

# Le filtre adapté global : un algorithme pour le cas complexe

Jean-Jacques Fuchs  
 IRISA/Université de Rennes I  
 Campus de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex  
 fuchs@irisa.fr

**Résumé** – Le filtrage adapté est, sans doute, une des techniques les plus utilisées en détection/estimation et le périodogramme, la formation de voies ou la formation de faisceaux en sont quelques interprétations. Dans tous ces cas, il a une résolution limitée et ses performances ne s’améliorent pas fondamentalement quand le nombre de données ou le rapport signal à bruit augmente, ce n’est pas une méthode à haute résolution. Nous avons proposé une façon, que nous avons appelée le filtre adapté global, qui résout le même type de problème. Il a des performances comparables à celles des méthodes haute résolution pour un coût de calcul raisonnable. Nous démontrons la convergence d’un algorithme d’optimisation qui permet d’appliquer le filtre adapté global à des données complexes.

**Abstract** – The matched filter is the method of choice in detection-estimation when a single signal is to be detected. When several signals are present, the answer is more open since it is not a high resolution method. The global matched filter is a high resolution method that drastically improves upon the matched filter, while keeping a reasonable computational cost. We establish here, that an algorithm that allows to apply the global matched filter to complex data, converges to the expected optimum.

## 1 Introduction

Le filtre adapté (FA) permet de détecter ou localiser dans une observation (un signal observé) un signal connu noyé dans du bruit. Si le signal connu à détecter n’est pas isolé et s’il s’agit de détecter et estimer des signaux proches les performances du filtre adapté se dégradent rapidement, on dit que son pouvoir de résolution est limité.

Il en est de même pour la méthode connue sous le nom de “matching pursuit” (MP) [1] et dans laquelle l’endroit de corrélation maximale est localisé et le signal soustrait de l’observation avant de recommencer l’opération en cherchant l’endroit de corrélation maximale sur l’observation résiduelle. Le filtre adapté global (FAG) [2]-[4] s’attaque aux mêmes problèmes, mais, alors que le FA cherche les endroits où la corrélation est maximale les uns après les autres sans les retrancher les contributions, et que MP les localise et les retranche, le FAG localise les endroits et calibre les contributions globalement et simultanément. On cherche le minimum d’un critère et, idéalement, ce minimum fournit à la fois le nombre de signaux nécessaires pour expliquer l’observation, les endroits où les placer et les amplitudes associées.

Le FAG a été développé pour des données réelles et donc, en radar ou sonar, on l’applique en sortie de formations de voies, par exemple. Le critère à minimiser est convexe et du type programme quadratique. Pour le minimiser un algorithme particulièrement efficace a été proposé [5],[6]. Le critère du FAG est facile à transposer au cas complexe mais sa minimisation est plus difficile et l’algorithme rapide développé pour le cas réel ne s’étend pas au cas complexe, pas plus que les algorithmes de programmation quadratique. Nous établissons ci-dessous la convergence vers l’optimum global d’un autre algorithme du type moindres carrés itérés pondérés (IRLS) [7]-[10], que nous obtenons comme un algorithme de points fixes.

Pour fixer les idées et illustrer le propos, nous considérons un cas simple, facile à présenter et non sans intérêt. On observe  $n$  échantillons d’une somme de sinusoides et on veut retrouver le nombre de sinusoides et pour chacune d’elle amplitude, phase initiale et fréquence. On range les observations dans un vecteur colonne  $b$  et on construit une matrice  $A$  de dimension  $n \times m$  avec  $m = 2n_f \gg n$ . La  $p$ -ème colonne de  $A$ ,  $p \in (1, n_f)$ , a pour composantes  $e^{-2i\pi f_p k}$ ,  $k \in (0, n-1)$ ,  $f_p = p/(2n)_f$  et les  $n_f$  dernières colonnes de  $A$  sont les conjuguées de ces  $n_f$  premières. Le FAG propose de résoudre le problème d’optimisation suivant

$$\min \frac{1}{2} \|Az - b\|^2 + h \|z\|_1, \quad h > 0 \quad (1)$$

où  $\|y\|^2 = y^z y$  avec  $y^*$  le vecteur complexe conjugué transposé si  $y$  est un vecteur et le conjugué si c’est un scalaire, et  $\|z\|_1 = \sum |z_k|$ , la somme des modules des composante de  $z$ .

L’idée est de reconstruire les sinusoides à l’aide des colonnes de  $A$ . Idéalement une sinusoides serait reconstruite à l’aide de 2 colonnes conjuguées de  $A$ , pondérées par des poids conjugués eux aussi. Les poids permettent de retrouver l’amplitude et la phase initiale, alors que la fréquence est déduite des indices des colonnes. Dans la pratique, il faut, bien entendu, davantage de colonnes car les fréquences des sinusoides à reconstruire ne sont pas des multiples de  $1/(2n_f)$ , notamment. Pour conserver une représentation parcimonieuse, on tolère alors une erreur de reconstruction qui est régler à l’aide du paramètre  $h$ . En absence de bruit additif sur les observations,  $h \simeq 0,05$  peut permettre de gommer/tolérer les erreurs de reconstruction dues à la discrétisation en fréquence.

Dans le paragraphe qui suit, nous donnons / établissons les conditions nécessaires et suffisantes d’optimalité de (1) et nous développons l’algorithme de minimisation itérative dont nous prouvons la convergence dans le paragraphe 3. Dans le paragraphe 4, nous présentons quelques résultats de simulation concernant l’exemple détaillé plus haut, avant de conclure.

## 2 Conditions d'optimalité et algorithme

### 2.1 Conditions d'optimalité

Nous appelons  $f(z)$  la fonction, de  $C^m$  dans  $R^+$ , à minimiser (1), elle est convexe et les conditions d'optimalité du premier ordre sont donc aussi suffisantes

**Proposition:**  $z$  est un minimum de (1) si et seulement si il existe un vecteur complexe  $u$ , un sous-gradient de  $\|z\|_1$ ,

$$\begin{aligned} \text{qui satisfait} \quad & u_k = \frac{z_k}{|z_k|} \text{ si } k \in \{k|z_k \neq 0\} \\ & \text{et } |u_k| \leq 1 \text{ si } k \in \{k|z_k = 0\}, \\ \text{tel que} \quad & A^*(Az - b) + hu = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

**Démonstration:** Comme  $f$  est convexe, il suffit de vérifier que la variation du premier ordre dans  $f(z + \delta z)$  est  $\geq 0$ .

On commence par vérifier que pour  $k \in \{k|z_k \neq 0\}$ , aussi noté  $k \in act$ ,

$$|z_k + \delta z_k| = |z_k| + \frac{\Re(z_k^* \delta z_k)}{|z_k|} + \dots$$

et que pour  $k \in \{k|z_k = 0\}$ , aussi noté  $k \in inact$ :  $|z_k + \delta z_k| = |\delta z_k|$ . Si on pose  $v = A^*(Az - b)$ , on a successivement:  $f(z + \delta z)$

$$\begin{aligned} &= f(z) + \frac{1}{2}(\delta z^* v + v^* \delta z) + h \sum_{k \in act} \frac{\Re(z_k^* \delta z_k)}{|z_k|} + h \sum_{k \in inact} |\delta z_k| + \dots \\ &= f(z) + \Re(v^* \delta z) + h \sum_{k \in act} \frac{\Re(z_k^* \delta z_k)}{|z_k|} + h \sum_{k \in inact} |\delta z_k| + \dots \end{aligned}$$

et en distribuant le terme linéaire  $\Re(v^* \delta z)$  dans les deux sommes et en remplaçant  $v$  par  $-hu$ , (2), on a

$$\begin{aligned} f(z + \delta z) &= f(z) + h \sum_{k \in act} \left( -\frac{\Re(z_k^* \delta z_k)}{|z_k|} + \frac{\Re(z_k^* \delta z_k)}{|z_k|} \right) \\ &\quad + h \sum_{k \in inact} (-\Re(u_k^* \delta z_k) + |\delta z_k|) + \dots \\ &= f(z) + h \sum_{k \in inact} [1 - |u_k| \cos(u_k, \delta z_k)] |\delta z_k| + \dots \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat, puisque ces derniers termes sont tous positifs ou nuls, car  $|u_k| \leq 1$  et donc:  $1 - |u_k| \cos(\cdot) \geq 0$ .  $\square$

On peut déduire de la proposition que pour  $h \geq \|A^*b\|_\infty$ , l'optimum de (1) est en  $z = 0$ , où  $\|z\|_\infty = \max_k |z_k|$ .

Pour introduire des notations utilisées plus loin, on découpe l'optimum  $z$  de (2) en ses composantes non nulles  $\bar{z}$  avec  $k \in act$  et ses composantes nulles  $\bar{\bar{z}}$  avec  $k \in inact$  et décompose de la même façon  $A$  et  $u$  la relation (2) devient

$$\bar{A}^*(b - \bar{A}\bar{z}) = h \text{sign}(\bar{z}) \quad \text{et} \quad \bar{\bar{A}}^*(b - \bar{A}\bar{z}) = h \bar{\bar{u}}, \quad (3)$$

où nous notons, par analogie avec le cas réel,  $\text{sign}(\bar{z})$  le vecteur  $\bar{u}$  dont les composantes sont:  $z_k/|z_k|$ .

### 2.2 L'algorithme de points fixes

Si on suppose que  $z$  n'a pas de composante nulle, alors le vecteur  $u$  est parfaitement défini et, en posant  $|Z| = \text{diag}(|z|)$ , on a  $u = |Z|^{-1}z$ . On peut alors mettre la relation (2),  $A^*(b - Az) = h|Z|^{-1}z$ , sous la forme  $z = t(z)$  avec

$$t(z) = |Z|A^*(A|Z|A^* + hI)^{-1}b \quad \text{avec } |Z| = \text{diag}(|z|). \quad (4)$$

On propose donc d'étudier l'algorithme de points fixes  $z \rightarrow z^+ = t(z)$  que l'on initialise, par exemple, en  $z^0 = A^+b = (A^*A)^{-1}A^*b$ . On va supposer qu'aucune composante de  $z^k$  ne sera jamais exactement nulle, puisque sinon elle le demeure dans toute la suite et qu'au mieux on convergera vers l'optimum de (1) avec une matrice  $A$  réduite de laquelle on aurait retiré la colonne associée à la composante nulle.

Cet algorithme a déjà été proposé dans le cas réel, il peut aussi être vu comme un algorithme des moindres carrés pondérés itérés (IRLS) [7]-[9]. On va démontrer qu'il converge vers un optimum noté  $z_o$ . A notre connaissance, aucune preuve complète n'existe, ni dans le cas réel, ni dans le cas complexe.

## 3 Analyse de convergence

Nous allons établir que :

**Proposition:** La suite  $\{z^k\}$  générée par

$$z^{k+1} = |Z^k|A^*(A|Z^k|A^* + hI)^{-1}b, \quad (5)$$

avec  $|Z^k| = \text{diag}(|z_i^k|)$  converge vers l'optimum de (1), si aucun point de la suite n'a de composante nulle.  $\square$

La probabilité pour qu'une composante s'annule exactement est extrêmement faible, même sur un ordinateur, mais la question de la mesure de l'ensemble des points menant à un tel "accident" reste posée. Par ailleurs, il faut bien noter que cela n'interdit évidemment pas à la suite de converger vers un point qui a de nombreuses composantes nulles.

Le schéma de la preuve est le suivant. Nous caractérisons d'abord les points fixes de l'itération. Leur nombre est fini et ils sont isolés. On démontre ensuite que la fonction décroît le long des points de la suite, ce qui implique qu'elle est bornée et admet donc des points d'accumulation. On introduit alors la suite  $m^k$  des vecteur-modules de  $z^k$  et montrons successivement que  $\|m_{k+1} - m^k\| \rightarrow 0$ , que  $m^k$  converge vers un point d'accumulation qui est aussi un point fixe et que ceci est vrai également pour  $z^k$ . Il reste alors à prouver que tous les mauvais points fixes sont répulsifs.

### 3.1 Les points fixes

Ils satisfont:  $z = |Z|A^*(A|Z|A^* + hI)^{-1}b$ , ou après réécriture, en introduisant  $U = \text{diag}(u)$ ,

$$Z(1 - UA^*(A|Z|A^* + hI)^{-1}b) = 0. \quad (6)$$

L'origine est toujours un point fixe. Soit  $z$  est un autre point fixe et partitionnons le en  $\bar{z}$  (composantes non nulles) et en  $\bar{\bar{z}}$  (composantes nulles). Cela induit une partition de  $A$  et on a, par exemple,  $Az = \bar{A}\bar{z}$ . Les équations dans (6) associées à  $\bar{\bar{z}}$  s'éliminent et les autres deviennent après réécriture

$$\bar{u} = \bar{A}^*(\bar{A}|\bar{Z}|\bar{A}^* + hI)^{-1}b, \quad (7)$$

soit aussi  $\bar{u} = (\bar{A}^*\bar{A}|\bar{Z}| + hI)^{-1}A^*b$  et donc

$$\bar{A}^*(\bar{A}\bar{z} - b) = h\bar{u}, \quad (8)$$

qui n'est autre que (3) restreint à  $k \in act$ . Cela signifie que  $z_o$ , le point de convergence souhaité, est bien un point fixe de (4).

Si l'optimum de (1) n'est pas atteint en un point unique, mais en tout point d'un ensemble convexe, alors tous les points de cet ensemble, sont des points fixes.

Pour obtenir d'autres points fixes, on retire une ou plusieurs colonnes de  $A$  et on considère un optimum  $z_o^r$  du nouveau problème (1) associé. A cet optimum, on associe alors une partition, que l'on peut étendre au  $z$  complet, et pour les composantes non nulles on arrive à (7) et donc (8) qui admet une solution puisque  $z_o^r$  satisfait (3). On a déjà dit que si une (ou plusieurs) composante d'un  $z^k$  issu de (4) devenait nulle, par accident, alors on convergerait au mieux vers la solution d'un autre problème. A chacun de ces autres problèmes est donc associé un (ou un ensemble convexe de) point fixe.

Il y a par conséquent un nombre fini de points fixes ou d'ensemble de points fixes, qui se distinguent par le jeu des indices associés aux composantes nulles. Leur nombre diminue quand  $h$  augmente, et pour  $h \geq \|A^*b\|_\infty$ , il reste un seul point fixe, l'origine.

### 3.2 Un algorithme de descente

On va montrer que  $f^{k+1} \leq f^k$  que l'on note aussi  $f^+ \leq f$  ou  $f^+ \leq f^-$ . on commence par évaluer  $r^+ = b - Az^+$

$$r^+ = [I - A|Z|A^*(A|Z|A^* + hI)^{-1}]b = h(A|Z|A^* + hI)^{-1}b$$

et (4) devient donc  $z^+ = |Z|A^*r^+/h = -|Z|g^+/h$ , où  $g = A^*(Az - b) = -A^*r$  est le gradient de la partie quadratique de  $f$ .

En posant  $\tilde{z} = z^- - z^+$ ,  $\Delta f = f(z^-) - f(z^+)$  peut s'écrire :

$$\Delta f = \frac{1}{2}\tilde{z}^*A^*A\tilde{z} + \frac{1}{2}(g^{+*}\tilde{z} + \tilde{z}^*g^+) + h(\|z^- - z^+\|_1).$$

Pour montrer que  $\Delta f \geq 0$ , on oublie le terme quadratique, qui est  $\geq 0$ , et on se concentre sur les termes linéaires et ses  $m$  composantes. On a  $\Delta f \geq \sum_{p=1}^m \Delta_p$  avec :

$$\Delta_p = \Re[g_p^{+*}(z_p^- - z_p^+)] + h(|z_p^-| - |z_p^+|),$$

on utilise la relation  $|z_p^-|g_p^+ = -hz_p^+$  établie plus haut et comme par hypothèse  $z_p^- \neq 0$ , on a :

$$\Delta_p = -h \frac{1}{|z_p^-|} \Re[z_p^{+*}(z_p^- - z_p^+)] + h(|z_p^-| - |z_p^+|)$$

si on pose alors  $z_p^- = \rho e^{i\theta}$  et  $z_p^+ = r e^{i\varphi}$  on obtient

$$\Delta_p = \frac{h}{\rho} (\rho^2 - \rho r - \rho r \cos(\theta - \varphi) + r^2) \geq \frac{h}{\rho} (\rho - r)^2.$$

On en déduit que  $\Delta f = \Delta f^k = f(z^{k-1}) - f(z^k) \geq 0$  pour tout  $k$ , et, par conséquent,  $\Delta f^k$  et  $\Delta_p$  convergent vers zéro quand  $k \rightarrow \infty$ , puisque  $\sum_k \Delta f^k$  est borné.

### 3.3 Convergence vers un point fixe

Comme  $f$  est convexe et décroît le long de  $\{z^k\}$ , cette suite reste dans un compact et admet des points d'accumulation. On considère maintenant la suite des vecteurs modules  $\{m^k\}$  où  $m^k = |z^k|$ . Elle admet de la même façon des points d'accumulation et peut être vue comme générée par  $m^{k+1} = |t(m^k)|$ . De plus, comme  $t(z) = t(m)$ , (4), on peut associer à chaque point fixe  $\tilde{z}$  de  $t(\cdot)$  satisfaisant  $\tilde{z} = t(\tilde{z})$  un point fixe  $\tilde{m} = |\tilde{z}|$  de  $m = |t(m)|$  :

$$\tilde{z} = t(\tilde{z}) = t(\tilde{m}) \Rightarrow \tilde{m} = |t(\tilde{m})| = |\tilde{z}|.$$

Nous démontrons des propriétés de  $\{m^k\}$  transposable à  $\{z^k\}$ .

◊ On montre que  $\|m^{k-1} - m^k\| \rightarrow 0$ .

On a vu plus haut que  $\Delta_p$  tend vers zéro, mais

$$\Delta_p \geq \frac{h}{\rho} (\rho - r)^2 > K(\rho - r)^2$$

où  $K$  est une constante positive vérifiant  $(\rho/M) > K > 0$  avec  $M = \max_k \|z^k\|_\infty$  puisque  $z^k$  est borné, on en déduit  $|\rho - r| = |m_p^{k-1} - m_p^k| \rightarrow 0$  et donc que  $\|m^{k-1} - m^k\| \rightarrow 0$ .

◊ Les points d'accumulations de  $\{m^k\}$  sont des points fixes de  $m = |t(m)|$ . If  $m^{k_n} \rightarrow m^{k^*}$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors  $|t(m^{k_n})| = m^{k_n+1} \rightarrow |t(m^{k^*})|$ , mais comme  $\|m^{k_n} - m^{k_n+1}\| \rightarrow 0$ , on a aussi  $m^{k_n+1} \rightarrow m^{k^*}$  d'où le résultat.

◊  $\{m^k\}$  converge vers un point fixe. Comme il y a un nombre fini de points fixes, pour  $k$  suffisamment grand la suite reste dans le voisinage de l'un d'eux puisque  $\|m^{k+1} - m^k\| = \||t(m^k)| - m^k\| \rightarrow 0$ , et converge donc vers lui.

Comme les points fixes se distinguent entre eux notamment par le jeu des indices des composantes nulles, si  $m_k \rightarrow m^*$  alors  $z_k \rightarrow z^*$  avec  $z^* = t(m^*)$ .

### 3.4 Les faux points fixes sont répulsifs

Pour  $\|A^*b\|_\infty < h$ , il y a un seul point fixe, le désiré, et il n'y a rien à prouver. On prend  $\|A^*b\|_\infty > h$  et on rappelle que l'on suppose qu'aucune composante de  $z^k$ , n'est jamais nulle.

On commence par l'origine qui est toujours un point fixe. Soit  $c > 0 \ni (\|A^*b\|_\infty/h) = 1 + c > 1$  et soit  $p$  la composante qui réalise l'égalité. On récrit (4) sous la forme équivalente

$$z^+ = |Z|A^*(I + \frac{1}{h}A|Z|A^*)^{-1}\frac{1}{h}b$$

et on remarque que si on avait  $z^+ = (1/h)|Z|A^*b$ , qui pourrait se récrire  $z^+ = (1/h)\text{diag}(UA^*b)z$ , l'origine serait bien répulsive, puisque le module  $m_p^k$  de la  $p$ -ème composante de  $z^k$  divergerait comme  $(1+c)^k$ . Mais on peut se ramener à ce cas en considérant une boule autour de l'origine, dont le rayon est choisi pour que la norme entre  $(I + (1/h)A|Z|A^*)^{-1}$  et la matrice identité soit aussi petit que souhaité. Dès que  $z^k$  entre dans cette boule la  $p$ -ème composante augmente et la suite en ressort.

Soit maintenant  $z_f$  un point fixe différent de l'optimum  $z_o$  de (1), la démonstration est similaire. Ce point fixe est obtenu à partir de optimum  $x_f$  de (1) quand la matrice  $A$  est remplacée par  $A_f$  obtenue en enlevant une ou plusieurs colonnes de  $A$ . On note  $\bar{z}_f$  les composantes non nulles de  $z_f$  identique à celles de  $x_f$  et  $\bar{\bar{z}}_f$  les composantes nulles de  $z_f$ , celles de  $x_f$  plus celles préalablement enlevées. Cette partition de  $z_f$  induit une partition de  $A$  en  $\bar{A}_f$  et  $\bar{\bar{A}}_f$ . Comme  $z_f$  est un point fixe,  $\bar{z}_f$  satisfait  $\bar{z}_f = |\bar{Z}_f|\bar{A}_f^*(hI + \bar{A}_f|\bar{Z}_f|\bar{A}_f^*)^{-1}b$  et on peut alors vérifier que

$$b - \bar{A}_f\bar{z}_f = h(hI + \bar{A}_f|\bar{Z}_f|\bar{A}_f^*)^{-1}b. \quad (9)$$

et comme  $\bar{z}_f$  correspond aux composantes non nulles de l'optimum  $x_f$  de (1) avec  $A_f$  à la place de  $A$ , on a (3) :

$$\bar{A}_f^*(b - \bar{A}_f\bar{z}_f) = h\bar{\mu}_f \quad (10)$$

et le vecteur  $\bar{\mu}_f$  défini par  $\bar{A}_f^*(b - \bar{A}_f\bar{z}_f) = h\bar{\mu}_f$ , a au moins une composante plus grande que 1 en module (associée à une colonne manquante dans  $A_f$  et réintroduite dans  $\bar{\bar{A}}_f$ ) car sinon

$z_f$  serait un optimum du problème initial (1). En combinant ces deux dernières relations on a

$$\bar{\bar{A}}_f (hI + \bar{A}_f |\bar{Z}_f| \bar{A}_f^*)^{-1} b = \bar{\bar{\mu}}_f. \quad (11)$$

On montre maintenant que si  $z^k$  rentre dans une boule centrée en  $z_f$  il ne peut y rester. En réduisant le rayon de la boule, le vecteur  $z^{k+1}$  qui suit  $z^k$  peut être rendu arbitrairement proche de  $y^{k+1}$  donné par

$$y^{k+1} = |Z^k| A^* (hI + \bar{A}_f |\bar{Z}_f| \bar{A}_f^*)^{-1} b$$

mais en partitionnant cette relation selon la partition induite par  $z_f$  et en utilisant (9,10,11) on obtient:

$$\bar{y}_f^{k+1} = |\bar{Z}_f^k| \bar{u}_f \quad \text{et} \quad \bar{y}_f^{k+1} = |\bar{Z}_f^k| \bar{\mu}_f.$$

Comme  $\bar{\mu}_f$  a une composante plus grande que un en module, la composante correspondante de  $\bar{y}_f^{k+1}$  augmente et il en est de même pour celle de  $z^{k+1}$ , en choisissant bien le rayon de la boule. Dès que  $z^k$  entre dans cette boule centrée en  $z_f$  au moins une composante (proche de zéro) augmente en module et la suite  $\{z_k\}$  en ressort.  $\square$

## 4 Exemple d'application et conclusions

On reprend l'exemple introduit dans l'introduction. On range dans le vecteur  $b$ ,  $n$  composantes de  $y_k = \sum_1^P \alpha_p \cos(2\pi f_p k + \varphi_p) + \sigma e_k$  avec  $\{e_k\}$  du bruit blanc gaussien de variance unité. On construit la matrice  $A$  avec  $m = 2n_f$  colonnes de la façon indiquée et on initialise l'algorithme itératif :

$$z^{k+1} = |Z^k| A^* (A |Z^k| A^* + hI)^{-1} b \quad \text{avec} \quad |Z| = \text{diag}(|z|)$$

en  $z^0 = (A^* A)^{-1} A^* b$  qui a génériquement aucune composante nulle. On observe qu'après convergence, pour un vecteur  $b$  réel le vecteur  $z$  possède une symétrie hermitienne (et cela même si  $z^0$  ne l'a pas), c'est bien sûr une propriété du point fixe qui peut éventuellement être prise en compte pour simplifier la mise en oeuvre de l'algorithme et gagner en temps de calcul.

Nous considérons  $n=40$  échantillons et une matrice  $A$  ayant  $m=2n_f = 800$  colonnes. Nous simulons  $P=2$  sinusoïdes d'amplitude  $\alpha_p=1$  et un bruit d'écart type  $\sigma = .22$  ce qui correspond à un rapport signal à bruit de 10 dB. Les fréquences normalisées valent  $f_1=.125$  et  $f_2=f_1 + (1/2n)$ . On présente dans la Figure 1, le résultat des 20 premières itérations de l'algorithme (le module de  $z(1 : 200)$ ). Nous avons réglé le paramètre  $h$  à 0,1 dans (1), cf [4], mais le résultat est peu sensible à ce réglage. La méthode sépare les deux sinusoïdes alors que le périodogramme ne les sépare pas.

Dans le cas d'un échantillonnage régulier il y a bien entendu de nombreuses méthodes concurrentes mais il est clair que le FAG s'applique aussi bien dans le cas d'un échantillonnage irrégulier où la concurrence est bien moins vive.

Pour l'application présentée les observations sont réelles mais l'extension du FAG au cas complexe a permis de traiter sans difficulté le cas de phases initiales  $\varphi_p$  non nulles, [12].

Il faut aussi noter que le problème d'optimisation (1) peut être traité dans le cas complexe à l'aide des méthodes SOC (second order cone programming) un cas particulier d'approches plus générales appelées "convex conic programming" [13][14].

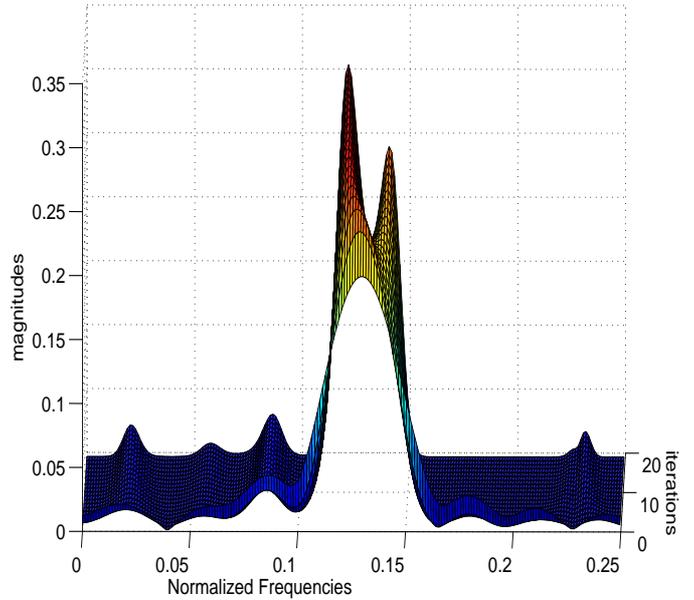


FIG. 1: Module des 200 premières composantes de  $z$  pour les 20 premières itérations

Dans la transcription, le nombre des inconnues augmente sensiblement et on peut alors considérer le critère légèrement différent  $\min_z \|Az - b\|_2 + \lambda \|z\|_1$  dont la réécriture est plus simple.

*Remerciements:* Nous tenons à remercier H. Carfantan pour nous avoir fait remarquer que l'algorithme (4) donnait de bons résultats dans le cas complexe et nous avoir incité à étendre la preuve de convergence à ce cas.

## Références

- [1] S.G. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuit with time-frequency dictionaries. *IEEE-T-SP*, 41: 3397-3415, Dec. 1993.
- [2] J.J. Fuchs. Une approche à l'estimation et l'identification simultanées. *XVI Colloque GRETSI*, vol. 2, pp. 1273-1276, Grenoble, 1997.
- [3] J.J. Fuchs, The global matched filter: Application to DOA estimation with a uniform circular array. *SAM 2000*, Cambridge, USA, march 2000.
- [4] J.J. Fuchs, On the application of the global matched filter to DOA estimation with uniform circular arrays. *IEEE-T-SP*, vol. 49, p. 702-709, avr. 2001.
- [5] B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone and R. Tibshirani, "Least angle regression," *Annals of Statistics*, 32, pp. 407-499, Apr. 2004.
- [6] S. Maria and J.J. Fuchs, "Application of the global matched filter to stap data, an efficient algorithmic approach" *ICASSP*, 2006.
- [7] M.D. Sacchi, T.J. Ulrych and C.J. Walker. Interpolation and extrapolation using a high-resolution discrete Fourier transform. *IEEE-T-SP*, 46, 1: 31-38, Jan. 1998.
- [8] M. Davies and L. Daudet. Sparsifying subband decompositions. *IEEE Workshop on Applic. of Sig. Proc. to Audio and Acoustics*, New Pfalz, NY, Oct. 2003.
- [9] M. Figueiredo. Adaptive sparseness for adaptive learning. *IEEE-T-PAMI*, 25, 9: 1150-1159, Sep. 2003.
- [10] S. Bourguignon. *Analyse spectrale à haute résolution de signaux irrégulièrement échantillonnés*. Thèse de l'univ. de Toulouse III, déc. 2005..
- [11] J.J. Fuchs. Linear programming in spectral estimation. Application to array processing. *IEEE ICASSP*, Atlanta, vol.6, pp. 3161-3164, may 1996.
- [12] N. Moal and J.J. Fuchs, Sinusoids in white noise: a quadratic programming approach. *Proceedings of the IEEE ICASSP Conference*, vol. IV, pp. 2221-2224, Seattle, 1998.
- [13] A. Ben Tal and A. Nemirovski Lectures on modern convex optimization. *Philadelphia SIAM MPS*, 2001.
- [14] D. Malioutov, M. Cetin et A. Willsky, A sparse reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE-T-SP*, 53, 8, p. 3010-3022, Aug. 2005.