

# Etude de l'acquisition des données en TEP 2D

Yannick GRONDIN<sup>1</sup>, Laurent DESBAT<sup>1</sup>, Michel DESVIGNES<sup>2</sup>, Stéphane MANCINI<sup>2</sup>, Michel DEFRISE<sup>3</sup>

<sup>1</sup>TIMC-IMAG, équipe GMCAO

Institut d'Ingénierie de l'Information de Santé (In3S) Faculté de Médecine, 38706 La Tronche cedex, France

<sup>2</sup>GIPSA-DIS

Domaine Universitaire, 961 rue de Houille Blanche - BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères cedex -France

<sup>2</sup>Université Libre de Bruxelles

CP217-boulevard du Triomphe, 1050 Bruxelles, Belgique

yannick.grondin@imag.fr, laurent.desbat@imag.fr

michel.desvignes@lis.inpg.fr, stephane.mancini@lis.inpg.fr

Michel.Defrise@vub.ac.be

**Résumé** – La Tomographie par Emissions de Positons (TEP) est une modalité d'imagerie nucléaire: on injecte au patient un traceur radioactif qui se fixe sur des constituants de l'organisme jouant un rôle important dans un processus physiologique dont on désire acquérir des images. En TEP, le radiotracer est un émetteur  $\beta^+$  ou positron. Après avoir perdu son énergie cinétique au terme d'un parcours de l'ordre d'un millimètre, le positron s'annihile avec un électron pour donner deux photons  $\gamma$ , émis dans des directions opposées. La détection se fait à l'aide de plusieurs couronnes de détecteurs qui enregistrent en coïncidence l'arrivée des deux photons. La trajectoire linéaire formée par le trajet des deux photons dans le cas idéal, appelée LOR (Line Of Response) constitue la donnée principale qu'acquiert le système. Le programme de reconstruction d'images s'intéresse au problème inverse: à partir des données de toutes les LOR issues des différentes émissions, il localise le lieu d'émission et ainsi fournit la distribution spatiale du radiotracer dans le corps du patient. Le but de ce travail est de définir un schéma de compression de données, i.e. réduire le nombre de LOR, en étudiant le système d'échantillonnage des LOR dans le but d'accélérer le temps de reconstruction des images. On se limite à l'acquisition en mode 2D (ou 3D à coupes parallèles): uniquement les LOR orthogonales à l'axe du scanner, dont les extrémités appartiennent à une même couronne, sont prises en compte. Pour cela, on s'appuie sur les travaux [1] et [2] qui, dans une géométrie similaire en tomographie X, ont établi les conditions d'échantillonnage efficaces en utilisant la paramétrisation fan beam. Dans ce travail, on utilise une autre paramétrisation plus adaptée à la TEP et on en déduit des schémas d'échantillonnage. Cependant, le schéma efficace n'étant pas compatible avec la géométrie des détecteurs, nous le mettons à profit dans un schéma de compression du nombre de LOR, appelé mashing.

**Abstract** – Positron Emission Tomography (PET) is a modality of nuclear imaging. The patient is injected with a radiotracer designed to target specific physiological processes which we want to acquire images. In PET, the radiotracer is a  $\beta^+$  or positron emitter. Once the positron is emitted, he loses its kinetic energy within around 1 millimeter path length and annihilates with an electron. It results in the back-to-back emission of two  $\gamma$  photons detected in coincidence by several rings of detectors. The linear path formed by the travel of the two photons in the ideal case is called a Line Of Response (LOR) and are the recorded data. The aim of the image reconstruction program is to localize the annihilation place in order to estimate the spatial radiotracer distribution inside the patient's body. The aim of the current work is to define a data compression scheme that enables to reduce the time of the reconstruction step. To do that, we study the sampling schemes of the LOR's. This study is focussed on the 2D acquisition mode where only the LOR's orthogonal to the scanner axis are taken into account. Previous work ([1] and [2]) have derived sampling schemes in x-ray tomography using the fan beam parameterisation. For PET, we introduce a more natural parameterisation and derive sampling schemes. However, the most efficient sampling scheme being inadequate with the detectors geometry, a data compression scheme ("mashing") based on the efficient sampling points is derived.

## 1 Paramétrisation naturelle de la TEP 2D

En tomographie X hélicoïdale, une source de rayon X irradie successivement des sections parallèles du patient. Le faisceau de rayons X a une forme d'éventail, d'où l'appellation de géométrie fan beam. Les détecteurs sont dans ce cas considérés linéaires et situés à l'opposé de la source, l'ensemble étant en rotation autour du patient. Soit  $f$  la fonction d'atténuation 3D du patient. Supposons que  $f$  a une fréquence de coupure  $\Omega$ , et qu'elle est contenue dans

un support cylindrique de rayon  $\rho$ , lui même compris dans un scanner de rayon  $r$ . On peut ainsi définir la transformée en rayon X 3D de  $f$  dans la paramétrisation fan beam (3DFBXRT) [2] par :

$$Xf(\beta, \alpha, t) = \int_{L_{\beta, \alpha, t}} f(x) dx \quad (1)$$

$Xf(\beta, \alpha, t)$  définit l'intégrale de  $f$  suivant les droites  $L_{\beta, \alpha, t}$  qui appartiennent à des plans orthogonaux à l'axe du scanner localisées à la coordonnée axiale  $t$ . Dans un plan transversal,  $L_{\beta, \alpha, t}$  relie la source localisée à  $r(\cos\beta, \sin\beta)$  avec  $\beta \in [0, 2\pi[$ , et le détecteur à la position angulaire

$\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  (Fig 1.a). En Tomographie par Emission de Positons (TEP), une ligne de réponse (LOR) relie les deux détecteurs qui ont répondu en coïncidence à l'interaction d'un photon. On peut donc les localiser par deux coordonnées angulaires par rapport à l'origine de la couronne,  $\phi$  et  $\psi$  (Fig 1.b). Soit  $g$  la 3DFBXRT exprimée avec la variable  $z = (\phi, \psi, t)^T \in [0, 2\pi[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$  (où  $T$  signifie la transposée) et soit  $e_\pi = (0, \pi, 0)^T$ .  $g$  peut être exprimé en fonction de  $Xf$  par la relation :

$$g(z) = Xf(\mathbf{A}(z - e_\pi)) \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$\mathbf{A}$  est la matrice qui permet d'exprimer les coordonnées  $(\beta, \alpha, t)$  en fonction des variables  $(\phi, \psi, t)$  mais il faut tenir compte du déphasage introduit par  $e_\pi$ .

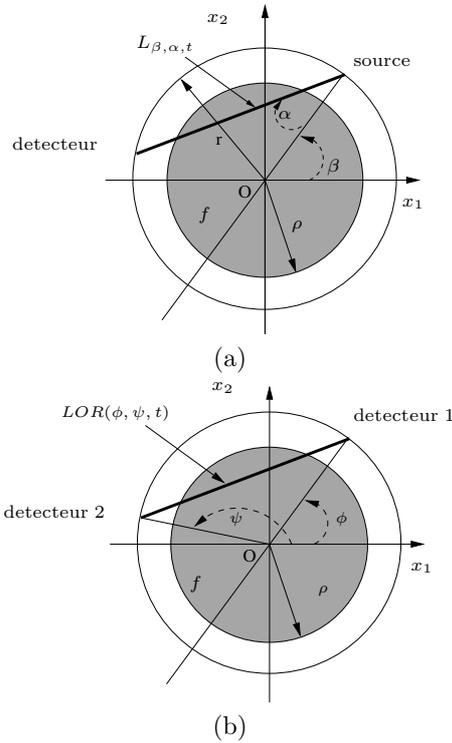


FIG. 1 – Paramétrisation de la 3DFBXRT en tomographie X (a) et celle proposée en TEP 2D (b) dans un plan transversal de coordonnée axiale  $t$

## 2 Echantillonnage de $g(\phi, \psi, t)$

### 2.1 Support essentiel de la transformée de Fourier de $g(\phi, \psi, t)$ et schémas d'échantillonnage

La transformée de Fourier de  $g$  peut être également exprimé en fonction de la transformée de Fourier de  $Xf$  et se déduit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \int_{[0;2\pi[} \int_{[0;2\pi[} \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-i\langle z, \xi \rangle} dz \\ &= \int_{[0;2\pi[} \int_{[0;2\pi[} \int_{\mathbb{R}} Xf(\mathbf{A}(z - e_\pi)) e^{-i\langle z, \xi \rangle} dz \\ &= \frac{e^{-im\pi}}{|\det \mathbf{A}|} \int_{[0;2\pi[} \int_{[0;2\pi[} \int_{\mathbb{R}} Xf(z) e^{-i\langle \mathbf{A}^{-1}z, \xi \rangle} dz \\ &= \frac{e^{-im\pi}}{|\det \mathbf{A}|} \int_{[0;2\pi[} \int_{[0;2\pi[} \int_{\mathbb{R}} Xf(z) e^{-i\langle z, \mathbf{A}^{-T}\xi \rangle} dz \\ &= \frac{e^{-im\pi}}{|\det \mathbf{A}|} \widehat{Xf}(\mathbf{A}^{-T}(\xi)) \end{aligned} \quad (3)$$

où  $\xi = (k, m, \tau)^T \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\langle z, \xi \rangle = k\phi + m\psi + \tau t$ , définit un produit scalaire. On en déduit que  $|\widehat{g}(\xi)|$  est négligeable si et seulement si  $|\widehat{Xf}(\mathbf{A}^{-T}(\xi))|$  est négligeable, c'est à dire, si et seulement si  $\mathbf{A}^{-T}(\xi)$  appartient au support essentiel de  $\widehat{Xf}$ . L'expression analytique du support essentiel de  $\widehat{Xf}$  est connue et donnée dans [2]. Ainsi, par un changement de variables, on détermine le support essentiel de  $\widehat{g}(k, m, \tau)$ , noté  $K$  (Fig 2.a) :

$$K = \{(k, m, \tau) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}, |k - m|^2 + r^2\tau^2 < \Omega^2 r^2; \quad (4) \\ r|k + m| < \rho|k - m|\}$$

Des simulations utilisant le programme Monte Carlo d'imagerie nucléaire GATE ([3]) nous a permis de vérifier le support de la transformée de Fourier de  $g$  (Fig 2.b). Dans l'étude des schémas d'échantillonnage, nous allons considérer le cas où  $\rho = r$ , sachant que pour le cas réel où  $\rho$  est de l'ordre de  $\frac{2}{3}r$ , ils se généralisent facilement. L'étude des schémas d'échantillonnage fait appel aux conditions de non recouvrement de Shannon : le réseau d'échantillonnage (dans l'espace direct) généré par la matrice  $\mathbf{W}$ , doit être choisi de manière que dans l'espace réciproque (Fourier), les translatés de  $K$  suivant les vecteurs du réseau dual ne se recouvrent pas, i.e.  $K + 2\pi\mathbf{W}^{-T}l, l \in \mathbb{Z}^3$  sont deux à deux disjoints. Le schéma standard le plus compact est généré par la matrice diagonale suivante :

$$2\pi\mathbf{W}_S^{-T} = \Omega \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

soit en inversant et en prenant la transposé : (5)

$$\mathbf{W}_S = \frac{2\pi}{\Omega r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2} \end{pmatrix}$$

On a dans ce cas :  $|\det \mathbf{W}_S| = (\frac{2\pi}{\Omega r})^3 \frac{r}{2}$ .

Un autre schéma d'échantillonnage possible est généré par la matrice hexagonale :

$$2\pi\mathbf{W}_H^{-T} = \Omega \begin{pmatrix} r & 0 & \frac{r}{\sqrt{3}} \\ 0 & r & \frac{r}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{r}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

soit :

$$\mathbf{W}_H = \frac{2\pi}{\Omega r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{r}{2\sqrt{3}} & -\frac{r}{2\sqrt{3}} & \frac{r}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

On a dans ce cas :  $|\det \mathbf{W}_H| = \left(\frac{2\pi}{\Omega r}\right)^3 \frac{r}{\sqrt{3}}$ , ce qui signifie que le schéma hexagonal est  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  plus efficace que le schéma standard. Les figures 3.a et 3.b illustrent les conditions de non-recouvrement des ensembles  $K + 2\pi\mathbf{W}^{-T}l, l \in \mathbb{Z}^3$  dans le domaine de Fourier pour les deux cas. Le réseau d'échantillonnage dans le plan  $(k, m)$  est une grille carrée dans le schéma standard comme dans le schéma hexagonal. C'est une conséquence du lien entre les deux variables angulaires  $(\phi, \psi)$  qui sont échantillonnées de la même façon  $((\phi, \psi)$  désigne une paire de détecteurs). La différence entre les deux réseaux  $\mathbf{W}_S\mathbb{Z}^3$  et  $\mathbf{W}_H\mathbb{Z}^3$  provient de l'empilement vertical des grilles carrées qui sont simplement superposées dans le schéma standard, alors qu'elles suivent un schéma hexagonal dans le plan  $(v, \tau)$  dans le deuxième cas, pavant de manière plus compact l'espace de Fourier. Une description plus détaillée est proposée dans [2]. Dans l'espace direct, les deux schémas suggèrent l'échantillonnage suivant :

- schéma standard : le pas axial entre chaque plan transversal est de  $\frac{\pi}{\Omega}$  pour un pas angulaire à l'intérieur du plan transversal de  $\frac{2\pi}{\Omega r}$ .
- schéma hexagonal : par souci de simplification du raisonnement, prenons  $r = 1$ , ce qui ne nuit pas à la généralité. Soit  $l = (l_1, l_2, l_3)^T \in \mathbb{Z}^3$  :

$$\mathbf{W}_H l = \frac{2\pi}{\Omega} \left( l_1, l_2, -\frac{l_1 + l_2}{2\sqrt{3}} + \frac{l_3}{\sqrt{3}} \right)^T \quad (7)$$

- pour  $l_1 + l_2$  pair, i.e.  $l_1 + l_2 = 2p, p \in \mathbb{Z}$ , on obtient pour la coordonnée verticale de  $\mathbf{W}_H l$  :  $\frac{2\pi}{\Omega} \frac{p+l_3}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\Omega} \frac{p'}{\sqrt{3}}, p' \in \mathbb{Z}$
  - pour  $l_1 + l_2$  impair, i.e.  $l_1 + l_2 = 2p + 1, p \in \mathbb{Z}$ , on obtient pour la coordonnée verticale de  $\mathbf{W}_H l$  :  $\frac{2\pi}{\Omega} \left( \frac{p+l_3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi}{\Omega} \left( \frac{p'}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), p' \in \mathbb{Z}$
- ainsi, pour chaque plan transversal séparé d'un pas axial de  $\frac{2\pi}{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\Omega\sqrt{3}}$ , seulement la moitié des LOR est nécessaire. Pour les anneaux de positions axiales  $\frac{j\pi}{\Omega\sqrt{3}}, j \in \mathbb{Z}$ , uniquement les événements enregistrés par deux détecteurs de positions de parité identique sont pris en compte. Pour les anneaux voisins d'indices  $j + 1$  et  $j - 1$ , ce sont les événements coincidents entre deux détecteurs de parité différente qui sont pris en compte. En résumé, dans le cas hexagonal, le pas axial entre couronne est de  $\frac{\pi}{\Omega\sqrt{3}}$  et le pas angulaire est toujours de  $\frac{2\pi}{\Omega r}$ , mais avec un entrelacement des LOR qui sont prises en compte. Tous les détecteurs étant néanmoins indispensables, il y a donc suréchantillonnage dans les plans transversaux : on retrouve ainsi un résultat démontré dans [4]. Par ailleurs, nous démon-

trons également que la fréquence de l'échantillonnage axial doit presque doubler pour être efficace, résultat demeuré au stade empirique jusqu'à présent [5].

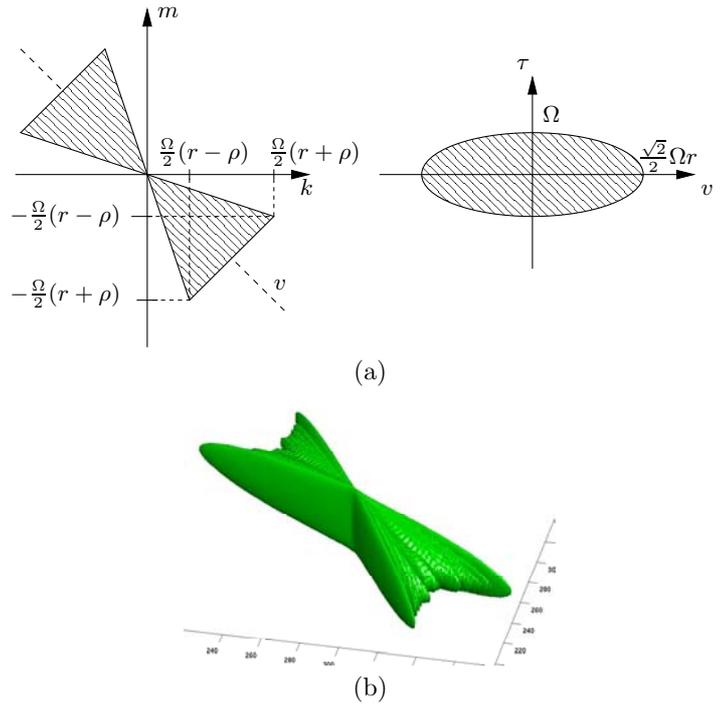


FIG. 2 – (a) Support essentiel de la transformée de Fourier de  $g(\phi, \psi, t)$  dans les plans  $(k, m)$  et  $(v, \tau)$ . (b) Support provenant de données simulées représenté en 3D

## 2.2 Schéma de mashing 2D

L'étude des conditions d'échantillonnage amène naturellement à l'utilisation de détecteurs rectangulaires pour rendre l'acquisition des données efficace. Cependant, en pratique, ce sont des détecteurs de forme carrée qui équipent le plus souvent les scanners. Pour mettre le schéma hexagonal à profit, on peut utiliser les données suréchantillonnées dans les plans transversaux en les regroupant dans des mailles centrées sur les points d'échantillonnage du réseau  $\mathbf{W}_H\mathbb{Z}^3$  [6]. Nous proposons un schéma de mashing 2D qui compresse le nombre de LOR d'un facteur environ 24, mais au prix d'une dégradation théorique de la résolution de l'ordre de  $\sqrt{3}$  (Fig 4).

## 3 Conclusion

Nous avons établis les conditions d'échantillonnage dans le mode d'acquisition 2D du scanner TEP en introduisant une paramétrisation plus naturelle. Le schéma d'échantillonnage qui s'avère le plus efficace est de nature hexagonale mais n'est pas compatible avec la géométrie des détecteurs des scanners courants. Nous proposons alors un schéma de mashing 2D permettant de compresser les données en assemblant les LOR contenues dans des mailles centrées sur le réseau hexagonal. Des simulations numériques et Monte Carlo introduisant le bruit poissonien vont

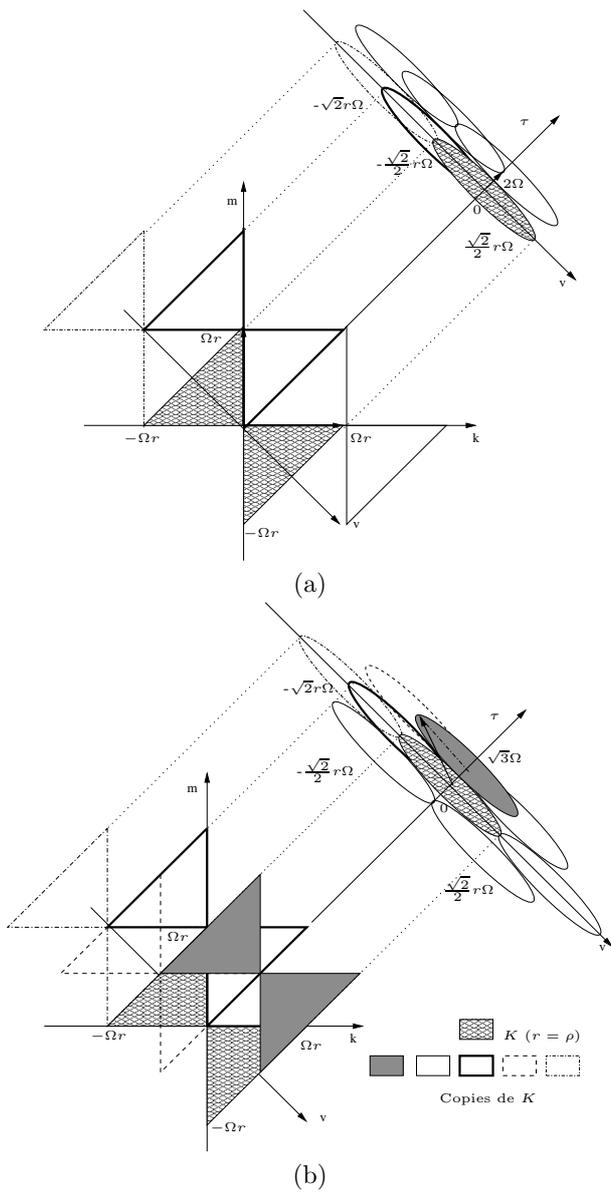


FIG. 3 – Schéma d’échantillonnage carré (a) et schéma hexagonal entrelacé (b) dans le cas où  $r = \rho$ . Les deux copies de  $K$  en pointillé et colorée représentées dans le plan  $(k, m)$  dans (b), sont situées à la position  $\tau = \sqrt{3}\Omega$ , comme on peut le voir dans le plan  $(v, \tau)$ . Pour vérifier les conditions de non-recouvrement de Shannon, il faut vérifier que  $K$  ne possède aucune intersection avec ses copies translatées suivant le réseau d’échantillonnage. Le cas le moins trivial à montrer est celui de la copie colorée qui semble intersecté sur les coins avec  $K$  d’après la représentation dans le plan  $(k, m)$ . Cependant, dans le plan  $(v, \tau)$ , l’intersection semble avoir lieu au niveau du centre de l’ellipse. L’intersection étant à deux endroits différents, ces ensembles sont donc disjoints.

être entrepris pour vérifier la qualité du meshing sur des données qui seront ensuite reconstruites.

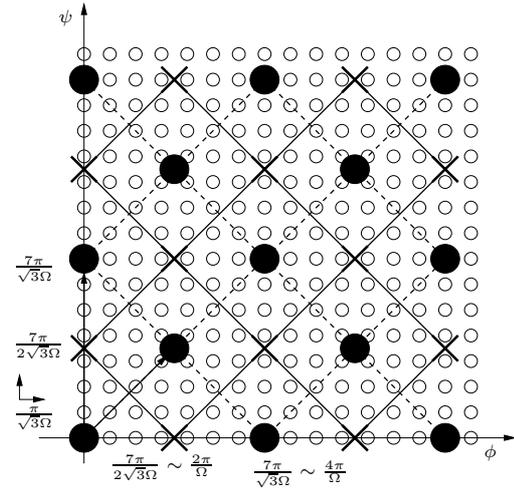


FIG. 4 – Schéma de meshing centré sur les points du réseau hexagonal. Les LOR sont mesurées dans des plans transversaux aux positions  $t = \frac{j\pi}{\Omega\sqrt{3}}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Les points blancs représentent les LOR suréchantillonnées avec des détecteurs carrés. Les points noirs et les croix sont les centres de mailles de meshing, respectivement pour les plans indexés  $j$  pairs et  $j$  impairs. En moyenne, 24.5 LOR peuvent être regroupées dans une maille.

### Références

- [1] F. Natterer, *Sampling in fan-beam tomography*, SIAM J.Appl.Math. **53** :358–380, 1993
- [2] L. Desbat, S. Roux, P. Grangeat and A. Koenig, *Sampling conditions of 3D parallel and fan-beam x-ray CT with application to helical tomography*, Phys.Med.Biol. **49** :2377–2390, 2004
- [3] S. Jan et al, *GATE : a simulation toolkit for PET and SPECT*, Phys.Med.Biol. **49** :4543–4561, 2004
- [4] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, Nex York :Wiley, 1986
- [5] D. Witherspoon et G. Muehllelner, *Treatment of axial data in three-dimensional PET*, J.Nucl.Med. **28** :1717–1724, 1987
- [6] T Rodet et al : A study of data sampling in PET using planar detectors. 2003 IEEE MIC, Portland, Oregon, USA