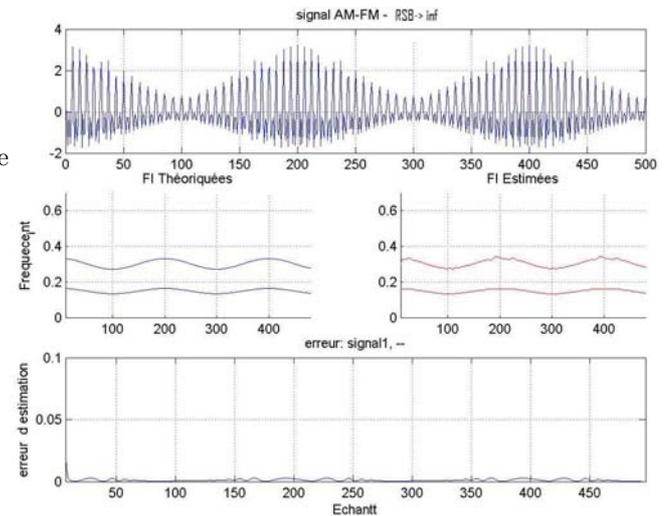


FIG. 2 – Estimation, par EMD-ESA-BS, des FI du signal $s(t)$ non bruité.

5 Conclusion et perspectives

L'originalité de ce travail est l'exploité des formes continues (B-spline) des IMF, pour estimer analytiquement les fréquences instantanées d'un signal multi-composante. L'estimation est obtenue par l'intermédiaire de l'algorithme ESA (Energy Separation Algorithm). Même si la méthode proposée reste encore sensible aux fortes intensités du bruit, elle est -du point de vue mathématique- consistante. Afin de pallier ce problème existentiel "bruit", nous proposons d'introduire un lissage sur les B-splines d'approximations des IMF pendant le tamissage, un pré-débruitage du signal qui limitera les fortes oscillations dus au bruit sans pour autant, éliminer les hautes fréquences du signal utile.

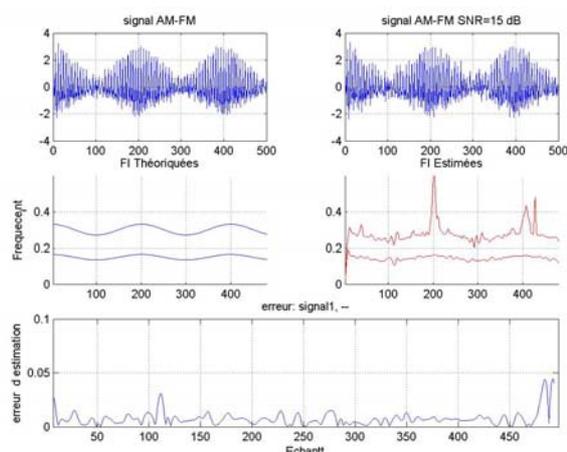


FIG. 3 – Estimation, par EMD-ESA, des FI du signal $s(t)$, $RSB = 15dB$.

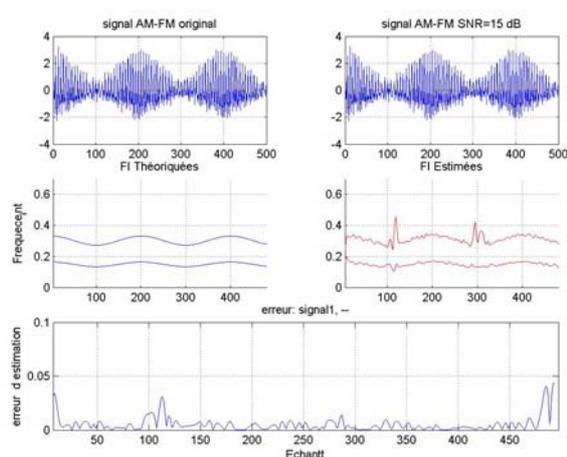


FIG. 4 – Estimation, par EMD-ESA-BS, des FI du signal $s(t)$, $RSB = 15dB$.

Remerciements

Nous tenons à remercier M. Eric Saux et M. Frikha Sobhi pour leurs précieux conseils.

Références

- [1] A.O. Boudraa et al, "IF estimation using empirical mode decomposition and nonlinear Teager energy operator", *Proc. IEEE ISCCSP*, pp. 45-48, Hammamet, Tunisia, 2004.
- [2] J.C. Cexus and A.O. Boudraa, "Nonstationary signals analysis by Teager-Hunag Transform (THT)", *Proc. EU-SIPCO*, 5 pages, Florence, Italy, 2006.
- [3] Q. Chen et al, "A B-spline approche for empirical mode decomposition", *Advances in Computational Mathematics*, vol. 24, no. 1-4, pp. 171-195, 2006.
- [4] C. De Boor, *A practical guide to splines*, Springer-Verlag,

New York, 1978.

- [5] N.E. Huang et al., "The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis", *Proc. Royal Society*, vol. 454, no. 1971, pp. 903-995, 1998.
- [6] J.F. Kaiser, "Some useful properties of Teager's energy operator", *Proc. ICASSP.*, vol. 3, pp. 149-152, 1993.
- [7] P. Maragos et al., "Energy separation in signal modulations with applications to speech analysis", *IEEE, Trans. Sig. Proc.*, no. 41, pp. 3024-3051, 1993.
- [8] A. Potamianos and P. Maragos, "A comparison of the energy operator and Hilbert transform approaches for signal and speech demodulation", *Sig. Process.*, vol. 37, pp. 95-120, 1994.
- [9] M. Unser et al., "B-spline signal processing : Part I-Theory. Part II Efficient design and applications", *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol.41, pp.821-848, 1993.