

Détection et Complétion de Filaments: une approche variationnelle et vectorielle

Gilles AUBERT¹, Alexis BAUDOUR^{1,2}, Laure BLANC-FERAUD²

¹ Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné UNSA - Faculté des Sciences
Parc Valrose, 06108 - NICE Cedex 02, France

² Project ARIANA, CNRS/INRIA/UNSA
2004 route des Lucioles, BP 93 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex, France
gaubert@math.unice.fr, alexis.baudour@sophia.inria.fr
laure.blancf@sophia.inria.fr

Résumé – Notre but dans cet article est de proposer une nouvelle méthode de détection et de complétion de filaments fins dans des images 2D ou 3D bruitées. La méthode de détection est basée sur la construction d'un champ de vecteur 3D dont les points de singularité (points de vorticité) correspondent aux filaments. La complétion est alors obtenue par la résolution d'un système de Ginzburg-Landau qui est bien adapté pour l'étude de ce type de singularité. Des résultats numériques sont donnés pour des images 2D et 3D.

Abstract – Our goal in this paper is to propose a new algorithm for the detection and the completion of thin filaments in noisy and blurred 2D or 3D images. The detection method is based on the construction of a 3D vector field whose singularities (vorticity points) correspond to the filaments. The completion is then obtained by solving a Ginzburg-Landau system which is well-adapted to the study of such singularities. Numerical results for 2D and 3D images are given.

Introduction

Nous nous intéressons à la détection de structures fines de type filaments dans des images 2D ou 3D. Ces structures sont souvent rendues floues lors de la phase d'acquisition ce qui les rend similaires à des structures tubulaires. Le but de cet article est de proposer un nouvel algorithme pour la détection et la complétion de filaments assimilés à des courbes 1D dans des images 3D floues et bruitées, par exemple des images de filaments d'actine en microscopie confocale. Trouver un modèle pour la représentation et la détection de structures de codimension 2 dans \mathbb{R}^3 est une question difficile et à notre connaissance peu de travaux ont été effectués [8]. Dans notre travail nous supposons qu'une pr d tection grossière de la direction des filaments dans l'image originale I a été réalisée à l'aide d'un champ de vecteurs $\vec{v}_1(x)$. Nous voulons raffiner cette pr d tection pour retrouver les structures fines originales et compléter les parties manquantes. Pour cela nous assimilons les filaments à des lignes de courants du champ $\vec{v}_1(x)$ et nous construisons le champ magnétique associé \vec{B} . Nous retrouvons les structures fines originales à l'aide des points de singularité du champ \vec{B} .   la suite de cette étape certaines parties des filaments sont manquantes et nous les complétons en cherchant les points de singularité des minimiseurs d'une énergie de type Ginzburg-Landau [7, 6, 2]. Des résultats sont montrés en 2D et en 3D.

1 Détection du squelette des filaments

On notera $D \subset \mathbb{R}^3$ le support de l'image tri-dimensionnelle I et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les trois valeurs propres de la matrice Hessi-

enne associée à I avec $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$. Nous effectuons une pr d tection des filaments en ne gardant que les points où $|\lambda_2 \lambda_3| \geq s$, où s est un seuil prédéfini. Cet ensemble de pr d tection sera noté $M_s = \{x \in D; |\lambda_2 \lambda_3| \geq s\}$. En chaque point pr d tect , \vec{v}_1 désigne le vecteur propre associé à λ_1 et donne la direction des filaments. La figure 4 représente la pr d tection obtenue à l'aide du champ de vecteur \vec{v}_1 sur M_s pour l'image de filament de la figure 3.

L'idée originale est ensuite d'assimiler les filaments à des lignes de courant orientées suivant \vec{v}_1 et de construire le potentiel vecteur \vec{A} et le champ magnétique associé \vec{B} .

$$\vec{A}(x) = \int_{M_s} \frac{\vec{v}_1(y)}{\|\vec{x}y\|} dy \quad \text{pour } x \in D$$

$$\vec{B}(x) = \text{rot } \vec{A} \quad \text{pour } x \in D$$

Nous introduisons également le champ de vecteurs $\vec{B}'(x)$ qui est la projection normalisée de $\vec{B}(x)$ dans le plan orthogonal à $\vec{A}(x)$. Au niveau du filament, le champ de vecteurs \vec{A} est une version régularisée de \vec{v}_1 . Le champ \vec{B}' tourne localement autour des filaments qui sont les points de singularité de ce champ représentent les points de singularité de ce dernier (voir Figure 1).

Définition 1.1 Nous définissons le squelette S d'un ensemble de filaments comme

$$S = \{x \in D, \lim_{y \rightarrow x} \|\nabla \vec{B}'(y)\| = +\infty\}.$$

En pratique pour éviter les fausses alarmes, nous ne gardons que les points du squelette appartenant à l'ensemble $W_d =$

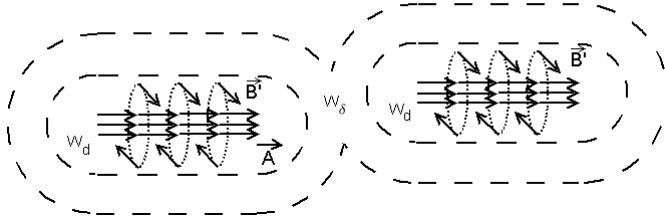


FIG. 1: Représentation de B' , A , W_δ et W_d .

$\{x \in D; \|\overrightarrow{A}(x)\| \geq d\}$, W_d peut être vu comme un voisinage tubulaire des filaments (voir Figure 1). Des résultats sont montrés en section 4.

2 Algorithme de Complétion

Cette première détection peut être imparfaite due à des dégradations ou à des occlusions dans l'image. Certains filaments présentent des coupures. Nous ne pouvons pas utiliser les méthodes classiques d'inpainting [3, 4] pour effectuer la complétion. En effet l'idée générale de ces méthodes consiste à relier les lignes de niveau, mais il n'y a pas de lignes de niveau dans les images de filaments. Nous proposons donc une nouvelle méthode de complétion reposant sur la théorie de Ginzburg-Landau classiquement utilisée en physique pour l'étude de singularités de faible dimension.

Plus précisément les modèles de Ginzburg-Landau sont dédiés à l'étude des singularités de codimension k pour une fonction u de \mathbb{R}^{n+k} dans \mathbb{R}^k [7, 5]. Nous cherchons des filaments dans \mathbb{R}^3 , donc $k = 2$ et nous avons besoin d'utiliser un champ de vecteurs à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Une énergie de Ginzburg-Landau est du type

$$E_\epsilon(u) = \int_{\Omega} \left(\|\nabla u\|^2 + \frac{(1 - |u|^2)^2}{\epsilon^2} \right) dx$$

avec des conditions de bord sur la frontière $\partial\Omega$. Dans notre application nous choisissons $\Omega = D - W_d$ et la condition de bord est $u = \overrightarrow{B}'$ sur ∂W_d (voir [7]).

Nous remarquons que pour un ϵ petit, le terme $\frac{1}{\epsilon^2}(1 - |u|^2)^2$ oblige la norme d'un minimum $\overrightarrow{u}_\epsilon$ à être proche de 1. Pour $\epsilon > 0$ fixé, il est facile de montrer que $E_\epsilon(u)$ admet un minimum u_ϵ sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) = \{u \in L^2(\Omega)^2; \nabla u \in L^2(\Omega)^6\}$. Quand $\epsilon \rightarrow 0$ on montre [7] que u_ϵ tend vers une fonction u_* et dans la théorie générale de Ginzburg-Landau, l'ensemble des singularités de u_* c'est à dire l'ensemble des points x tels que

$$\lim_{y \rightarrow x} \|\nabla u_*(y)\| = +\infty,$$

est un ensemble de codimension 2 établissant des connexions de longueur minimale, i.e. la complétion désirée. Pour les simulations numériques on effectue un simple seuillage sur la norme du gradient afin d'obtenir l'ensemble des points de singularité de u_* .

En pratique, pour éviter des connexions entre des filaments trop éloignés, nous effectuons notre algorithme sur un sous ensemble de D : $W_\delta = \{x \in D; \|\overrightarrow{A}(x)\| \geq \delta\}$ avec $d \ll \delta$

(voir Figure 1). Le paramètre δ permet de donner une longueur maximale à la complétion des filaments. L'ensemble Ω dans l'énergie de Ginzburg-Landau sera donc $\Omega = W_\delta - W_d$.

3 Algorithme d'Alouges

Pour minimiser l'énergie de Ginzburg-Landau, on utilise une version discrète de l'algorithme d'Alouges (voir [1]). Nous allons détailler l'algorithme d'Alouges dans le cas continu, montrer la décroissance de l'énergie au cours de l'algorithme et énoncer un résultat de convergence.

On définit pour tout champ de vecteur $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$:

$$K_u = \{w \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \text{ tels que } w(x) \cdot u(x) = 0 \text{ p.p.}\}$$

Pour un champ donné u on définit $w(u)$ à partir de la proposition suivante:

Proposition 3.1 *Le problème*

$$\text{minimiser } \int_{\Omega} \|\nabla(u+w)\|^2 dx \text{ pour } w \in K_u \quad (1)$$

admet une solution unique appelée $w(u)$.

L'algorithme est alors le suivant:

1. on se donne u_0 une fonction initiale.
2. $\forall m > 0$, on résout le problème (1) et on note $w_m = w(u_m)$, et on choisit $v_m = u_m + w_m$.
3. on pose $u_{m+1} = \frac{u_m + w_m}{\|u_m + w_m\|}$.

Comme w_m est nul au bord de Ω on en déduit que si u_m vérifie les conditions de bord, alors u_{m+1} aussi.

On va appliquer la proposition suivante pour montrer la décroissance de l'énergie dans l'algorithme.

Proposition 3.2

Si $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ et vérifie $\|v(x)\| \geq 1$ p.p. pour tout x . Alors on a: $\frac{v}{\|v\|} \in H^1(\Omega, S^2)$, de plus

$$\|\nabla(\frac{v(x)}{\|v(x)\|})\| \leq \|\nabla v(x)\| \quad (2)$$

Donc d'après cette proposition $E(u_{m+1}) \leq E(v_m)$ et le fait que $E(v_m) \leq E(u_m)$, on peut assurer que l'énergie décroît au cours de l'algorithme. On peut montrer de plus la convergence de l'algorithme quand m tend vers l'infini vers une fonction unitaire u qui satisfait l'équation harmonique suivante :

$$\Delta u = -\|\nabla u\|^2 u.$$

4 Résultats

Nous avons testé notre algorithme de détection sur une image synthétique 3D de 3 filaments rectilignes convoluée avec une fonction gaussienne, à laquelle on a rajouté un bruit gaussien (PSNR=7.2 Db). On a calculé le champ \overrightarrow{v}_1 restreint à M_s (voir Figure 4), puis le champ magnétique associé \overrightarrow{B}' . On retrouve l'image originale en déterminant le squelette du champ \overrightarrow{B}' (voir Figure 2).

Nous avons appliqué notre algorithme de détection et de complétion sur une image 2D de deux filaments décalés convoluée avec une fonction gaussienne. Un bruit gaussien est également présent dans cette image (PSNR=7.06 Db). Après avoir déterminé le champ \vec{B}' associé, on utilise l'énergie de Ginzburg-Landau pour obtenir la détection et la complétion. On retrouve les deux filaments originaux et on obtient un complétion rectiligne (voir Figure 3).

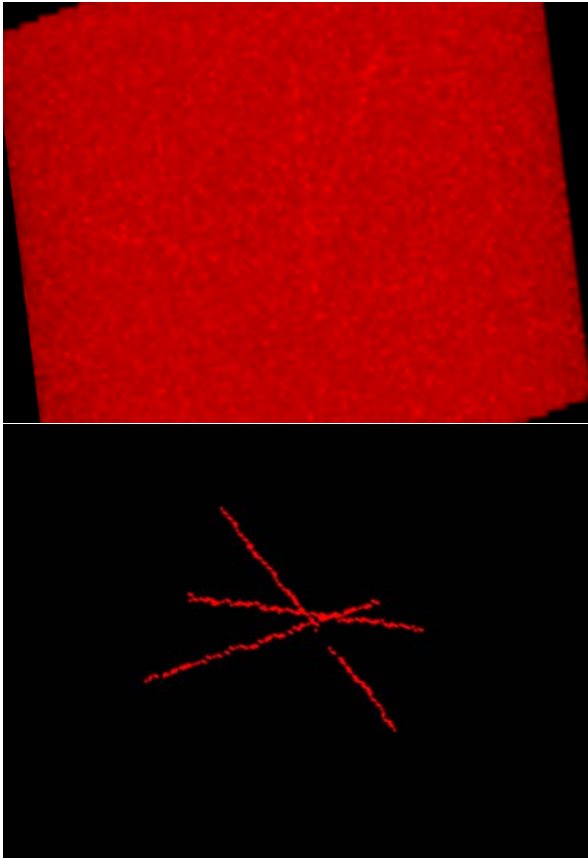


FIG. 2: Résultat de détection pour une image 3D de filament avec un bruit gaussien (PSNR=7.2 Db).

5 conclusion

Nous avons proposé une méthode simple et robuste pour détecter des filaments dans des images 2D ou 3D. Cet algorithme est basé sur le calcul des vecteurs propres de la matrice Hessienne de l'image et sur la représentation des filaments par le champ de vecteur \vec{B}' . Nous utilisons ce champ de vecteur et l'énergie de Ginzburg-Landau pour compléter les filaments. Nous avons présenté des résultats en 2D pour la complétion et en 3D pour la détection, nous présenterons des résultats en 3D pour de images réelles pour la complétion dans un travail futur.

References

- [1] F. Alouges. A new algorithm for computing liquid crystal stable configurations: The harmonic mapping case.

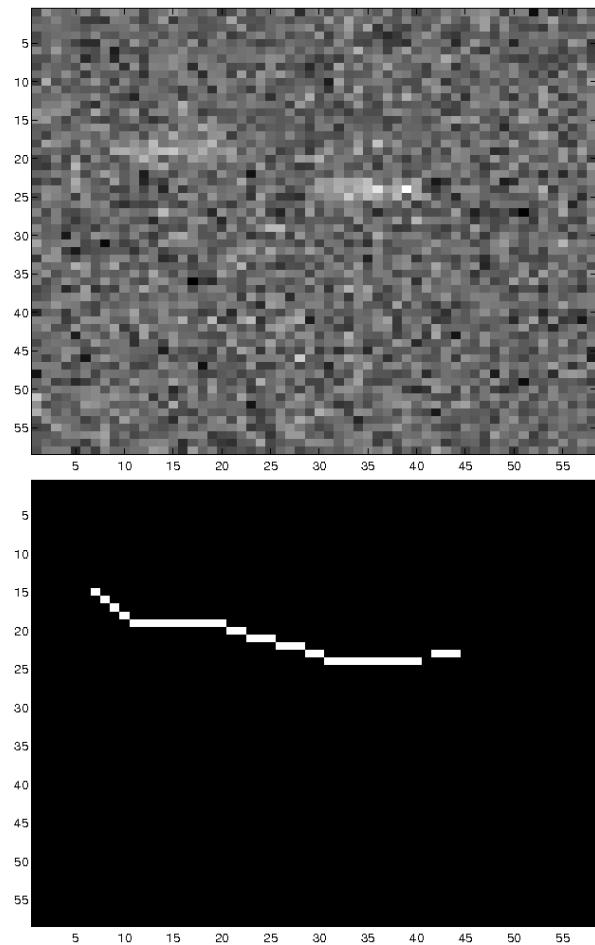


FIG. 3: En haut: Image de filaments avec un bruit gaussien (PSNR=7.06 Db). En bas: Résultat de détection et de complétion.

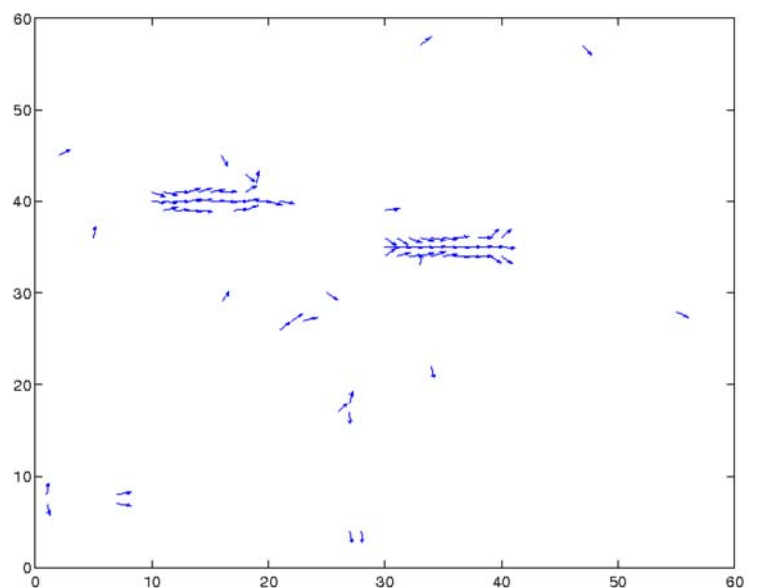


FIG. 4: représentation $v_1(x)$ associé à l'image de la figure 3 pour $x \in M_s$.

J.Numer. Anal., 34(5):1708–1726, 1997.

- [2] G. Aubert, J. Aujol, and L. Blanc-Féraud. Detecting codimension two objects in an image with Ginzburg-Landau models. *International Journal of Computer Vision*, 65(1):29–42, 2005.
- [3] C. Ballester, J.M Bertalmio, V. Caselles, and J. Sapiro, G. Verdera. Filling-in by joint interpolation of vector fields and gray levels. *Transactions on Image Processing, IEEE*, 10:1200–1211, August 2001.
- [4] M. Bertalmio, V Caselles, G. Haro, and G. Sapiro. *The Handbook of Mathematical Models of Computer Vision*. Springer Verlag, 2005.
- [5] F. Bethuel, F. Brezis, and F. Hélein. *Ginzburg-Landau Vortice*. Birkhauser, 1994.
- [6] F. Bethuel, G. Orlandi, and D. Smets. Convergence of the parabolic Ginzburg-Landau equation to motion by mean curvature. *Ann. of Math.* 163, (1):37–163, 2006.
- [7] F. H. Lin and T. Rivière. Complex Ginzburg-Landau equation in high dimension and codimension two area minimizing currents. *J.Eur.Math.Soc.*, (1):237–311, 1999.
- [8] S. Ruuth, B. Merriman, J. Xin, and S. Osher. Diffusion generated motion by mean curvature for filaments. *Journal of Nonlinear Science*, 11(6), January 2001.