

Une analyse du problème de l'égalisation basée sur la théorie des jeux

F. de S. CHAVES¹, F. G. FERNANDES¹, R. R. F. ATTUX², R. SUYAMA¹, R. R. LOPES¹, J. M. T. ROMANO¹

DSPCom – Laboratoire de Traitement du Signal appliqué aux Communications - FEEC – Université de Campinas – C.P. 6101
13083-970 – Campinas – SP – Brésil

¹ DECOM - Département de Communications, ² DCA - Département d'Informatique et Automatique Industrielle

{fabiano, fgfernandes, rsuyama, rlopes, romano}@decom.fee.unicamp.br, attux@dca.fee.unicamp.br

Résumé – Dans le présent travail, nous proposons une nouvelle approche d'analyse pour le problème classique de l'égalisation de canaux, basée sur la théorie des jeux. La méthode d'analyse présentée nous permet de revisiter quelques résultats classiques, comme l'initialisation "center-spike" et le filtre couplé pour la minimisation du rapport signal à bruit en sortie, et d'introduire de remarques assez particulières qui ouvrent des perspectives intéressantes pour la recherche dans le domaine.

Abstract – In this work, we propose a new approach to the analysis of the classical channel equalization problem based on game theory. The presented methodology allows us to revisit some well-known results - such as the center-spike initialization and the matched filter – and to introduce some ideas that open interesting research perspectives in the focused field of study.

1. Introduction

Medio tutissimus ibis – Ovide, Métamorphoses, II, 137.

Le problème d'égalisation de canaux de communication est parmi les plus classiques et importants en traitement du signal. Dans une modélisation à temps discret, aussi bien le canal que l'égaliseur sont considérés, dans la plupart des cas, comme des filtres numériques à réponse impulsionnelle finie (FIR), de sorte que l'on peut exprimer le signal à la réception par :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)s(n-k) + b(n) \quad (1)$$

où $s(n)$ est le signal transmis, $h(n)$ est la séquence des éléments de la réponse impulsionnelle du canal et $b(n)$ le bruit blanc aditif de variance σ_b^2 . Si l'on pose $\mathbf{x}(n) = [x(n) \dots x(n-N+1)]^T$, il vient :

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{H}\mathbf{s}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{h} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{h} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(n) \\ s(n-1) \\ \vdots \\ s(n-N+1) \end{bmatrix} \quad (2)$$

où \mathbf{H} est dite la matrice de convolution du canal, avec $\mathbf{h} = [h(0) \dots h(M-1)]^T$. À la sortie de l'égaliseur on trouve le signal $y(n)$ donné par :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w(k)x(n-k) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) \quad (3)$$

où $\mathbf{w} = [w(0) \dots w(N-1)]^T$ est le vecteur des coefficients de l'égaliseur. Ce vecteur est optimal au sens de Wiener quand il minimise le critère :

$$J_w = E[s(n-l) - y(n)]^2, \quad (4)$$

ce qui nous amène à la solution de Wiener-Hopf [1] :

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}, \quad (5)$$

où \mathbf{R} est la matrice d'autocorrélation du signal reçu $x(n)$ et \mathbf{p} est le vecteur de corrélation entre $x(n)$ et le signal transmis $s(n-l)$, étant l un retard d'égalisation à être choisi ou estimé. Il est donc bien clair que des différentes solutions de Wiener sont obtenues selon le choix du retard. On peut donc dire que le critère de Wiener est multimodal par rapport aux paramètres \mathbf{w} et l [2]. En effet, des solutions sous-optimales sont atteintes pour des différents retards, chacune associée à une différente valeur d'erreur quadratique résiduelle, donnée par [1] :

$$EQM_{Wiener} = \sigma_s^2 - \mathbf{p}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}, \quad (6)$$

où σ_s^2 correspond à la puissance du signal transmis. Cela met en évidence l'importance d'une correcte estimation du retard pour le projet de l'égaliseur.

Dans le procès de minimisation de l'erreur quadratique moyenne J_w , l'égaliseur de Wiener tends à compenser l'effet du canal sur le signal transmis, tout en prenant aussi en compte le bruit. En effet, dans l'absence de bruit, il est facile à montrer que, pour un N donné, w_o fournit la meilleure approximation RIF d'un filtre inverse au canal. Autrement dit, l'égaliseur et le canal ont des rôles opposés, ce que nous motive à les étudier à l'aide d'une approche basée sur la théorie des jeux, un outil d'optimisation et d'analyse issu de l'étude de conflits d'intérêts. Cela nous permet de revisiter, avec une démarche originelle, quelques résultats classiques – comme la stratégie de l'initialisation center-spike [3] et la configuration du filtre couplé [4] – et aussi d'obtenir des résultats originaux d'analyse, tels que nous présentons dans la suite.

2. Théorie de jeux à somme nulle avec deux joueurs

La théorie de jeux est classiquement employée dans l'analyse et la formulation de stratégies de décision dans des problèmes caractérisés par des conflits d'intérêt. Il est observé, plus récemment, un croissant intérêt par les outils de théorie des jeux de la part de la communauté de recherche en télécommunication et traitement du signal [6-8].

Les trois éléments de base d'un jeu sont :

- Les joueurs ou agents de décision.
- L'espace de stratégies. Quand ces stratégies correspondent, d'une façon déterministe, à l'ensemble de décisions possibles, elles sont dites stratégies pures. D'autre part, si l'on associe aux possibles décisions une distribution de probabilité, la stratégie est dite mixte.
- Les fonctions objectif. Ils s'agitent des critères qui représentent l'intérêt individuel d'un joueur et qui dépendent des décisions des autres joueurs. Le jeu est dit à somme nulle quand la somme de ces fonctions vaut zéro.

Dans le cas de somme nulle avec deux joueurs, le jeu est forcément non-coopératif et les deux joueurs ont des objectifs opposés. Dans ce contexte de compétition, les gains d'un joueur correspondent exactement aux pertes de l'autre. Le jeu peut encore être classifié comme statique, quand les joueurs décident simultanément, ou dynamique, quand le procès de décision est séquentiel.

Dans ce travail, l'espace de stratégies est considéré fini de sorte que le jeu peut être représenté par une matrice $\mathbf{J} = \{J(l_i, h_j)\}$, avec $i \in \{1, \dots, M\}$ et $j \in \{1, \dots, N\}$, telle que illustrée par la Fig. 1. Le premier joueur (minimisateur) a M lignes de la matrice \mathbf{J} comme possibles stratégies pures de décision, tandis que l'espace de stratégies pures du deuxième joueur (maximisateur) est composé par les N colonnes de la matrice \mathbf{J} . Chaque

élément de la matrice correspond valeur de la fonction de coût, étant donné un pair de décisions des joueurs.

		Joueur 2: Maximisateur				
		$J(l_1, h_1)$	\dots	$J(l_1, h_j)$	\dots	$J(l_1, h_N)$
Joueur 1: Minimisateur	$J(l_1, h_1)$	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
	$J(l_i, h_1)$	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
	$J(l_M, h_1)$	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
		$J(l_M, h_1)$	\dots	$J(l_M, h_j)$	\dots	$J(l_M, h_N)$

Figure 1: Matrice (\mathbf{J}) d'un jeu de deux joueurs.

2.1 Stratégies d'assurance pures et solution d'équilibre

Considérons d'abord un jeu statique et joué une seule fois. Dans ce cas, chaque joueur cherche à assurer un niveau de performance individuelle, indépendamment de la décision de l'opposant. Cette valeur de performance est dite niveau d'assurance, à être atteint par une stratégie d'assurance. Alors, quand il se décide pour sa stratégie d'assurance, ligne i^* , le joueur 1 aura garantie que le résultat du jeu sera égal ou inférieur à son niveau d'assurance, défini par:

$$\bar{V}(\mathbf{J}) \triangleq \max_j J(l_{i^*}, h_j) \leq \max_j J(l_i, h_j), \quad i = 1, \dots, M \quad (7)$$

De même, il vient pour le niveau d'assurance du joueur 2:

$$\underline{V}(\mathbf{J}) \triangleq \min_i J(l_i, h_{j^*}) \geq \min_i J(l_i, h_j), \quad j = 1, \dots, N \quad (8)$$

où j^* représente son stratégie d'assurance.

Une solution d'équilibre est caractérisée par l'absence d'intérêt, de la part d'un joueur, de modifier sa décision étant donné que cela l'amènerait à un résultat moins favorable. Pour les jeux statiques, l'adoption de stratégies d'assurance pures ne mène pas à des solutions d'équilibre, sauf si l'on trouve les mêmes niveaux d'assurance pour les des deux joueurs. Dans ce cas, il est garantie l'existence d'une solution d'équilibre dite de Nash ou de point de selle.

2.2 Stratégies mixtes

Une stratégie mixte est définie par une distribution de probabilités dans l'espace de stratégies pures d'un même joueur. Ainsi, pour le jeu de la matrice \mathbf{J} (Fig. 1), les stratégies mixtes des joueurs 1 et 2 sont données, respectivement, par le variables aléatoires u et v , définies par les distributions $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_M]$ et $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_N]$ tel que:

$$u = i \text{ avec prob. } y_i; \quad \sum_{i=1}^M y_i = 1, \quad y_i \geq 0 \quad (9)$$

$$v = i \text{ avec prob. } z_i; \quad \sum_{i=1}^N z_i = 1, \quad z_i \geq 0 \quad (10)$$

Alors, la valeur moyenne du résultat du jeu, J_m , étant données les stratégies mixtes y et z , est exprimée par :

$$J_m(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N y_i J(l_i, h_j) z_j = \mathbf{y}^T \mathbf{J} \mathbf{z}, \quad (11)$$

où le joueur 1 cherche à minimiser J_m par un choix convenable de \mathbf{y} et le joueur 2 choisi un vecteur \mathbf{z} avec le but de maximiser J_m .

Les définitions de niveau et de stratégie d'assurance données pour les stratégies pures peuvent être étendues aux stratégies mixtes, tel que :

$$\bar{V}_m(\mathbf{J}) \triangleq \min_{\mathbf{y} \in Y} \max_{\mathbf{z} \in Z} \mathbf{y}^T \mathbf{J} \mathbf{z} \quad (12)$$

$$\underline{V}_m(\mathbf{J}) \triangleq \max_{\mathbf{z} \in Z} \min_{\mathbf{y} \in Y} \mathbf{y}^T \mathbf{J} \mathbf{z} \quad (13)$$

où Y et Z sont les ensembles de tous les vecteurs possibles \mathbf{y} et \mathbf{z} .

Le pair de stratégies mixtes \mathbf{y}^* et \mathbf{z}^* est donc une solution de point de selle de la matrice \mathbf{J} si $V_m(\mathbf{J}) = \underline{V}_m(\mathbf{J}) = \bar{V}_m(\mathbf{J})$.

Pour le cas à deux joueurs, le théorème min-max [8] démontre l'égalité entre ses niveaux d'assurance, de sorte que le jeu présente toujours une solution d'équilibre de point de selle. Cette solution d'équilibre est classiquement obtenue par des techniques de programmation linéaire [8].

3. Le jeu entre l'égaliseur et le canal

La matrice \mathbf{J} de la Fig. 1 représente le jeu entre l'égaliseur et le canal, à être analysé dans ce travail. Ses éléments expriment les valeurs d'erreur quadratique moyenne, étant donné un pair de décisions des joueurs. Le joueur 1 fait le rôle de l'égaliseur de Wiener qui cherche à minimiser l'erreur quadratique moyenne par un choix convenable de la distribution du retard d'égalisation l . Le joueur 2 est le canal, dont l'espace de stratégies pures est discrétisé, de façon à qu'il soit constitué par un nombre fini de vecteurs de coefficients, c'est à dire, de filtres FIR qui représentent la réponse impulsionnelle du canal.

Théorème: Dans l'absence de bruit et en considérant le signal transmis à la puissance unitaire, la somme des erreurs résiduelles associées aux solutions de Wiener pour tous les retards d'égalisation est donnée par :

$$\sum_i J(l_i, h_j) = L - 1, \quad (14)$$

où L est la longueur du canal.

Démonstration: De l'équation (6) il vient :

$$\sum_l EQM_{Wiener} = \sum_l (\sigma_s^2 - \mathbf{p}_l^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}_l) \quad (15)$$

où:

$$\mathbf{R} = E\{(\mathbf{H}\mathbf{s}_k + \mathbf{b}_k)(\mathbf{H}\mathbf{s}_k + \mathbf{b}_k)^T\} = \sigma_s^2 \mathbf{H}\mathbf{H}^T + \sigma_b^2 \mathbf{I} \quad (16)$$

$$\text{et} \quad \mathbf{p}_l = E\{\mathbf{x}_k s_{k-l}\} = E\{(\mathbf{H}\mathbf{s}_k + \mathbf{b}_k) s_{k-l}\} = \mathbf{H}\mathbf{e}_l \quad (17)$$

avec $\mathbf{e}_l = [1, 0, \dots, 0]$.

De façon que l'on peut écrire (16) tel que:

$$\sum_l EQM_{Wiener} = (N + L - 1) \sigma_s^2 - Tr\{\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}\} \quad (18)$$

Alors, en remplaçant (17) dans (19) et en supposant l'absence de bruit, il vient finalement :

$$\begin{aligned} \sum_l EQM_{Wiener} &= (N + L - 1) - Tr\{\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H}\} \\ &= (N + L - 1) - N \\ &= L - 1 \end{aligned} \quad (19)$$

Du résultat ci-dessus, et en rappelant la définition dans (8), on peut en tirer comme conséquence importante que les filtres qui fournissent une même valeur d'erreur résiduelle, pour tous les retards d'égalisation, sont des stratégies d'assurance du canal et l'erreur résiduelle correspondante vaut $(L-1)/M$.

Dans la suite, ce résultat est illustré par les simulations et d'autres aspects intéressants d'analyse sont aussi présentés et discutés. Dans tous les cas nous considérons des vecteurs \mathbf{h} à deux ou trois éléments et avec norme unitaire.

4. Résultats

Ayant en vue l'usage des techniques de programmation linéaire, l'analyse du jeu entre l'égaliseur et le canal est réalisée dans l'espace de stratégies mixtes. Cela pourtant n'exclue pas les stratégies pures, qui peuvent être vues comme un cas particulier (\mathbf{y} et \mathbf{z} à un seul élément non-nulle et unitaire). Le cas en absence de bruit est étudié premièrement.

4.1 Absence de bruit

Pour le cas à deux coefficients, les deux filtres qui fournissent les mêmes valeurs d'erreur résiduelle, $1/M$, pour tous les retards d'égalisation, sont ceux dont les zéros sont placés à $z = +1$ et $z = -1$, sur le cercle unité. Il est à remarquer que ces filtres sont considérés comme des cas critiques à deux coefficients quand le problème d'égalisation est étudié soit par l'approche classique, soit par celui de classification [9].

Un résultat assez curieux a été obtenu pour les filtres à trois coefficients. En accord avec l'expectative, les filtres qui fournissent les stratégies d'assurance ont ses zéros sur le cercle unité. Pourtant, il a été observé dans les simulations que ces filtres ne sont pas arbitraires, mais les phases des zéros obéissent à :

$$\Phi = \pi / M \quad (20)$$

De plus, pour le cas spécifique de $L = 3$ et $M = 5$, on trouve comme stratégie d'assurance la version à norme unitaire du vecteur $\mathbf{h} = [1 ; 1,618 ; 1]$ avec la remarque que 1,618 tends au nombre d'or! dans +1 et -1 pour le cas à deux coefficients)

D'autre part, les stratégies d'assurance obtenues pour l'égaliseur sont soit une distribution de probabilités uniforme pour les retards d'égalisation, soit une concentration de cette distribution dans le centre du vecteur de coefficients. Celle-ci nous rappelle l'initialisation *center-spike* [3], vue dans la littérature comme une procédure favorable pour les performances des égaliseurs adaptatifs aveugles.

Les paires de stratégies d'assurance, canal et égaliseur, représentent des solutions de points de selle, car les niveaux d'assurance des deux joueurs sont les mêmes, $(L-1)/M$.

4.2 Présence de bruit

Les mêmes analyses ont été réalisées tout en considérant un bruit aditif gaussien à moyenne nulle à l'entrée de l'égaliseur. Comme dans le scénario antérieur, les stratégies d'assurance obtenues pour le canal correspondent à des filtres difficiles à égaliser.

Pour ce qui concerne l'égaliseur, il est observé une tendance à concentrer la distribution de probabilité sur des valeurs de retard placées au tour de $M/2$, à la mesure que le rapport signal à bruit (RSB) est réduit. Le cas de canal à trois coefficients est présenté à la Fig. 2, avec des égaliseurs à 5 coefficients et 4 niveaux de RSB: sans bruit, 30, 15 et 5 dB.

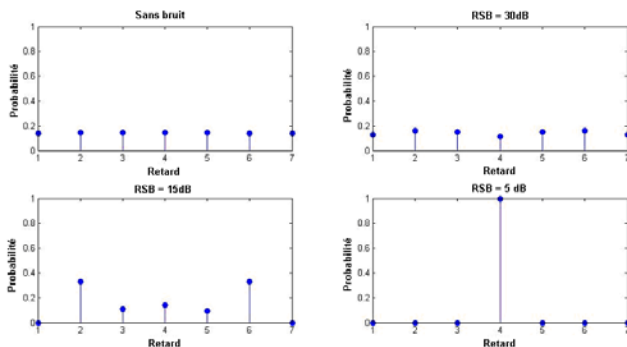


Figure 2: Distribution de la probabilité du retard - cas de canal à trois coefficients.

Il est à remarquer que des niveaux élevés de bruit rendent la matrice d'autocorrélation dans (16) proche à une matrice diagonale. Alors, la solution de Wiener dans (5) devient proportionnelle à un vecteur p_l dans (17) qui, pour l au tour de $M/2$, correspond à une colonne centrale de la matrice de convolution du canal dans (2). De plus, les éléments de cette colonne reproduisent le vecteur des coefficients \mathbf{h} du canal mais dans l'ordre inverse. Celle-ci est justement la configuration classique de la réponse du

filtre couplé [4]. On arrive alors à un résultat bien connu, l'égaliseur tends au filtre couplé pour des RSB très réduits, en analysant la stratégie d'équilibre du jeu pour ce scénario.

5. Conclusion

Une certaine quantité de résultats ont été introduits ou revisités dans le présent travail, en utilisant la théorie de jeux comme approche d'analyse pour le problème d'égalisation de canal. Parmi ces résultats on peut mettre en relief :

- Le théorème établie par l'équation (14).
- L'étude de filtre critique basé sur les stratégies d'assurance du canal.
- L'aboutissement de la procédure center-spike et de la configuration du filtre couplé via l'analyse par théorie de jeux.

Loin de clore la discussion, ce travail prétend ouvrir des perspectives d'usage d'un outil classique dans un contexte nouveau. Les résultats déjà obtenus nous motivent à donner poursuite à cette démarche.

Références

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 4 ed., 2001.
- [2] R. Suyama, R. R. F. Attux, J. M. T. Romano, M. Bellanger, *Relations entre les Critères du Module Constante et de Wiener*, 19^e Colloque GRETSI, Paris, 2003.
- [3] G. J. Foschini, *Equalizing Without Altering or Detecting Data*, AT&T Technical Journal, vol. 64, no. 8, pp. 1885-1911, 1985.
- [4] J. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, 4 ed., 2000.
- [5] V. Srivastava, J. Neel, A. B. MacKenzie, R. Menon, L. A. DaSilva, J. E. Hicks, J. H. Reed and R. P. Gilles, *Using Game Theory to Analyze Wireless Ad Hoc Networks*, IEEE Communications Surveys & Tutorials, vol. 7, no. 4, pp. 46-56, 2005.
- [6] D. P. Palomar, J. M. Cioffi and M. A. Lagunas, *Uniform Power Allocation in MIMO Channels: A Game-Theoretical Approach*, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 49, no. 7, pp. 1707-1727, 2003.
- [7] A. B. MacKenzie and S. B. Wicker, *Game Theory and the Design of Self-Configuring, Adaptive Wireless Networks*, IEEE Communications Magazine, vol. 39, no. 11, pp. 126-131, 2001.
- [8] T. Basar and G. J. Olsder, *Dynamic Noncooperative Game Theory*, SIAM, 2 ed., 1998.
- [9] J. Montalvão, B. Dorizzi and J. C. M. Mota, *Some Theoretical Limits of Efficiency of Linear and Nonlinear Equalizers*, Journal of the Brazilian Telecommunication Society, vol. 14, no. 2, pp. 85-92, 1999.